Revista Brasileira de História da Matemática
Especial nº 1 – Festschrift Ubiratan D'Ambrosio – (dezembro/2007)
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

ARTHUR CAYLEY, DIE GRUPPENTAFEL UND DER ABSTRAKTE GRUPPENBEGRIFF

Hans Wussing
Leipzig - Deutschland

Ein kleiner Gruß an den
verehrten Kollegen
Prof. Dr. Ubiratan D´Ambrosio
zu seinem 75. Geburtstag

Die Historiographie der Wissenschaften beschäftigt sich oft genug mit Prioritätsfragen, wenn verschiedenen Personen dieselbe Entdeckung, dasselbe Resultat zugeschrieben wird oder wenn der Anspruch von zwei oder mehreren Person selbst erhoben wird.
Eine „Abart" liegt vor, wenn dieselbe Person dasselbe Resultat zu verschiedenen Zeiten gewonnen oder bekannt gemacht hat, eine Person also nach ins Gewicht fallendem Zeitraum Dasselbe mehrfach vertreten hat.
Dies geschah, wie allgemein bekannt ist, mit den Publikationen von N. I. Lobatschewski (1772-1856) zur nichteuklidischen Geometrie: Ein erster Anlauf erfolgte 1826 im fernen Kasan, während die Verbindung zwischen seiner Person und der Denkmöglichkeit nichteuklidischer Geometrie erst in der Mitte des 19. Jahrhunderts akzeptiert wurde. Die Anerkenung der nichteuklidischen Geometrie konnte erst nach der Angabe von Modellen gegen Ende des Jahrhunderts erfolgen.

I

Ein ähnlich gelagerter Fall begegnet uns bei Arthur Cayley (1821-1885). Er unternahm im zeitlichen Abstand von rund einem Vierteljahrhundert zwei Vorstöße in Richtung auf einen abstrakten Gruppenbegriff, unter Benutzung des Hilfsmittels der Methode der Erzeugenden und der Gruppentafel. Die erste Arbeit von 1854 zeitigte keine erkennbare Wirkung; die zwei Arbeiten von 1878 trugen wesentlich zur Akzeptanz des allgemeinen abstrakten Gruppenbegriffes bei. Anders ausgedrückt: Das Jahr 1854 war für den abstrakten Gruppenbegriff gänzlich anders als die Situation 1878. Und dabei waren die jeweiligen Arbeiten inhaltlich in hohem Maße identisch.

Cayley gehört - das muss hier nicht auseinandergesetzt werden - zu den produktivsten Mathematikern des 19. Jahrhunderts. Wenden wir uns nun seinen spezifischen Beiträgen zur abstrakten Gruppenauffassung zu.
Wie aus einer 1849 erschienen Arbeit „*Note on the Theory of Permutations*" hervorgeht, hat Cayley spätestens um diese Zeit bewusst den Anschluss an die durch A. L. Cauchy (1789-1857) entwickelte Theorie der Permutationen vollzogen. Fünf Jahre später, 1854, übernahm Cayley das Wort Gruppe (*group)* unter ausdrücklichem Bezug auf E. Galois (1811-1832)[1]. Jedenfalls publizierte Cayley 1854 zwei gruppentheoretische Studien unter dem übergreifenden Titel „*On the Theory of Groups as Depending on the Symbolic Equation* $\theta^n = 1$." [A. Cayley: The Collected Mathematical Papers. Vol. 2. Cambridge 1889. p. 123-130]. [A. Cayley: The Collected Mathematical Papers. Vol. 2. p. 131-132]. Beide Studien betraten mathematisches Neuland.

