Revista Brasileira de História da Matemática
Especial nº 1 – Festschrift Ubiratan D'Ambrosio – (dezembro/2007)
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

ÉTUDE HISTORIQUE DES PREMIERES CARACTERISATIONS DES CONIQUES

Vincenzo Bongiovanni
PUC – SP - Brasil

Introduction

Notre recherche concerne une notion mathématique qui a eu une place privilégiée dans le savoir mathématique: les coniques. En effet, les différents points de vue adoptés sur les coniques tout le long du développement de la géométrie ont servi à mettre à l'épreuve de nouvelles méthodes mathématiques.

L'étude commence par des questions que nous nous sommes posées en relation aux caractérisations des coniques : quelles furent les premières propriétés définissant les coniques et à quel moment passent-elles au statut de caractérisation ? En particulier, à quel moment les propriétés bifocales et les propriétés foyer/directrice deviennent-elles des définitions ? Quelle est l'origine des mots ellipse, parabole, hyperbole, foyers, directrice, latus rectum, paramètre, asymptotes et excentricité ? A quel moment de l'histoire, les coniques sont-elles traitées seulement dans le plan et sans référence au cône ? Et a quel moment elles sont traitées comme lieux géométriques ?

Nous attendons que ces questions nous conduisent à une compréhension plus claire des différentes définitions des coniques en mathématiques.

L'étude commencera par le monde grec suivi du monde arabe et s'étendera jusqu'au XVII siècle.

Sources consultées

Pour reconstruire le chemin des premières caractérisations des coniques on s'appuiera autant que possible sur des sources primaires. Les traductions, en général, sont faites en langage moderne. Cette simplification éclaire sans doute le lecteur, mais en même temps lui cache la possibilité de connaître les réelles difficultés qui émergent quand on se replace à l'époque de l'auteur. L'origine des coniques est encore un problème obscur pour les historiens. Nous n'avons que des commentaires et des interprétations postérieures à cette découverte. Pour l'analyse de la période grecque nous nous sommes appuyés sur les ouvrages suivants:

- «Sections Coniques» d'Apollonius (Traduction de Paul Ver Eecke,1963) ;
- «Recherches sur les *Coniques* d'Apollonius de Pergé et leurs commentateurs grecs» Micheline Decorps-Foulquier (2000)
- «Les catoptriciens Grecs» (Traduction de Roshdi Rashed,2000);
- «Diocles on burning mirrors» (Traduction de G.J. Toomer,1976);
- «La Collection» de Pappus (Traduction de Paul Ver Eecke,1982);

- «Le livre de la section du cylindre et le livre de la section du cône» de Serenus D'Antinoe (Traduction de Paul Ver Eecke,1969);
- Proclus de Lycie, «Les commentaires sur le premier livre des éléments d'Euclide» (Traduction de Paul Ver Eecke, 1948);
- «Commentaire d'Eutoce sur le Second Livre du Traité d'Archimède sur la Sphère et le Cylindre» (Traduction de Charles Mugler, 1971);
- «De la sphère et du cylindre» et «Sur les conoïdes et les sphéroïdes» d'Archimède (Traduction de Charles Mugler, 1971);

Pour la période arabe les ouvrages ayant servi de base sont:

- «Œuvres mathématiques, Algèbre et Géométrie au XII^{me}siècle», Al-Tusi, Sharaf al-Din (Traduction de Roshdi Rashed,1986);
- «Géométrie et dioptrique au X^{me} Siècle» Ibn Sahl, Al-Quhi et Ibn Al-Haytham (Traduction de Roshdi Rashed,1993);
- «Completion of the conics» Ibn al Haytham's Revised and slightly augmented version of Doctoral dissertation (J.P.Hogendijk,1985) ;
- «Al-Khayyam mathématicien» (Traduction R.Rashed et B.Vahabzadeh,1999);
- «Les mathématiques infinitésimales du IX^{e} au XI^{e} siècle», Volume 3, Ibn Al-Haytham (Traduction Roshdi Rashed, 2000*);*

Pour le XVII^{me} siècle nous avons consulté les ouvrages suivants:

