Anais do IX Seminário Nacional de História da Matemática
Edição Especial da Revista Brasileira de História da Matemática. Vol. 11, nº23 – páginas 7-14
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

INSTABILIDADE NO TRATAMENTO DE RAZÕES NO CONTEXTO DO DESENVOLVIMENTO DA MATEMÁTICA EUROPÉIA MEDIEVAL

Oscar João Abdounur
IME – USP – Brasil

Resumo

A produção de conhecimento matemático na Europa medieval baseou-se principalmente em textos de Boécio, fundamentados por sua vez em trabalhos de matemáticos gregos como Nicômaco e Euclides. Embora revelassem uma compreensão matemática limitada, tais textos foram os mais acessíveis e utilizados em séculos posteriores, ainda em uma época em que o desenvolvimento matemático na Europa era notavelmente menos expressivo, se comparado, por exemplo, com aquele manifesto pelas culturas chinesa, hindu e islâmica durante o mesmo período. Neste contexto, é importante destacar uma certa instabilidade estrutural no tratamento matemático do conceito de razão, fortemente presente em tratados envolvendo as artes liberais. Caracterizada por procedimentos não demarcados de forma clara no tratamento de razões – ora aritméticos, ora geométricos –, tal instabilidade possibilita compreender algumas contribuições latinas medievais e renascentistas relevantes para o processo que leva à conformação das teorias de razões em matemática.

Palavras-chave: teorias de razões, matemática medieval, instabilidade estrutural, tratamento de razões.

[INSTABILITY FOR THE TREATMENT OF RATIOS IN THE CONTEXT OF THE DEVELOPMENT OF THE MEDIEVAL EUROPEAN MATHEMATICS]

Abstract

The production of mathematical knowledge in medieval Europe was based mainly on texts of Boethius, based on works of Greek mathematicians such as Nicomachus and Euclid. Although these texts reveal a limited mathematical comprehension, they were the most accessible and used ones in the following centuries, even in a period in which the mathematical development in Europe was notably less expressive, if compared for example, with those manifested by Chinese, Hindu and Islamic cultures during the same period. In this context, it is important to emphasize a certain structural instability in the mathematical treatment of the concept of ratio, strongly present in treatises involving the liberal arts. Characterized by procedures not clearly demarked in the treatment of ratios – sometimes arithmetical, sometimes geometrical –, such an instability makes it possible to understand some medieval and Renaissance contributions in the Latin context for the process that lead to the conformation of theories of ratio in mathematics.

Keywords: theories of ratio, medieval mathematics, structural instability, treatment of ratios.

Introdução

A dinâmica relacionada à instabilidade no tratamento de razões no contexto do desenvolvimento da matemática européia medieval relaciona-se fortemente à emergência de uma teoria aritmética para razões na tradição latina medieval. Utiliza-se nesse contexto o termo aritmetização para designar o processo no qual o conceito de razão perdeu seu caráter puramente geométrico para assumir uma natureza essencialmente aritmética estruturalmente muito semelhante a primeira mas semanticamente distinta. Nesse contexto, tal conceito deixa, entre outros aspectos, de ser compreendido como uma comparação entre duas grandezas de mesma natureza para assumir o significado de um número; sua composição aproxima-se muito da idéia de multiplicação de números e a proporção entre razões tende a identificar-se com a idéia de igualdade entre números.

O conceito medieval de razão é herança tanto da tradição geométrica clássica grega como da tradição aritmética grega tardia; a primeira se origina e se desenvolve a partir da definição 5 do livro V da obra *Os Elementos* de Euclides sobre proporcionalidade de razões; ao passo que a segunda se manifesta por exemplo no problema transversal de Menelaus, bem como nas interpolações promovidas por Theon de Alexandria em *Os Elementos*. Interessantemente, a historiografia da matemática informa que Campanus em sua tradução latina de Euclides teria falhado em distinguir as duas tradições gregas, substituindo, por exemplo, a palavra razão por *denominatio*, que era supostamente equivalente a tratar razões como se fossem frações. No contexto das tradições para razões e da aritmetizacão de razões mencionadas acima, são seguramente relevantes questões que cercam tal decisão de Campanus, em particular, por que teria Campanus inserido definições da *Aritmetica* de Nemore na sua tradução de Euclides.