II

Um diese Zeit begann die Galoissche Gleichungstheorie gerade erst bekannt zu werden; Gruppen wurden allerdings nur als Permutationsgruppen studiert. Cayley erkannte die Verallgemeinerungsfähigkeit der Begriffsbildung „Gruppe" und konnte diesem Begriff weitere Ausformungen zuordnen (Es ist wohl mehr als ein historischer Zufall, dass in eben demselben Jahr 1854 die Arbeit von G. Boole (1815-1864) erschien, *„An Investigation on the Laws of Thought, on which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities").*
Cayley ging - im Zusammenhang mit seiner umfassenden Theorie der Quantics - von einem allgemeinen Operationssymbol θ aus, das angewandt wird auf Größen x, y, ….. Dafür schreibt er θ (x, y, …) = (x´, y´, …).
Dabei sind die Größen x´, y´, … beliebige Funktionen der x, y, …., die hinsichtlich ihrer Anzahl nicht mit der Anzahl der x, y, … übereinstimmen müssen.
Er erläutert: Bei den Größen x´, y´, … kann es sich um Permutationen der x, y, … handeln aber auch um allgemeine Funktionen. $\theta = \Phi$ bedeutet die Äqivalenz zweier Operationen. $\theta\Phi$ bezeichnet die zusammengesetzte Operation (*compound operation)*, wobei im allgemeinen $\theta\Phi$ verschieden ist von $\Phi\theta$. Doch sollen die Operationen assoziativ sein.
(Auffällig ist diese seine Vorstellung von Verknüpfung mit der von L. Kronecker (1823-1891) im Jahre 1870, also später, in der Arbeit *„Auseinandersetzung einiger Eigenschaften der Klassenanzal idealer complexer Zahlen"* gegebenen Verknüpfung von nicht näher definierten abstrakten Elementen).
Cayley geht dann über zur Definition von Gruppe und führt gleich darauf die Gruppentafel ein und schildert deren Eigenschaften.

> „A set of symbols 1,α ,β , … , all of them different, and such that the product of any two of them (no matter in what order) , or the product of any one into itself,

[1] Fußnote von Cayley zu seiner ersten gruppentheoretischen Arbeit von 1854: *„The idea of a group as applied to permutations or substitutions is due to Galois, and the introduction of it may be considered as marking an epoch in the progress of the theory of algebraical equations.* [A. Cayley: The Collected Mathematical Papers. Vol. 2. Cambridge 1889. p. 124]

> belongs to the set, is said to be a group. It follows that if the entire is multiplied by any one of the symbols, either as further or nearer factor, the effect is simply to reproduce the group; or what is the thing, that if the symbols of the group are multiplied together so as to form a table thus:

Further factors

Nearer factors	1	α	β	…
1	1	α	β	…
α	α	α^2	$\beta\,\alpha$	
β	β	$\alpha\,\beta$	β^2	
⋮				

> that as well each line as each column of the square will contain all the symbols *1, α, β ,….* It also follows that the product of any number of the symbols, with or without repetitions, and in any order whatever, is a symbol of the group. [A. Cayley: The Collected Mathematical Papers. Vol. 2. Cambridge 1889. p. 124]

Es sei nicht weiter ausgeführt, dass Cayleys unmittelbares Ziel darin bestand, spezielle Gruppentafeln aufzustellen. Wesentlicher ist seine Einsicht, dass seinem Gruppenbegriff spezielle Kalküle untergeordnet werden können. Er erwähnt insbesondere die Multiplikation von Matrizen und die Theorie der Quaternionen von W. R. Hamilton (1805-1865), die seit 1853 in Großbritannien in den Vordergrund gerückt wude. Diesem Einfluss ist es wohl zu danken, dass Cayley ganz allgemein die Nichtkommutativität akzeptierte[2].
Doch: Wir haben zu konstatieren: Der von Cayley 1854 unternommene Vorstoß mit dem Ziel, den abstrakten Gruppenbegriff herauszuarbeiten, war historisch verfrüht. Weder waren die allgemeinen Voraussetzungen zur Anerkennung der abstrakten, d,i. der formalen Methode herangereift, noch lagen nach Meinung seiner Zeitgenossen Anreiz und Veranlassung vor, den Gruppenbegriff allgemein zu fassen, solange explizit nur Permutationsgruppen studiert wurden, sogar einschließlich innerhalb der Auflösungstheorie algebraischer Gleichungen. Cayleys Studien von 1854 haben daher auf die definitive Herausbildung des abstrakten Gruppenbegriffes keinen sofort wirksam werdenden Einfluss ausgeübt.