- «*Introduction aux lieux plans et solides*» Œuvres de Fermat, Tome troisième (Traduction par M.Paul Tannery,1896);
- «De la dioptrique» Descartes, R. (1966)
- *«Brouillon projet d'une atteinte aux événemens des rencontres du cône avec un plan»* par Desargues (1988). (Textes publiés et commentés par René Taton);
- *«Elementa curvarum linearum, liber primus»* par Jan de Witt's (2000) (Text, translation, Introduction, and Commentary by Albert W. Grootendorst);
- *«Les fondements de l'optique moderne: Paralipomènes à Vitellion».* Par Kepler, J. (1980) (Traduction et notes par Catherine Chevalley);
- *«Nouvelle méthode en géométrie pour les sections des superficies coniques et cylindriques»* de Philippe De La Hire (1673)
- *«Nouveaux éléments des sections coniques, les lieux géométriques, la construction ou effection des équations»* de Philippe De La Hire (1679)
- *«Grand livre des sections coniques»* par Philippe De La Hire (1685). (Traduit par Jean Peyroux)

Pour le XVIII^{me} siècle nous avons consulté les ouvrages suivants:

- *«Traité Analytique des sections Coniques, et de leur usage pour la résolution des Équations dans les problèmes tant déterminés qu'indéterminés»* par le Marquis de L'Hôpital (publié à titre posthume en 1707).
- *«Introduction à l'analyse infinitésimale»* par Leonard Euler ; traduite du latin en français, avec des notes par J.B.Labey ; tome second, imprimé en 1797;

Pour le XIX^{me} siècle nous n'avons consulté que le mémoire de Dandelin

- *Nouveaux mémoires de l'Académie de Bruxelles* (1822)

La période grecque

L'histoire des coniques dans la période grecque, sera découpée en trois parties: La période pré-apollonienne caractérisée par Menechme, Aristée, Euclide et Archimède. La période classique avec l'œuvre magistrale d'Apollonius et la contribution de Dioclès sur les miroirs ardents. Finalement, la période des commentateurs grecs avec les ouvrages de Pappus, Serenus, Proclus, Anthémius de Tralles et Eutocius. Cette périodo sera abordée avec plus de détails puisqu'elle concerne la naissance des coniques en tant qu'objets géométriques.

La naissance des coniques

Le problème de la duplication du cube est au centre de l'origine des coniques. Eratosthènes (200 avant J.-C.) et Proclus (400 après J.-C.) citent Menechme comme l'inventeur des sections coniques. Eutocius dans son "Commentaire sur le Second Livre du Traité d'Archimède sur la Sphère et le Cylindre" le crédite des solutions du célèbre *problème des deux moyennes proportionnelles* à l'aide des coniques. C'est la première référence qu'on a sur les coniques. Ce problème est connu surtout à cause de son application au problème de la duplication du cube.
Le problème des deux moyennes proportionnelles, attribué à Hyppocrate, consiste à construire deux segments de longueurs x et y tels que $a/x=x/y=y/b$, à partir de deux segments de longueurs a et b. Un cas particuliers lié au problème de la duplication du cube est quand $b=2a$. Dans ce cas $a/x=x/y=y/2a$. Ce problème renvoie aux égalités suivantes :
$x^2 = ay$ et $y^2 = 2ax$ et la solution x du système est telle que $x^3 = 2a^3$. Dans la recherche d'une courbe satisfaisant la condition $y^2 = px$, expression écrite en langage moderne, Ménechme introduit la parabole. Cette nouvelle courbe, obtenue comme section d'un cône circulaire droit par un plan perpendiculaire à une génératrice, fut appelée à cette époque «*section du cône droit rectangle*» ou *«orthotome» et* plus tard nommée *«parabole»*. L'introduction de cette courbe a permis de donner une solution au problème de la duplication du cube. Selon un passage de Geminus, cité par Eutocius, au temps de Ménechme on engendrait le cône par la rotation d'un triangle rectangle autour d'un des côtés de l'angle droit. Il est possible que Ménechme ait conçu les coniques comme sections de cônes circulaires droits par des plans perpendiculaires à une génératrice. Selon l'angle d'ouverture au sommet, on a trois types de cône de révolution . Bien que l'ellipse ne soit pas présente dans les travaux attribués à Menechme, on peut supposer qu'il la connaissait puisque Eratosthènes appelle les coniques «triade ménechmienne».

