Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 12 nº 25 (agosto/2012 - dezembro/2012) - pág. 51-63
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

HARRIOT E STEDALL: UMA REAVALIAÇÃO

Marcel A. R. de Almeida
Gert Schubring
Univesidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ – Brasil

(aceito para publicação em março de 2012)

Resumo

As obras de François Viète foram decisivas para a emergência da álgebra como uma ciência própria; porém derivaram duas vertentes diferentes. Progredindo com as intenções de Viète, os desenvolvimentos de René Descartes são extensamente pesquisados e apreciados. Por outro lado, Thomas Harriot (1560-1621) desenvolveu uma abordagem inteiramente simbólica que no entanto apareceu somente numa forma distorcida na publicação póstuma "Artis analitycae praxis" (1631). Em 2003, a autora inglesa Jackeline Stedall consegue reconstruir o trabalho de Harriot em sua forma original compilando mais de 400 folhas manuscritas e desordenadas seguindo pistas de seus colaboradores mais íntimos em publicações e cartas da época. As contribuições de Harriot para uma álgebra simbólica ganharam um interesse particular nos ultimos anos, graças à estas descobertas e reconstituições de seus manuscritos dispersos.

Visto a história atribulada dos seus textos, este artigo tenciona reavaliar as versões e apreciações diferentes do trabalho de Harriot no contexto da atual historiografia da álgebra.

Palavras-chave: Matemática, História, Álgebra, Harriot.

[HARRIOT AND STEDALL: A REASSESSMENT]

Abstract

The works by François Viète were decisive for the emergence of algebra as a proper disciplinary area within mathematics. Two different subsequent developments derived from them, however. The contributions by René Descartes who took up Viète's approaches are extensively studied. On the other hand, Thomas Harriot (1560-1621) established a purely symbolic approach, which became known, however, only in a distorted form, published posthumously in 1631 as "Artis analyticae praxis". In 2003, the British researcher Jackeline Stedall succeeded in reconstructing Harriot's work in its original form, by reorganizing the more than 400 sheets of manuscript pages, following hints preserved given by his more intimate collaborator. Thanks to this reconstitution of the dispersed manuscripts, Harriot's contributions towards a symbolic algebra gained particular attention over the last years.

Given the complex history of his texts, this study intends to reassess the various appreciations of Harriot's work in the context of present methodology of the history of algebra.

Keywords: Mathematics, History, Algebra, Harriot.

Introdução

O papel decisivo de François Viète para a emergência da álgebra como uma ciência própria é bem conhecido, assim como as limitações de sua abordagem visto a manutenção de relações fortes com conceitos geométricos. Progredindo com as intenções de Viète, os desenvolvimentos de René Descartes são extensamente pesquisados e apreciados. As contribuições de Harriot para uma álgebra simbólica ganharam um interesse particular nos ultimos anos, graças as descobertas e reconstituições de seus manuscritos dispersos. Visto a história atribulada dos seus textos, este artigo tenciona re-avaliar as versões e apreciações diferentes quanto ao desenvolvimento geral da álgebra.

Thomas Harriot (1560-1621) foi um pensador inovador e praticante de algumas vertentes das ciências matemáticas: navegação, astronomia, ótica, geometria e álgebra. Nada se sabe de sua formação científica inicial embora seu registro na universidade de Oxford datado de 1577 sugira que ele nasceu em torno de 1560. Este registro também implica que ele já vivia em Oxford e que morava na St. Mary's Hall, afiliada ao Oriel's College. Algum tempo depois de sua graduação, foi contratado por Walter Raleigh como navegador e cientista.

Nunca publicou nenhuma de suas conclusões matemáticas e científicas. Quando faleceu, deixou mais de 400 folhas (manuscritas) com observações, cálculos e diagramas. A variedade do conteúdo e a desordem dos papéis venceram todas as tentativas posteriores de publicação. Sua única publicação é *A brief and true report of the new found land of Virgínia* (1588), resultado de seu trabalho como navegador e cientista em uma expedição à América do Norte (1585-1586). O livro *Artis analyticae praxis* (ou simplesmente praxis) foi publicado em 1631 pelos executores do testamento de Harriot, como veremos a seguir.