III

Anders dagegen steht es mit Cayleys Arbeiten aus dem Jahre 1878. Diese stellten - das Ergebnis vorweggenommen -- eine Art auslösendes Moment des bewusst vorgenommenen Abtraktionsprozesses dar, vollzogen 1882/83 durch W. von Dyck (1856-1934) in dessen

[2] Hamilton hat sich bekanntermaßen erst nach vergeblichen Versuchen davon überzeugt, dass die Multiplikation der Quaternionen nicht kommutativ ist, wenn man das distributive Gesetz als das wichtigere beibehalten will. [W. R. Hamilton: Lectures of Quaternions. Dublin 1853.

„Gruppentheoretischen Studien". Dort wurden - eine andere historische Entwicklungslinie - auch Transformationsgruppen unter den abstrakten Gruppenbegriff subsumiert.[3]

IV

Die Gründe liegen einerseits in einer tief greifenden Änderung im Gesamtbereich der Mathematik, nämlich in einem durchgreifenden Abstraktionsprozess mit dem Hervortreten struktureller Denkansätze, andererseits in dem historischen Tatbestand, dass der abstrakte Gruppenbegriff aus der schrittweisen Verschmelzung dreier Entwicklungslinien hervorging, aus der der Zahlentheorie, der Auflösungstheorie algebraischer Gleichungen und aus dem geometrischen Transformationsbegriff.[4]

Auf der zahlentheoretischen Seite finden wir zunächst die Theorie der Komposition der quadratischen Formen von C. F. Gauß (1777-1855) in dessen *„Disquisitiones arithmeticae"* von 1801. Gauß zeigte, modern gesprochen, dass bei der Komposition der quadratischen Formen (implizit) alle Gesetze der Verknüpfung bei endlichen Gruppen erfüllt sind, woran dann L. Kronecker (1813-1891) seinerseits 1870 mit der Formulierung eines Axiomensystems für endliche Gruppen anknüpfte, freilich, ohne das Wort „Gruppe" zu benutzen.

Zu dieser Tendenz umfassender Abstraktion gehört auch die von G. F. Frobenius (1849-1917) und L. Stickelberger (1850-1936) gemeinsam verfasste und 1879 erschienene Arbeit *„Ueber Gruppen von vertauschbaren Elementen"*.[5] Die Autoren beziehen sich auf die Theorie der Potenzreste bei L. Euler (1707-1783) und bei Gauß, auf die Auflösung algebraischer Gleichungen bei J. L. Lagrange (1736-1813) und N. H. Abel (1802-1829) und schließlich auf die Komposition quadratischer Formen bei Gauß, auf E. Schering (1833-1897) und auf Kronecker. Hieraus leiten die Autoren die Fragestellung nach dem von uns heute als Basissatz bezeichneten Satz der (endlichen) abelschen Gruppen ab. Auch wird sogar auf die Existenz unendlicher Gruppen hingewiesen.

V

Der fruchtbare Einfluss Kroneckers tritt auch in dem von seinem Schüler E. Netto (1846-1919) im Jahre 1882 verfassten Lehrbuch *„Substitutionentheorie und ihre Anwendung auf die Algebra"* zutage. Inzwischen war die Theorie der Permutationsgruppen bereits klassisch geworden; „Gruppe" bedeutet bei Netto schlechthin Permutationsgruppe. Andererseits aber erkannte Netto die Leistungsfähigkeit verallgemeinerter Begriffe:

> Es ist unzweifelhaft, dass der Kreis der Anwendungen eines Algorithmus sich ausdehnen wird, wenn es gelingt, die Grundlagen und den Aufbau derselben von allen nicht unbedingt geforderten Voraussetzungen zu befreien, und ihm durch die Allgemeinheit der Objekte, mit denen er arbeitet, auch die Möglichkeit des

[3] [W. von Dyck: Gruppentheoretische Studien. In: Mathematische Annalen 20 (1882). S. 1-44. – Gruppentheoretische Studien. II. Über die Zusammensetzung einer Gruppe discreter Operationen, über ihre Primitivität und Transitivität. In: Mathematische Annalen 22 (1883). S. 70-108]

[4] H. Wußing: Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes. Berlin 1969. Übersetzung ins Amerikanische. The MIT Press 1984