A tradução latina de Euclides por Campanus é geralmente considerada a principal fonte para a teoria de razões e proporções utilizada por Bradwardine e Oresme no século XIV. Assim, a teoria aritmética de razões determinada por seu tratamento na versão de Euclides por Campanus munida da terminologia medieval aritmética para razões fornece os fundamentos para compreensão na Idade Média tardia de razões principalmente em contextos matemáticos. Do ponto de vista historiográfico, dado o significado da tradução de Campanus, é importante que historiadores da matemática tenham em mãos tanto uma tradução confiável dos livros revelantes da edição de Campanus para Euclides como uma interpretação historicamente mais precisa desses livros. Até o momento, somente o livro V de Campanus foi traduzido para o inglês por Edward Grant em 1974 (GRANT,1974).

A tradução de *Os Elementos* por Campanus de Novara

Historiadores da matemática medieval tais como Murdoch vêm ressaltando que a teoria de razões do século XIV usou uma terminologia aritmética que não é derivada da teoria de razões geométrica do livro V de Euclides, mas sim de inúmeras fontes diferentes. Embora matemáticos medievais se remetam ao livro V de Euclides, que contém uma teoria de razões para grandezas, a definição dada na tradição medieval de Euclides, fortemente representada por Campanus, para proporcionalidade de razões não é a definição eudoxiana 5 do livro V, mas sim uma definição em termos de *denominatio* de razões, portanto não é mais uma definição para proporcionalidade entre razões, mas sim para igualdade de razões. Esse termo não está na versão de Heath para Euclides, mas apareceu dentre as definições do livro VII na tradição medieval euclidiana, como por exemplo, em uma tradução de Adelardo com comentários de Campanus. O livro VII, em sua forma original, não é congruente com grandezas contínuas, e portanto, com o tratamento de razões incomensuráveis. É justamente essa teoria aritmética de razões incorporada na versão de Campanus do livro VII e suplementada pela terminologia medieval aritmética para razão de *denominatio* que fornece a base para a compreensão medieval de razões. Em suma, o livro VII de Campanus fornece um programa com uma base terminológica e de definições completa para uma teoria de razões que torna o livro V redundante e que, embora não estritamente precisa de um ponto de vista euclidiana, pelo menos muniu os matemáticos medievais de um novo programa de pesquisa sobre o qual fazer matemática.

Entretanto, o uso da terminologia de *denominatio* teve certos efeitos colaterais, não apenas a identificação de razões com frações, que nas mãos de matemáticos posteriores, levou a revisão das restrições gregas ao *status* ontológico de razões incomensuráveis ou, anacronicamente falando, números irracionais.

Contexto medieval do conceito de razão: duas tradições

Antes de contextualizar o conceito medieval de razão, é importante caracterizar a idéia de composição de razões, focal na compreensão do processo de aritmetização mencionado. Utilizada com maior freqüência até o século XIV d.C., a composição de razões no estilo clássico grego significa que, para lidar com a razão composta de a:b com c:d, era necessário encontrar uma magnitude e tal que c:d :: b: e, de modo que a composição de a:b com c:d se tornava a de a:b com b:e, que resulta em a:e.

Como mencionado, o conceito medieval de razão é uma herança tanto da tradição geométrica clássica grega como da tradição aritmética grega tardia. A primeira é proveniente da definição 5 do livro V de Os Elementos de Euclides (HEATH, 1956, p.120), com caráter essencialmente geométrico. Evidências da tradição aritmética para razões parecem ocorrer pela primeira vez no problema transversal de Menelaus (c. 70-130), que compõe razões sem as restrições mencionadas acima ou seja como uma multiplicação, bem como com Theon de Alexandria (c.335-405) (GROSHOLZ, 1987), que inseriu interpolações na definição 5 do livro VI de Os Elementos (HEATH, 1956, p.189), distorcendo o sentido euclidiano genuíno de composição de razões ao aproximar a idéia de composição da de multiplicação.

Segundo Fowler, a transformação do conceito de razão estreitamente vinculado ao *logos* grego no período clássico com um vasto, mas definitivamente não aritmético, sentido expressando uma relação entre números ou magnitudes homogêneas – no caso, comprimentos, áreas, intervalos musicais etc – para um significado aritmético ocorreu não antes do século I a.C. com Heron, sendo tal processo ainda mais forte na Idade Média tardia (FOWLER, 1989). Tais transformações são bastante relevantes para a compreensão da emergência de uma teoria aritmética de razão, na medida em que suas características foram transmitidas para a Idade Média por Jordanus Nemorarius, Campanus de Novara e Roger Bacon (SYLLA, 1984).