Sua reputação como matemático se estabeleceu nos anos seguintes à sua volta para a Inglaterra. No início dos anos 1590, Harriot foi apadrinhado por Sir Henry Percy, o nono conde de Nothumberland, beneficio que durou por toda sua vida.

Um importante companheiro intelectual de Harriot foi Nathaniel Torporley (1564-1632), que se graduou em Oxford quatro anos após Harriot. Torporley se tornou um amanuensis de François Viète (1540-1603). Na literatura, o trabalho de Viéte é comumente caracterizado como uma convergência bem sucedida entre os métodos geométricos gregos (disponíveis nesta época através de traduções e reedições) e os métodos algébricos de matemáticos italianos como Girolamo Cardano (1501-1576). A influência destas duas vertentes matemáticas em seu trabalho levaram o matemático francês a propor uma "nova análise matemática" que elevou o status da álgebra de uma disciplina muito ligada a problemas práticos aritméticos a uma poderosa ferramenta para resolver todos os problemas.

> *"É quase certo que, através de Torporley, Harriot adquiriu seu profundo conhecimento da matemática de Viète. Há, por exemplo, entre seus papéis, uma página intitulada "Uma proposição de Viète entregue pelo senhor Torporley", além de várias outras referências à matemática de Viète nos manuscritos de Harriot".* (Stedall, 2003, p. 4; trad. M.A.).

Quanto a Harriot, pode-se dizer que a sua matemática tomou por base a de Viète. Certamente, Harriot explorou por si próprio os conceitos subjacentes ao método de Viète, assim desenvolvendo um tratamento próprio da estrutura e solução das equações polinomiais. De maneira singular, sua álgebra não era restrita a problemas de geometria e pela primeira vez era o foco de alguma teoria.

Wallis e as controvérsias

O matemático inglês John Wallis (1616-1703) teve uma grande importância na nossa percepção do trabalho de Harriot. A tentativa de Wallis de resgatar o lugar devido a Harriot em meio a acusações de plágio por parte de René Descartes é conhecida e melhor documentada no Tratado de álgebra publicado por Wallis em 1685 (Almeida, 2010). No decorrer de diversos capítulos deste livro, o autor constrói uma interpretação dos resultados de Harriot de tal forma que a matemática cartesiana seria um subproduto da álgebra pura de Harriot. O mesmo resume seu ataque com uma lista de inovações em álgebra que deveriam ser atribuídas a Harriot, com diversos pontos no mínimo, controversos e alguns outros claramente falsos. De qualquer maneira, a retórica de Wallis garantiu-lhe partidários de sua versão, esquentando ainda mais as animosidades no círculo científico internacional, numa época em que o progresso científico era motivo de orgulho nacional, tal versão se tornou a mais comumente aceita (Stedall, 2010).[1]

A reconstrução do Harriot original

No livro *A Grande Invenção da Álgebra* [2], Stedall organizou o trabalho de Harriot em sua forma original, compilando cerca de 140 páginas de seus manuscritos seguindo a descrição do trabalho contida em uma carta de protesto de Nathaniel Torporley, intitulada *Corrector analyticus artis posthumae Thomae Harrioti* [3]. No texto em questão é deixado claro que o *Artis analyticae praxis*, livro póstumo publicado em 1631 por Walter Warner, um outro companheiro de Harriot, "perverte completamente" o tratado original, de tal

[1] Agradecemos a Jackie Stedall por nos fornecer o texto de sua palestra. O texto foi recentemente publicado como: Jackie Stedall. John Wallis and the French: his quarrels with Fermat, Pascal, Dulaurens, and Descartes. *Historia Mathematica, Volume 39, Issue 3, August 2012, 265-279.*
[2] *The great invention of Algebra*, sem tradução para português.
[3] Uma correção analítica do trabalho póstumo de Thomas Harriot.

forma, que não seria possível entender completamente as concepções contidas na álgebra de Harriot.