[5] G. Frobenius/ L. Stickelberger: Ueber Gruppen von vertauschbaren Elementen. In: Crelles Journal 86 (1879). S. 217-262

> Eingreifens in die verschiedensten Gebiete zu geben. Dass die Theorie der Gruppenbildung eine solche Darstellung zulässt, spricht für ihre Bedeutung und ihre Zukunft. [E. Netto: Die Substitutionentheorie und ihre Anwendung auf die Algebra. Leipzig 1882. S. III]

Ebenfalls im Jahre 1882 hat H. Weber (1882-1913), wiederum unter Anknüpfung an Gauß und Kronecker, das von Kronecker aufgestellte Axiomensystem gruppentheoretisch interpretiert. Doch damals wurden Transformationsgruppen von ihm noch nicht unter den Gruppenbegriff subsumiert.

Damals, 1882, wirkte eine andere Richtung, die Ausdehnung des Gruppenbegriffes auf Transformationsgruppen - fast möchte man sagen - sozusagen noch im Verborgenen. Dies aufgedeckt zu haben ist die Leistung von F. Klein (1849-1925) und S. Lie (1842-1899): Das sog. Erlanger Programm, 1872, lieferte eine gruppentheoretische Klassifikation des Gesamtgebäudes der Geometrie. Den schwierigen Weg der Ausdehnung des Gruppenbegriffes von diskreten auf kontinuierliche Gruppen und eine erste Klassifizierung der Transformationsgruppen leistete S. Lie. Ihm verdankt man die wesentliche Feststellung, dass für unendliche Gruppen die Existenz des inversen Elementes axiomatisch festgelegt werden muss.

VI

In diesem Spannungsfeld von wenigstens teilweise vollzogenen Abstraktionen erschienen 1878 gruppentheoretisch orientierte Arbeiten von Cayley[6], die, anders als 1854, direkt und ursächlich die Herausarbeitung des umfassenden abstrakten Gruppenbegriffes unterstützten. Dort bezog sich Cayley auf zahlreiche, jüngst erschienene Publikationen zur Theorie der Substitutionen und damit zusammenhängende Gruppen. Aber, so Cayley, nur wenig sei getan worden für die Lösung des allgemeinen Problems der Gruppen. *„Substitutions, and (in connection) therewith groups, have been a good deal studied; but only a little has been done towards the solution of the general problems of groups."* [A. Cayley: The Collected Mathematical Papers. Vol. 10. Cambridge 1896. p. 401]

Cayley geht aus von Funktionssymbolen $1, \alpha, \beta, \ldots$, die auf eine und dieselbe Anzahl von Buchstaben angewandt werden und deren Ergebnis dieselbe Anzahl von Funktionen dieser Buchstaben ist. Er geht also ganz allgemein von Abbildungen einer endlichen Menge auf sich aus. Diese Operationen sind der Wiederholung und Zusammensetzung fähig, sind im allgemeinen nicht kommutativ, aber stets assoziativ und enthalten eine Einheit als dasjenige Funktionssymbol, welches die Ziffern festhält. Die Funktionssymbole <u>können</u> Substitutionen sein, aber er betont die abstrakte Auffassung und stellt fest: Eine Gruppe wird definiert mittels der Gesetze der Kombination der Symbole: Ein Gruppe wird etabliert durch definierende Relationen zwischen den Symbolen: *„A set of symbols $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, such that the product of each two of them (in each order, $\alpha\beta$ or $\beta\alpha$), is a symbol of the set, is a group….A group is defined by means of the laws of combination of its symbols."* [A. Cayley: The Collected Mathematical Papers. Vol. 10. p. 402]

---

[6] Es handelt sich um folgende Arbeiten: A Theorem on Groups. In: A. Cayley: The Collected Mathematical Papers. Vol. 10. Cambridge 1896. p. 149-152. – On the Theory of Groups. A. a. O. p. 324-350. – The Theory of Groups. Graphical Representation. A. a. O. p. 403-405.- Die erste Arbeit erschien in den Mathematischen Annalen, war also der deutschsprachigen Leserschaft direct zugänglich.