Aristée et Euclide

Entre l'époque de Menechme et celle d'Archimède, selon le témoignage de Pappus, des travaux perdus relatifs aux coniques ont été écrits par Aristée (350 avant J.-C.) et Euclide (300 avant J.-C.). Le livre VII de la Collection de Pappus constitue la seule source de ce que nous savons sur ces traités. Voilà ce que dit Pappus selon la traduction de Paul Ver Eecke :

> «Apollonius nous a transmis huit livres sur les coniques en ayant complété les quatre livres des Coniques d'Euclide, et y ayant ajouté quatre autres livres. Aristée, auteur des cinq volumes qui avaient été publiés jusqu'alors sur les Lieux Solides en corrélation avec les coniques, avait toutefois comme les prédécesseurs

> d'Apollonius appelé l'une des sections coniques la section de cône acutangle, l'autre la section de cône rectangle et l'autre la section de cône obtusangle. »

Pappus, dans le livre VII de la Collection, consacre à l'ouvrage d'Euclide «*Lieux à la Surface*» quatre lemmes (235 à 238) qui présentent le grand intérêt de mettre en évidence, dans le seul document ancien que nous ayons*, la propriété foyer-directrice dans les sections coniques.* Ils établissent que si un point dont les distances à un point donné et à une droite donnée sont entre elles dans un rapport donné alors le point est sur une conique ; une parabole, si le rapport est l'unité, une ellipse, s'il est plus petit que l'unité et une hyperbole, s'il est plus grand que l'unité. La démonstration donnée par Pappus montre que la propriété foyer-directrice était une caractérisation des coniques à l'époque d'Euclide et que sa démonstration remontait probablement à l'ouvrage d'Aristée sur les «Lieux Solides», c'est-à-dire sur les coniques considérées comme lieux géométriques. Cette proposition est l'une des plus remarquables de l'ouvrage de Pappus.

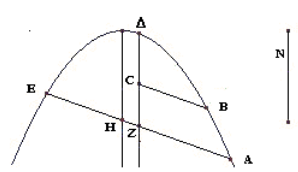
Les caractérisations des coniques chez Archimède

Archimède (287 avant J.-C.) conçoit aussi les coniques comme intersections de cônes de révolution, d'angles d'ouvertures différentes, par des plans perpendiculaires à une génératrice. Par cône acutangle, il entend um cône circulaire droit dont les côtés qui sont les intersections de sa surface et du plan conduit par l'axe, forment un angle aigu. Si ces intersections forment un angle droit, le cône s'appelle rectangle, et si elles forment un angle obtus, le cône s'appelle obtusangle. La parabole est donc pour lui l'intersection d'un cône rectangle par un plan perpendiculaire à une génératrice, l'ellipse, l'intersection d'un cône acutangle par un plan perpendiculaire à une génératrice et l'hyperbole, l'intersection d'un cône obtusangle par un plan perpendiculaire à une génératrice.

Archimède a utilisé les sections coniques comme outils pour résoudre des problèmes. Dans les traités «*conoïdes et sphéroïde*» et «*la quadrature de la parabole*» Archimède utilise plusieurs propriétés des sections coniques. Il semble que les coniques d'Aristée ou d'Euclide furent la source d'où Archimède tira la plupart des propriétés qu'il utilisera sur les coniques puisqu'on trouve souvent dans son œuvre les affirmations : «cette proposition a été démontrée dans les Eléments des coniques».

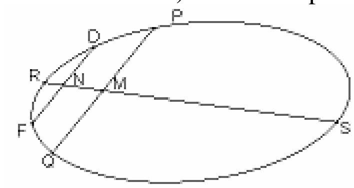
Archimède est notre principale source en ce qui concerne la terminologie pré-apollonienne sur les coniques. Le mot parabole se trouve dans le titre de l'un des Traités d'Archimède mais jamais dans le texte. Archimède établit une distinction entre l'axe et les diamètres d'une «section du cône rectangle», cependant il donne toujours à l'axe le nom de diamètre et tout autre diamètre est désigné par «*ligne parallèle au diamètre*».

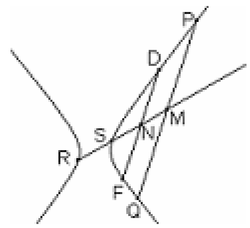
Dans la proposition 3 du livre «*Sur les conoïdes et les sphéroïdes*» on trouve la propriété fondamentale de la parabole.