O tratado reescrito por Stedall, pesquisadora inglesa em história da matemática, é renomeado como "Tratado sobre equações", redigido pela primeira vez em sua forma original em 2003. O texto original não é datado, mas provavelmente foi escrito próximo ao ano 1600, visto que algumas seções provém do *De potestatum resolutione* [Viéte, 1600], embora outras seções devam ter sido escritas bem antes. Stedall atribui a este novo texto uma grande importância, de certa maneira, em detrimento da versão editada por Warner. Nesta nova versão, seria possível enxergar as verdadeiras concepções de Harriot sobre álgebra, incluindo sua manipulação pioneira das raízes negativas e imaginárias, excluídas por Warner. O texto publicado em 2003, no entanto, não é idêntico aos manuscritos e sofreu algumas "modernizações" por parte da autora, por exemplo no que tange à notação das raízes.

Notamos na figura abaixo a notação moderna de raízes cúbicas na reconstrução de Stedall:

$$e = \sqrt[3]{ccc + \sqrt{cccccc - bbbbbb}}$$

Figura 1

A notação de Harriot seria

$$\sqrt{C.\,ccc + \sqrt{:\,cccccc - bbbbbb}}$$

Figura 2

Enquanto Wallis ainda utilizou a abreviação "C." para "cúbica" e ":" como abreviação para "quadrada", Stedall substitui as abreviações pelos sinais atuais, indicando a natureza de raízes.

O objetivo deste artigo é reavaliar partes da versão reconstruída comparando-a com a versão de Warner sob a ótica da atual historiografia da álgebra.

O contexto do desenvolvimento da álgebra

O começo de um desenvolvimento genuíno da álgebra se situa somente na Europa do século XVI. A atividade matemática dos gregos concentrou-se na geometria. Foram os árabes que transformaram partes da herança grega em estudo de equações e nas suas resoluções. Sabe-se que a prática algébrica dos árabes foi totalmente retórica, ou seja, exprimindo todo o processo matemático por palavras, sem um uso de símbolos ou sinais – ao menos nas regiões tradicionalmente estudadas pela historiografia. Na verdade, pesquisas recentes mostraram a introdução e o uso de simbologia por matemáticos no Magrebe desde o século XIII e que houveram transmissões destas novas práticas para Europa (Abdeljaouad 2002; Schubring 2008).

O matemático europeu mais importante cujo trabalho estendeu as práticas dos árabes e o uso de símbolos para constituir uma álgebra foi o francês François Viète. Ele continuou utilizar conceitos da geometria: suas razões e proporções (de origem grega) concordavam com números e grandezas como conceitos básicos de álgebra, continuando por exemplo, a entender a multiplicação como uma operação ligada com dimensões espaciais e não puramente numéricas.

De Viète se derivam duas vertentes e tendências no desenvolvimento da álgebra: por um lado René Descartes (1596-1650) que criou as bases para utilizar a álgebra na geometria, e por outro lado a vertente britânica, que radicalizou o uso de símbolos e álgebra pura, independente de conceitos geométricos, tendo Thomas Harriot seu maior representante.

Abordagens e resultados de Harriot

A notação de Harriot difere bastante da elaborada por Viète e é essencial para sua nova compreensão das equações. Sua maior inovação é, sem dúvida, utilizar *ab* para o produto de *a* por *b* e, consequentemente, *aa* para o que denotamos a^2, *aaa* para a^3, etc.
Harriot utilizava vogais para as suas variáveis (especialmente *a* , *e*) e consoantes para suas constantes, sem no entanto fazer nenhuma distinção quanto ao status - o qual hoje em dia diferenciamos dentre variáveis, indeterminadas ou coeficientes de cada uma. Este uso de notação foi algo completamente inovador na época.

Quase todos os livros e textos de álgebra do século XVI se restringiam a equações lineares ou quadráticas com apenas uma indeterminada, que podiam ser tratadas com poucos símbolos para raízes e quadrados.

Viète dá o próximo passo importante na *Isagoge*, embora escrevendo as potências verbalmente. Harriot mantém o uso das vogais para simbolizar as quantidades desconhecidas, mas as usa em minúsculas, e representa as potências pela multiplicação iterada. Embora tediosa de se escrever, essa notação muitas vezes exibe a estrutura matemática de forma mais clara que a nossa notação atual (aos menos para os estudantes do ensino básico). Isso se encaixa perfeitamente com a intenção de Harriot de explorar as equações em termos de seus coeficientes.