Ersichtlich hatte Cayley nur endliche Gruppen vor Augen. Daraus ergibt sich die Aufgabe, sämtliche Gruppen einer vorgegebenen Ordnung aufzustellen; nach dem Satz von Cayley lassen sich bekanntlich alle endlichen Gruppen als Permutationsgruppen darstellen. Zum Beweis benutzte Cayley die schon 1854 angegebene Methode der Gruppentafel. [A. Cayley: The Collected Mathematical Papers. Vol. 10. p. 403].

VII

Damit reihte sich Cayley ein in den Prozess der endgültigen Herausarbeitung des umfassenden abstrakten Gruppenbegriffes. Blicken wir beispielsweise auf W. von Dyck (1856-1934) und auf die Jahre 1882/83, in denen dieser zwei Arbeiten unter dem übergreifenden Titel *„Gruppentheoretische Studien“* veröffentlichte: [W. von Dyck: Gruppentheoretische Studien. In: Mathematische Annalen 20(1882). S. 1-44. – Gruppentheoretische Studien. II. Über die Zusammensetzung einer Gruppe discreter Operationen, über ihre Primitivität und Transitivität. In: Mathematische Annalen 22 (1883). S. 70-108]

Diese beiden Arbeiten würden wegen der dort vollzogenen endgültigen Herausbildung des abstrakten Gruppenbegriffes eine eingehende Analyse verdienen; dies ist jedoch nicht das Ziel dieser Ausführungen.

Nur eine Passage zum Beleg: Von Dyck ordnet „Gruppe“, in ihrer abstakten Fassung, in das Gesamtgebiet der Algebra ein:

> Indem wir … die gruppentheoretischen Operationen rein formal auffassen, zeigt sich deutlich ihre Stellung in einer formalen Entwicklung analytischer Operationen überhaupt. Es sind Multiplicationsoperationen, welche das assoziative, nicht aber das commutative Princip verfolgen. Dabei wird diesen Operationen durch gewisse Multiplicationsregeln … der Character eines speciellen Operationskreises ertheilt, der eine unendliche oder auch eine endliche Gruppe von Operationen umfasst. [W. von Dyck: Gruppentheoretische Studien. 1882. S.2]

Von Dyck zeichnet sich im zu untersuchenden Zusammenhang auch dadurch aus, dass er auf seine geistigen Quellen verweist und so die von ihm vertretene Auffassung begründet. Zwei Aspekte seien hervorgehoben:

Die Einbeziehung auch der (diskreten) Transformationsgrupen in den abstrakten Gruppenbegriff geht zurück auf seine enge Bindung an F. Klein. Von Dyck hatte 1879 bei ihm promoviert und war von Sommer 1871 bis zum Winter 1883/84 - also auch während der entscheidenden Jahre 1882/83 - in Leipzig Assistent bei Klein.

Die Arbeiten Cayleys dürfen geradezu als auslösendes Moment für von Dycks Hinwendung zum abstrakten Gruppenbegriff verstanden werden. Der Einfluss war so stark, dass er Cayleys Gruppendefinition mittels definierender Relationen zum Motto seiner eigenen Arbeit wählte. Auch in der Durchführung zeigt er sich von Cayley (1878) geprägt. Von Dycks allgemeine Fragestellung fordert *„eine Gruppe von discreten Operationen, welche auf ein gewisses Object angewandt werden, zu definiren, wenn man dabei von einer speciellen Darstellungsform der einzelnen Operationen absieht, diese vielmehr nur nach den zur Gruppenbildung wesentlichen Eigenschaften voraussetzt.“* [W. von Dyck: a.a. O., S.1]

Die von von Dyck erzielten tiefliegenden Ergebnisse sind hier nicht Gegenstand der Untersuchung. Nur so viel: Von Dyck bildet (in unserer Sprechweise) die durch abstrakte Elemente A_1, A_2 ,… erzeugte freie Gruppe. Jede Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden ist Faktorgruppe einer freien Gruppe endlichen Ranges.

VIII

Es kam in dieser kleinen Studie darauf an, in einem speziellen Fall jene eigentümliche Form eines Prioritätsproblems bei ein und derselben Person zu verdeutlichen.

Hans Wussing
Braunschweiger Strasse, 39
D-04157 Leipzig
Deutschland