En langage moderne elle veut dire que : si B et A appartiennent à une parabole alors

BC^2 = N. ΔC et que AZ^2 = N.ΔZ où N est un segment fixe qui est le latus rectum des ordonnées par rapport au diamètre ΔZ.
Archimède caractérise l'ellipse et l'hyperbole (en symbolisme moderne) par la propriété suivante : $MP^2 = k_1$. MS.MR et $DN^2 = k_2$.NR.NS où M e N sont les milieux des cordes PQ e DF (parallèles entre si) et P est un point de la conique.





Les caractérisations des coniques chez Apollonius

Apollonius (262-190 avant J.-C.), géomètre grec, est célèbre surtout pour son traité sur les coniques, contenant, non seulement ce qui était connu par Menechme, Aristée et Euclide, mais aussi des résultats qui lui sont personnels.
Sept des huit livres de son traité sur les sections coniques nous sont parvenus. Les quatre premiers en grec, tandis que les trois derniers nous ont été transmis dans une version arabe, datant du IX^{me} siècle et traduite en latin, au XVI^{me} siècle. Le huitième livre est perdu mais une reconstruction a été faite par le mathématicien arabe al-Haytham.
Avant Apollonius, le cône était considéré comme le solide engendré par un triangle rectangle tournant autour de l'un des côtés de l'angle droit. Apollonius donne dans les premières définitions du livre I une nouvelle manière de concevoir la génération du cône :

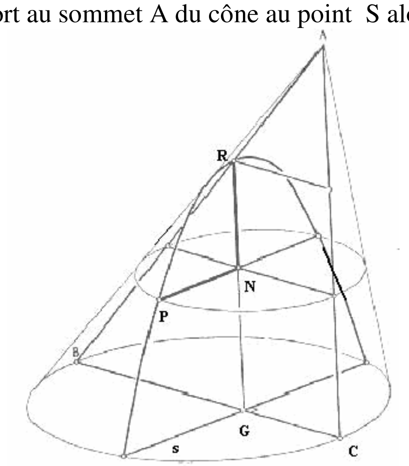
Définition I *: «Si, d'un certain point, l'on mène à une circonférence de cercle, non située dans le même plan que ce point, une droite prolongée de part et d'autre, et si, le point restant fixe, la droite, circulant suivant la circonférence, reprend la position d'où elle a commencé de se mouvoir,* ***j'appelle surface conique*** *celle qui, décrite par la droite, est composée de deux surfaces opposées suivant le sommet, dont chacune croit vers l'infini, la droite génératrice étant elle-même prolongée vers l'infini.* ***J'appelle sommet de cette surface*** *le point fixe, et son axe la droite menée par le point et le centre du cercle. »*
Cette définition de surface conique permet à Apollonius de définir les sections coniques comme les courbes obtenues en coupant un même cône ou une surface conique par des plans quelconques et non nécessairement perpendiculaires à une génératrice.
Cette nouvelle manière de générer les sections coniques est citée chez Eutoce dans son commentaire sur le premier livre des coniques :

«Mais plus tard, Apollonius de Perge, considère d'une manière générale que toutes les sections s'obtiennent dans tout cône droit ou scalène, d'après les différentes manières dont le plan rencontre le cône. »

Apollonius montre que les coniques peuvent être engendrées à partir d'un seul et même cône. C'est la première unification de ces courbes. Quand le plan est parallèle à une génératrice il obtient une parabole. Quand le plan rencontre l'un des côtés du triangle passant par l'axe au-delà du sommet du cône il obtient une seule des deux branches d'une hyperbole et quand il coupe les deux côtés du triangle passant par l'axe il obtient une ellipse. Apollonius considère aussi, pour la première fois chez les géomètres de l'Antiquité, la seconde branche de l'hyperbole. Il appelle les deux branches «sections opposées». Il distingue ainsi quatre types de courbes : la parabole, l'hyperbole (une branche), l'ellipse et les sections opposées qui ne forment qu'une seule et même courbe centrée.

Les définitions des sections coniques chez Apollonius.