Para denotar a igualdade assumiu uma variação do sinal = introduzido por Robert Recorde (1510-1558) no *The whetstone of witte* de 1557. Nos seus manuscritos, o símbolo aparece com duas barras verticais entre as barras horizontais, mas essas duas barras desapareceram quando partes de sua álgebra foram publicadas. Introduziu os sinais < para 'menor de' e > para 'maior de', estes contendo duas barras verticais na extremidade aberta. Utilizava os três símbolos tanto na horizontal quanto na vertical conforme a situação demandava. Representava os parênteses por um ponto, como na identidade:

$$b- .c-d = b-c+d \text{ (com o sinal de igualdade atual)}$$

Entretanto, ele também utilizava o ponto para denotar a multiplicação entre um número e uma letra, como *2.a*. Multiplicações de quantidades compostas (binômios) eram mostradas dentro de um colchete em forma de um ângulo reto, e com os passos seguindo exatamente a extensa multiplicação da Aritmética. A divisão era representada da forma usual, em frações. Além dos, à época de Harriot, já praticamente universais símbolos + e – para, respectivamente, a adição e subtração.[4] ele introduziu dois novos símbolos: $\pm$ e $\mp$ para denotar possibilidades alternativas. Esta inovação permitiu que manipulasse duas, ou até quatro equações simultaneamente, economia útil quando cada possibilidade tinha que ser tratada separadamente.

Vale citar brevemente a estrutura do tratado original de Harriot, segundo Torporley: a introdução (Operações aritméticas em letras) compõe-se de 4 páginas que visam explicar sua notação, cujos exemplos das duas primeiras páginas são próprios e os da terceira página (sobre divisão) foram retirados da *Isagoge.* Na quarta página, Harriot volta-se para regras padrão para simplificar equações: permutar termos entre os lados de uma igualdade, reduzir o coeficiente líder a 1 e dividir as potências excessivas da indeterminada (*anthitesis, hypobibasmus, parabolismus*), seguindo tanto a nomenclatura quanto os exemplos de Viète (Stedall, 2003).

Seguem-se seis seções: as três primeiras seções versam sobre as soluções numéricas de equações e se baseiam no tratado prático de Viète (com contribuições de Harriot), a quarta seção revela a estrutura multiplicativa dos polinômios e as duas últimas um tratamento sistemático das equações de terceiro e quarto graus. De especial interesse é o conteúdo da quarta seção, na qual Harriot mostra a possibilidade de se escrever equações de grau elevado como produtos de fatores de graus inferiores (o que chamamos hoje de fatoração), diferentemente de Viète, que tratava essas equações em termos de razões.

Na terceira seção, Harriot mostra as soluções de algumas “equações canônicas” como $bc = ba+ ca - aa$ e suas soluções $a = b$ e $a = c$. Já na seção seguinte, evidenciou como estas equações canônicas surgem. Partindo do produto $(a\text{-}b)\ (a\text{-}c)$, sendo a a indeterminada usual, ele constrói uma série de equações quadráticas, cúbicas, quárticas e as iguala a zero.

Essa discussão sistemática esclarece a relação entre raízes e coeficientes de uma equação, especialmente no formato adotado pelo autor, que agrupava verticalmente os termos de mesmo grau. Harriot percebeu quais condições sobre as raízes fariam uma ou mais potências de uma equação se cancelarem.

Reavaliação mútua da "tríade": Harriot/Torporley - Warner – Wallis

As equações de grau três tomam um grande espaço no trabalho de Harriot e sua análise é muito útil para observar o ponto controverso entre as diferentes versões atribuídas ao mesmo. É de conhecimento geral que ao procurar fórmulas para solução de tais equações baseadas em seus coeficientes, invariavelmente os matemáticos precisaram lidar com raízes complexas. Sendo assim, é pertinente observar como os diferentes autores constroem uma explicação própria para obtenção de Harriot destas fórmulas e sua discussão sobre as raízes

[4] Cardano, no entanto, utilizou sempre as abreviações ‘p’ para ‘plus’ e ‘m’ para ‘menos’ – revelando então a etapa sincópica.

complexas. Harriot prossegue com a divisão em diversos casos e o caso XIII é de especial interesse. Segundo Harriot (Stedall, 2003, p. 194) a equação proposta é:

$$2ccc = -3bba + aaa$$

No Harriot original, o caso canônico para encontrar as raízes é:

$$qqq + rrr = -3qra + aaa^{5} \;\; ; \;\; a = q + r$$

Neste caso a é a variável e b, c, q, r são constantes.