As duas tradições mencionadas viriam a originar na Idade Média diversas tendências no tratamento de razões, caracterizadas, no dizer de Sylla (1984, p.11), essencialmente por duas delas: uma geométrica, associada à matemática téorica, música e física presente particularmente no "De proportionibus" de Bradwardine, na qual razão é uma comparação entre magnitudes de mesma natureza/entre números, categoricamente diferente de número; e composição de razões é um operador no qual o segundo termo da cada razão envolvida deve ser igual ao primeiro termo da razão consecutiva, de acordo com a maneira como razões são operadas na proposição 23 do livro VI de Os Elementos (HEATH, 1956, pag. 247); outra aritmética associada a cálculos práticos usando razões e com astronomia.

As tradicões anteriores relacionam-se e combinam-se curiosamente em contextos não somente matemáticos, mas em outros tais como musicais. Tanto a tendência geométrica como a aritmética estiveram freqüentemente presentes em textos matemáticos medievais envolvendo razões e algumas vezes curiosamente mescladas em um mesmo texto, seja no contexto de composição ou de multiplicação de razões (SYLLA, 1984), seja na definição de razão por teóricos medievais (DRAKE, 1973).

Ao examinar as duas tradições mencionadas, Sylla (1984) sugere que elas não abarcam todos os conceitos medievais e da Antigüidade para razões, nem ocorriam sempre separadas, mas mesclavam-se de modo frequente estranhamente, representando dois polos das maneiras nas quais razões e operações com razões poderiam ser tratadas.

Indeterminação nas teorias de razão

A partir das considerações anteriores, por um lado, o uso de razões em alguns contextos, tais como o musical, segue a tradição clássica muitas vezes amparada na autoridade pitagórica, ao passo que por outro, o século XIV intensifica o uso da tradição mais aritmética, gerando uma tensão entre tais teorias e consequentemente uma indeterminação concernente à teoria de razão preponderante na Idade Média, tensão essa que permanecerá até o século XVII. Diante disso, a teoria de música medieval poderia ainda ter contribuído para a natureza indefinida de razões matemáticas durante este período. Examinando a influência de Boécio no quadrívium, Peden conjectura a possibilidade de influxo de tal teoria em textos matemáticos medievais resultante da utilização de tal teoria pelos estudantes como suporte para exercícios matemáticos (PEDEN, 1994).

Esta suposta influência musical numa teoria mais ampla para razões poderia ter fortalecido o reestabelecimento do caráter musical em alguns textos matemáticos medievais envolvendo razões, reintroduzindo idéias platônico-pitagóricas em matemática e contribuindo portanto para a coexistência de tradições diferentes e mescladas no tratamento medieval de razões.

Por outro lado, a tradição aritmética resultante em parte da influência de Campanus tem repercussão na música teórica renascentista, na medida em que a tradução de Campanus serviu de fonte para teóricos musicais inovadores deste período tais como Erasmus Horicius, primeiro na Renascença a aplicar explicitamente geometria euclidiana à resolução de problemas em música teórica (PALISCA, 1995).

Tal situação traz em paralelo a semente de uma natureza contínua para razões em contextos musicais, semente essa propiciadora da emergência de uma concepção decisiva sem a qual a resolução de problemas cruciais da música teórica no século XVI tornar-se-ia impossível. Erasmus utilizou não somente a estrutura euclidiana, muito característica de sua obra *Musica*, mas principalmente a terminologia latina de Campanus (PALISCA, 1994, p.158), que inevitavelmente concede natureza aritmética para razão, colocando-a em um nível categório muito próximo do de número, como nunca havia sido o caso em contextos teórico-musicais.

No que concerne à matemática, a segunda metade do século XIV assistiu mudanças importantes nas mãos de Nicole Oresme, que empreendeu um estudo detalhado sobre razões em seu *Algorismus proportionum* e seu *De proportionibus proportionum*. Curiosamente dedicado ao músico teórico inovador Philippe de Vitry, Algorismus proportionum é a primeira tentativa sistemática conhecida para apresentar regras de uso da operação de multiplicação de razões envolvendo expoentes inteiros e fracionários (CURTZE, 1868). Significando um passo importante rumo à aritmetização das teorias para razão, esta obra apresenta uma tentativa de lidar com o que se poderia chamar expoentes irracionais.11 Nesse estudo detalhado de razões, Oresme coloca que razões de razões, equivalente estruturalmente a expoentes nas razões, são insuficintes para esgotar todos os números reais, em terminologia moderna. Oresme concebeu razões, ainda que sem rigor, como um verdadeiro continuum, afirmando que toda a razão é como uma quantidade contínua com respeito à divisão, ou seja, que se pode tomar qualquer 'parte' de qualquer razão dada.