A forma canônica é obtida elevando ambos os lados da relação $a = q + r$ ao cubo e notando que os termos: $-3raa + 3rra = 3ra[-a + r] = -3qra$. Esta canônica também pode ser obtida do mesmo processo aplicado ao caso XI mostrado na versão de Wallis (Wallis, 1685, p.172). A apresentação original mostra-se confusa, com diversas maneiras equivalentes de chegar ao mesmo resultado, todas girando em torno da mesma ideía: a comparação com a forma canônica escolhida. Harriot apresenta quatro maneiras com substituições de variáveis diferentes para obter a fórmula desejada. Transcrevemos agora a primeira solução e faremos acréscimos nas notas para facilitar a compreensão:

$e = r$ e portanto[6], $\frac{bb}{e} = q$

Então[7]: $\frac{bbbbbb}{eee} + eee = 2ccc$

E: $bbbbbb + eeeeee = 2ccceee$

Então: $bbbbbb - 2ccceee = eeeeee$

[adicione] $cccccc$ [à ambos os lados]

Então: $eeeeee - 2ccceee + cccccc = cccccc - bbbbbb$

1) $eee - ccc = \sqrt{cccccc - bbbbbb}$

$eee = ccc + \sqrt{cccccc - bbbbbb}$

$e = \sqrt[3]{ccc + \sqrt{cccccc - bbbbbb}}$

2) $ccc - eee = \sqrt{cccccc - bbbbbb}$

$ccc - \sqrt{cccccc - bbbbbb} = eee$

$e = \sqrt[3]{ccc - \sqrt{cccccc - bbbbbb}}$.[8]

---

[5] Em notação moderna é equivalente à : $x^3 + ax = b = 0$ cuja solução segundo Cardano é: $\sqrt[3]{\frac{-b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$ sendo $\Delta = \frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}$ o discriminante da cúbica. Se $\Delta > 0$ temos 3 raízes reais, $\Delta = 0$ ou $\Delta < 0$ uma raiz real e duas complexas.

[6] pois $bb = qr$

[7] elevando ambas as relações ao cubo e somando, temos: $eee + \frac{bbbbbb}{eee} = rrr + qqq = 2ccc$

[8] Aqui fizemos uma correção no sinal dentro da raiz cúbica, que no livro era +.

Conclui que existem três casos para esta cúbica conforme $c > b$ (caso hiperbólico), $c < b$ (caso elíptico) ou $c = b$ (caso parabólico).

Para cada caso, aponta uma canônica diferente (Stedall 2003, p.189):

Hiperbólico:	$2ccc = -3bba + aaa\ ;\ a = q + r$
Elíptico:	$qqr + qrr = -qqa - qra - rra + aaa\ ;\ a = q + r$
Parabólico:	$2qqq = -3qqa + aaa;\ a = 2q$

Veremos agora como Warner apresenta a mesma proposição (Praxis, p. 81, Proposição 2)[9]: "A equação ordinária $aaa - 3bba = +2ccc$, na qual $c < b$, é explicável em termos de uma raíz simples.

Demonstração:

A equação proposta tem o mesmo grau e é similarmente afetada que a canônica:

$$aaa - qqa - qra - rra = +qqr + qrr.$$

E (pelo lema 5) é verdade na equação canônica que:

$$\frac{(qqr+qrr)(qqr+qrr)}{4} < \frac{(qq+qr+rr)(qq+qr+rr)(qq+qr+rr)}{27}$$

E na equação proposta na qual é suposto que $c < b$ é verdade que:

$$cccccc < bbbbbb$$

Portanto o coeficiente e o homogêneo dados na equação proposta estão conforme o coeficiente e o homogêneo da equação canônica em relação de desigualdade. De acordo (com a definição) a equação proposta e a canônica são eqüipolentes (ou seja, possuem o mesmo número de raízes). Mas (pela proposição 7 da seção 4) a equação canônica é explicável em termos de uma raiz simples $q + r$. Consequentemente a equação proposta é explicável em termos de uma raiz simples, como afirmado na proposição."[10]

Warner conclui que as equações são eqüipolentes, logo a equação proposta possui duas raízes positivas q e r como a canônica [prop.6 seção 4]

Assim, podemos afirmar, que Warner estava plenamente consciente da possibilidade de se obter raízes complexas excluindo-as como soluções, possivelmente com a intenção de aproximar o texto da tradição matemática de Viète.

---

[9] Seltman & Goulding 2007, p.100.

[10] Seltman & Goulding, 2007, p. 98,. Tradução nossa.

Este caso de solução de uma equação de terceiro grau apresenta um exemplo revelador para comparar os dois textos: de Harriot (original) e Harriot (na versão de Warner). Nota-se que os escritos de Harriot não constituem um texto elaborado, (para fins de ensino e de estudo, por exemplo) mas que foram na verdade documentos de trabalho nas próprias pesquisas. Falta-lhe o elemento discursivo que é necessário para conseguir comunicar-se, no entanto, esta foi justamente a tarefa que Warner obrigou-se de realizar.

De fato, se deve constatar que ele conseguiu estabelecer um tal texto, providenciando a forma discursiva e expondo uma versão sistemática, explicando as condições do problema e estruturando uma seqüência de raciocínio, com proposições, lemas, etc. Wallis desenvolveu este estilo discursivo ainda mais perfeitamente no seu livro texto de álgebra.

No Tratado de álgebra (1685), Wallis não mostra como obter a forma canônica:

$$qqq + rrr = -3qra + aaa$$

e utiliza no entanto, na solução da cúbica XIII, a substituição de variáveis: $a = \frac{ee+bb}{e}$, chegando ao mesmo resultado de Harriot usando a noção geométrica de "proporções contínuas"[11]. No entanto, Wallis não discute como obter essa mudança de variável. Observando a versão de Stedall, Harriot mostra diversas maneiras de obter a cúbica, e a essência de todos os seus métodos é perceber que $bb = qr$ e $qqq + 2rrr = 2ccc$, comparando o discriminante da canônica com a equação pedida, embora apenas na terceira versão da variação da fórmula Harriot (Stedall, 2003, p.191) use explicitamente tal relação.

Harriot (Stedall, 2003, p.189) sugere as mudanças de variável: $e = r$ e portanto $\frac{bb}{e} = q$. Aparentemente o método de Wallis vem desta versão: Pois fazendo $e = r$ e $\frac{bb}{e} = q$ e notando que $a = q + r$ temos exatamente a substituição de Wallis.

Wallis claramente elaborou uma demonstração diferente de todas as de Harriot. Ele não discute os casos canônicos (hiperbólico, elíptico e parabólico) de forma distinta como na versão reconstruída de Stedall. Para analisar a natureza das raízes, obtém a fórmula da substituição indicada por Warner e analisa os sinais da diferença *cccccc* – *bbbbbb* na fórmula final. Novamente uma análise do "discriminante" *cccccc* – *bbbbbb* tem um papel central na discussão do problema.

[11] Uma proporção chama-se contínua se os termos centrais sao iguais: $a:b::b:c$.

Then, becauſe a is (by conſtruction) equal to $\frac{ee-bb}{e}$, or $e-\frac{bb}{e}$: To find the value of $\frac{bb}{e}$, he takes notice, that $eee.bbb.\frac{bbbbbb}{eee}$, are in continual proportion. As alſo their Cubick Roots, $e.b.\frac{bb}{e}$.

And thence proves, $\frac{bb}{e}=\sqrt{C.-ccc+\sqrt{:bbbbbb+cccccc}}$.

(For $+ccc+\sqrt{:bbbbbb+cccccc}$,
Multiplied into, $-ccc+\sqrt{:bbbbbb+cccccc}$,
Makes $bbbbbb$.

And therefore the former of them being equal to eee; the latter muſt be equal to $\frac{bbbbbb}{eee}$; (between which bbb, is a mean Proportional;) and therefore, the Cube Root thereof equal to $\frac{bb}{e}$.)