O Algorismus proportionum e o De proportionibus proportionum representam evidências importantes do uso de razões com caráter aritmético e forneceram ferramentas essenciais para a compreensão de temperamentos envolvendo médias proporcionais em um período em que começam a surgir outros temperamentos além do pitagórico e até mesmo uma proposta de temperamento igual, que aparece em um dos 5 tratados sobre música teórica encontrado em um manuscrito anônimo do século XIV, datado em Paris, 12 de janeiro de 1375 (ELLSWORTH, 1974, p.445).

Entretanto, a influência do tratamento especial de Oresme de razões de razões em matemática é surpreendemente limitada (GRANT, 1966, p.69) e não parece manifestar-se significativamente antes do início do século XVI na Universidade de Paris com eruditos como George Lokert e o português Álvaro Thomas, este último aparentemente o único autor que demonstra amplo conhecimento e compreensão do tratado de Oresme (GRANT, 1966, p.71).12

Apesar da popularidade das teorias de razões tradicionais na Idade Média tardia assim como da influência limitada do tratamento de razões de Oresme em matemática até o início do século XVI, aproximadamente um século após Algorismus proportionum e De proportionibus proportionum, números irracionais e grandezas incomensuráveis surgiam em contextos musicais com Nicolas de Cusa, quando anteriormente, os sons produzidos por tais razões não eram considerados música.

Mudança de natureza nas razões em música teórica: a divisão geométrica do tom

No contexto de análise da emergência de uma teoria aritmética para razões no período medieval, é revelante considerar a necessidade de divisão geométrica do tom, na medida em que tal fato desencadeia uma mudança de natureza das razões em contextos teórico-musicais. Em princípio, as evidências sugerem que este fato ocorreu pela primeira vez com Nicolas de Cusa ao afirmar em seu Idiota de Mente publicado em 1450 que o meio tom resulta da média geométrica do tom inteiro sendo, portanto definido por um número irracional em terminologia atual. Nicolas foi provavelmente o primeiro no ocidente a formular matematicamente um conceito fundamental à compreensão do temperamento igual proposto nas obras dos músicos teóricos da alta Renascença tais como Faber Stapulensis e Franchino Gafurius publicadas meio século depois (GOLDMAN, 1989, p.308). O trabalho de Cusa influenciou ainda o teórico germânico e cossista Henricus Grammateus (Heinrich Schreyber) no seu Ayn new kunstlich Buech, considerado um manual essencial ao desenvolvimento do temperamento igual.

Faber Stapulensis demonstrou que a divisão em partes iguais de um intervalo epimórico - do tipo n:n+1 - , impossível por aritmética, poderia ser facilmente realizada através de geometria. Publicado em 1494, o Elementalia musica de Faber exibe pela primeira vez a construção geométrica correspondente ilustrando não apenas a divisão geométrica do tom sugerida por Cusa, mas ainda a divisão da quarta, da quinta e da oitava fazendo uso da média geométrica.

Apesar da tendência à divisão do tom e consequente introdução do uso da tradição aritmética em música, há exemplos no século XVI de teóricos musicais tais como Pedro Ciruelo, também teólogo e matemático na universidade de Alcalá de Henares, que utilizam a tradição geométrica. Em sua obra *Cursus quattuor mathematicarum artium liberalium*, publicada em 1516, Ciruelo apresenta a divisão do tom presente na obra de Faber, mas ao mesmo tempo, na parte de Geometria da obra mencionada, adota as terminologias *addere* e *coniungere* para expressar a composição de razões de acordo com a tradição musical mencionada acima, realizando curiosamente a subtração reciprocamente de acordo com a tradição clássica na sétima conclusão do livro III de geometria (CIRUELO, 1526). Representativa da permanência da tradição clássica ainda em meados do século XVI, essa operação corresponde modernamente a subtrair c:d de a:b e encontrar um termo intermediário m tal que m:b ::c:d, transformando portanto a tarefa original na subtração m:b de a:b :: (a:m)(m:b), o que resulta imediatamente em a:m, como uma extensão natural para a operação de composição de razões.