And therefore the value of $a\ (=e-\frac{bb}{e})=$

$$\sqrt{C.+ccc+\sqrt{:bbbbbb+cccccc}}.-\sqrt{C.-ccc+\sqrt{:bbbbbb+cccccc}}.$$

Figura 3

Mostra, através do exemplo, $aaa - 7a = 6$ que as fórmulas de Harriot (ou mesmo Cardano) oferecem como resultado quantidades envolvendo imaginários, elas podem ter raízes reais, neste caso, uma afirmativa e duas negativas. Logo, o problema é essencialmente como lidar com essas quantidades. Mais ainda, argumenta habilidosamente em favor de Harriot, com o objetivo de garantir-lhe algum crédito por obter tais fórmulas: "Não sei afirmar se Harriot conhecia ou não as regras de Cardano. Mas estivesse ou não familiarizado, elas são satisfatoriamente obtidas pelos seus próprios métodos, bem diferentes dos de Cardano, e assim demonstrados."[12]

A diferença no método de Harriot seria a técnica de "completar quadrados".

[12] "Whether or no Harriot was aware of these rules of Cardan I do not find. But (whether he were or no) they were well enough derived from his own methods (very different from those of Cardan) and from thence demonstrated. (Wallis 1685, p.173) "

XIII. The Equation, $aaa - 3bba = + 2ccc$:

He diſtinguiſheth into Three Caſes: According as c is Greater or Equal, or Leſs than b.

1. If c be greater than b;

Then putting $a = \dfrac{ee + bb}{e}$; And conſequently,

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{+eeeeee + 3bbeeee + 3bbbbee + bbbbbb}{eee} = + aaa, \\ \dfrac{-3bbeeee - 3bbbbee}{eee} = -3bba \end{array}\right\} = + 2ccc.$$

It becomes $\qquad eeeeee + bbbbbb = + 2cceeee.$

That is, $\qquad eeeeee - 2ccceee = - bbbbbb.$

And therefore (adding $cccccc$ on both ſides, to compleat the Square,)

$$eeeeee - 2ccceee + cccccc = + cccccc - bbbbbb.$$

Or $\quad$ (b being leſs than c) putting $+ dddddd = + cccccc - bbbbbb$,

$$eeeeee - 2ccceee + cccccc = + dddddd.$$

And therefore its Root, $\qquad eee - ccc = ddd.$

That is, $\qquad eee = ccc + ddd.$

And $\quad e = \sqrt{C}.\, ccc + ddd$, or $\sqrt{C}.\, ccc + \sqrt{:}\, cccccc - bbbbbb.$

Then becauſe $eee.\, bbb.\, \dfrac{bbbbbb}{eee}$ are in continual proportion; as alſo $e.\, b.\, \dfrac{bb}{e}$.

Having found the value of eee (and bbb being known;) He proves, $\dfrac{bbbbbb}{eee}$ $= ccc - \sqrt{:}\, cccccc - bbbbbb: = ccc - ddd.$

And conſequently $\qquad a\left(= \dfrac{ee + bb}{e} = e + \dfrac{bb}{e}\right) =$

$$\sqrt{C.\, ccc + \sqrt{:\, cccccc - bbbbbb}} : + \sqrt{C.\, ccc - \sqrt{:\, cccccc - bbbbbb}}.$$

Or, $\qquad a = \sqrt{C.\, ccc + ddd}. + \sqrt{C.\, ccc - ddd}.$

Figura 4

Conclusão

A comparação com a versão de Warner mostra que, apesar das fortes críticas de Stedall (e de Torporley) e das partes excluídas, a apresentação do texto é muito mais discursiva, com a intenção de explicar o processo de obtenção das fórmulas. Warner tenta criar uma cadeia maior de proposições e lemas e a apresentação se dá aproximadamente dentro dos moldes dos elementos (de Euclides), talvez conferindo ao texto completamente simbólico de Harriot uma maior receptividade dentre seus leitores aristocráticos. Neste ponto, Warner destaca apenas as raízes positivas enfraquecendo, como Stedall tem apontado, o tratado original. A noção de ser "explicável[13]" mostra a relutância de Warner em incluir as raízes imaginárias e negativas. Na mesma porporção em que a noção de eqüipolência destaca uma idéia interessante: a análise de um discriminante para a equação cúbica de tal maneira que a natureza das raízes é exibida. No caso Warner discute se:

$$c^6 = \left(\frac{\textit{termo homogênio}}{2}\right)^2 \text{ é maior, menor ou igual ao} \left(\frac{\textit{coeficiente}}{3}\right)^3 = b^6$$

E assim fornece informações precisas sobre tal natureza que se revelaram produtivas no desenvolvimento posterior da álgebra. Segundo Tanner esta idéia foi recebida com entusiamo por Lagrange:

> *"Harriot me parait être proprement le premier qui ait démontré d'une manière directe et analytique que les equations du troisième degré sans second terme ne sauraient avoir leurs racines réelles à moins que le cube du tiers du coefficient du troisième terme, pris avec un signe contraire, ne soit plus grande que le carré de la moitié du dernier terme" (R. C. H. Tanner, Thomas Harriot as mathematician: a legacy of hearsay, part 2, Physis – Revista Internazionale di Storia della Scienza, 9, 1967, p. 283, apud. Seltman & Goulding, p.14 2007)*

Assim Lagrange implicou que a condição dada por Harriot era apenas necessária mas não suficiente. Ainda que as convicções pessoais de John Wallis o levassem a cometer distorções tanto históricas (de forma geral) quanto matemáticas (em favor do compatriota Thomas Harriot e em detrimento de René Descartes) seu tratado de álgebra contribuiu para que as idéias de Harriot sobre uma álgebra simbólica pudessem ser apreciadas por um público maior.

Bibliografia

ABDELJAOUAD, Mahdi. Le manuscrit mathématique de Djerba: Une pratique de symboles algébriques maghrébins en pleine maturité. Em *Actes du 7e Colloque Maghrébin sur l'Histoire dês Mathématiques Árabes, Juin 2002*, Marrakech: ENS Marrakech.

[13] Warner destaca as raízes positivas com o termo "explicable in terms of".

ALMEIDA, Marcel Augusto Rosa de. *O Tratado de Álgebra de John Wallis e suas Relações com a Álgebra Britânica*. Dissertação de Mestrado, UFRJ, 2010

SCHUBRING, Gert. Processes of Algebraization in the History of Mathematics: The Impact of Signs. Em *Semiotics in Mathematics Education. Epistemology, History, Classroom, and Culture*, orgs. L. Radford, G. Schubring & F. Seeger. Rotterdam: Sense Publishers, 2008, 139-155.

SELTMAN, Muriel & GOULDING, Robert, tradutores. *Thomas Harriot's artis analyticae praxis. An English Translation with Commentary*. New York: Springer, 2007.

STEDALL, Jackie. *The Greate Invention of Álgebra: Thomas Harriot's Treatise on Equations*. New York: Oxford University Press, 2003.

STEDALL, Jackie. John Wallis as controversialist: his quarrels with Fermat, Pascal, Dulaurens, and Descartes. Pre-print. Em: *Proceedings of the Conference: John Wallis as Correspondent and Controversialist*, Oxford, 12-14 de Abril, 2010.

VIÈTE, François. *De numerosa potestatum ad exegesim resolutione. Ex opere restitutae mathematicae analyseos, seu, Algebra nova*. David Le Clerc, 1600.

WALLIS, John. *A Treatise of Álgebra Both Historical and Practical: shewing The Original, Progress, and Advancement thereof, from time to time, and by what Steps it hath attained to the heighth at which now it is*. London, Oxford: printed by John Playford for Richard Davis, 1685.

Ilustrações - Figuras

Figura 1: Stedall, 2003, p.189

Figura 2: Wallis, 1685, p. 173

Figura 3: Wallis, Tratado de álgebra, 1685, p.172 – Solução de Harriot para uma cúbica segundo Wallis

Figura 4: Tratado de álgebra, 1685, p.173 – Solução de Harriot para a cúbica XIII segundo Wallis

Marcel A. R. de Almeida
Departamento de Matemática – UFRJ– Brasil
E-mail: Powerstrato@gmail.com

Gert Schubring
Departamento de Matemática – UFRJ– Brasil
Institut für Didaktik der Mathematik – Universität Bielefeld
E-mail: gert.schubring@uni-bielefeld.de