Considerações Finais

O presente texto procurou apresentar algumas reflexões sobre a instabilidade no tratamento de razões no contexto do desenvolvimento da matemática europeia medieval exibindo consequentemente evidências do complexo processo de aritmetização de razões nesse período. Nesse contexto, procurou-se evidenciar sinais da coexistência de tradições aritméticas e geométricas no tratamento de razões nesse período, bem como da forte tensão entre elas, caracterizando uma instabilidade e indeterminação nas estruturas associadas ao conceito de razão. Procurou-se ainda ressaltar o uso de razões em contextos musicais como um fator importante na permanência da tradição clássica e, portanto, da tensão mencionada, mas ao mesmo tempo desencadeador, através do problema da divisão do tom, do uso da tradição aritmética nesse mesmo contexto. A complexidade de tal processo se deu assim devido aos inúmeros fatores que polarizavam ora o uso de razões para a tradição clássica, ora para a tradição aritmética prolongando esse processo até praticamente o século XVII, quando conflitos entre essas duas tendências resultam no desaparecimento da primeira tradição concernente à composição e a consolidação de uma teoria aritmética de razões.

Bibliografia

CIRUELO, Pedro. *Cursus Quatuor Mathematicarum Artium Liberalium: Quas Recollegit Atque Correxit Magister Petro Ciruelus*. Alcalá:, 1526.

CURTZE, E.L.W.M. (ed.). *Der Algorismus Proportionum Des Nicolaus Oresme*. Berlin: S. Calvary & Co, 1868.

DRAKE, Stillman. “Medieval Ratio Theory Vs Compound Medicines in the Origins of Bradwardine's Rule.” *Isis*, 1973, 64, pp. 67-77.

ELLSWORTH, O. B. “A Fourteenth-Century Proposal for Equal Temperament.” *Medieval and Renaissance Studies*, 1974, 5, pp. 445-53.

FOWLER, D. “Logos (Ratio) and Analogon (Proportion) in Plato, Aristotle, and Euclid,” J. Petitot and R. Thom, *Archive for the History of Exact Sciences*. Genève: Ed. Patiño, 1989, 444-72.

GOLDMAN, David Paul. “Nicholas Cusanus Contribution to Music Theory.” *Rivista Internazionale di musica sacra*, 1989, 10/3-4, pp. 308-38.

GRANT, Edward. *A source book in medieval science*. Ann Arbor, Mich.: UMI, 1974

GRANT, Edward (Hrsg.); ORESME, Nicole. *“De Proportionibus Proportionem” and “Ad Pauca Respicientes”*. Madison, London: Univ. of Wisconsin Press, 1966.

GROSHOLZ, E. “Some Uses of Proportion in Newton's Principia, Book I: A Case Study in Applied Mathematics.” *Studies in history and philosophy of science*, 1987, 18, pp. 208-20.

HEATH, T.L. (ed.), Euclid. *The thirteen books of the Elements*. Vol.II. New York: Dover, 1956.

KATZ, Victor J. *A History of mathematics. An introduction*. New York: Harper-Collins College Publishers, 1993.
MURDOCH, J.E., “The medieval language of proportions,” in Crombie, A.C., Scientific change : historical studies in the intellectual, social and technical conditions for scientific discovery and technical invention, from antiquity to present. Symposium on the history of science, 9 - 15 july 1961, pp.237-271, 1963
PALISCA, Claude V. “The Musica of Erasmus of Höritz,” C. Palisca, *Studies in the History of Italian Music and Music Theory*. Oxford: Clarendon Press, 1994, 146-67.
PALISCA, Claude. “Horocius, Erasmus,” S. Sadie, *The New Grove Dictionary of Music and Musicians*. London: Macmillan, Music-dictionaries; Sadie, Stanley, 1995a, 696.
PEDEN, Alison M.. “‘De Semitone’: Some Medieval Exercises in Arithmetic.” *Studi Medievali*, 1994, 35, pp. 368-403.
SYLLA, Edith Dudley. “Compounding Ratios. Bradwardine, Oresme, and the First Edition of Newton's Principia,” In: Mendelsohn, E. Transformation and Tradition in the Sciences. Essays in Honor of I. Bernard Cohen. Cambridge: Cambridge University Press, pp.11-43, 1984.

Oscar João Abdounur
Instituto de Matemática e Estatística - Universidade de São Paulo

E-mail: abdounur@ime.usp.br