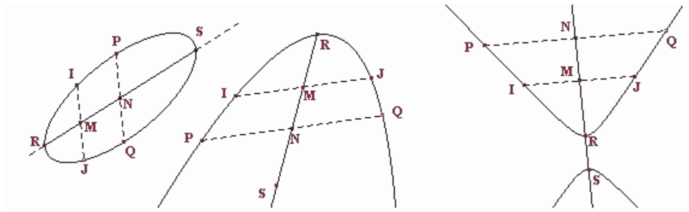
Pour définir les trois courbes, il ne considère pas seulement un cône circulaire droit mais un cône circulaire quelconque. C'est la deuxième généralisation faite par Apollonius. Il appelle axe du cône la droite menée du sommet A du cône au centre O de sa base. Ensuite, il considère le plan mené par l'axe. Ce plan coupe le cône suivant deux segments [AB] et [AC], et détermine dans le cercle un diamètre [BC]. Le triangle qui a pour base ce diamètre [BC], et pour côtés les deux segments [AB] et [AC], s'appelle triangle par l'axe. Par un point R appartenant à un des deux segments [AB] ou [AC], Apollonius coupe le plan du triangle par l'axe par un autre plan de manière que la droite s d'intersection de ces deux plans soit perpendiculaire à la droite (BC) du triangle par l'axe. Appelons G l'intersection de la droite s avec la droite qui passe par B et C. Si la droite (RG) est parallèle à un des deux segments [AB] ou [AC] alors la section est une parabole. Si (RG) coupe les deux segments [AB] et [AC] aux points R et S alors la section est une ellipse. Si (RG) coupe un des deux segments [AB] ou [AC] et le prolongement de l'autre segment par rapport au sommet A du cône au point S alors la section est une hyperbole.



D'après la figure de la traduction de Paul Ver. Eecke

Apollonius privilégie la droite qui passe par R et G et démontre que toutes les cordes de la conique parallèles à la droite s sont coupées en deux parties égales par la droite (RG). Dans le livre 1, il nomme cette droite (RG) diamètre.

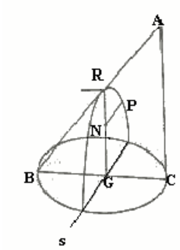
«J'appelle diamètre de toute ligne courbe située dans un seul plan, la droite qui, menée de la ligne courbe, coupe en deux parties égales toutes les lignes droites menées dans la ligne parallèlement à une droite quelconque ; sommet de la ligne l' extrémité de cette droite qui est située sur la ligne, enfin, j'appelle ***droites menées d'une manière ordonnée au diamètre*** *chacune des parallèles.»*



Les longueurs des segments parallèles [JM] et [QN] menées d'une *manière ordonnée* au diamètre sont maintenant appelées ***ordonnées*** et *l*es longueurs des segments [RM] et [RN] d'origine le sommet R de la courbe et d'extrémités les points où les demi-cordes coupent le diamètre (RS) sont appelées ***abscisses***. L'origine des mots «ordonnée» et «abscisse» vient des traductions latines abrégées des termes correspondants «*mis en ordre*» et «*coupé du sommet*».

La propriété fondamentale de la parabole chez Apollonius.

Les propositions XI, XII et XIII de son premier livre sont les propriétés fondamentales des coniques. Dans la proposition XI il présente la définition de parabole ainsi que la démonstration de la propriété fondamentale de la parabole.



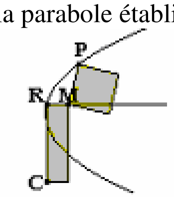
D'après la figure de la traduction par Paul Ver Eecke

Nous ferons une traduction de cette propriété en langage moderne d'après la figure ci-dessus. (RG) est un diamètre de la parabole. P est un point quelconque de la section, N est un point sur le diamètre (RG) et (NP) est parallèle à s. Apollonius a démontré dans la proposition XI du livre 1 que tout point P de la section vérifie la propriété $NP^2 = p. NR$ où NP est une ordonnée et p la longueur d'un segment fixe perpendiculaire au diamètre. Cette longueur est égale à $p = (AR.BC^2) / (AB.AC)$. Donc, la parabole chez Apollonius est définie comme une section qui vérifie la condition $NP^2 = p.NR$.

Le segment de longueur p est appelé côté droit (ορθια). Plus tard on l'a appelé «latus rectum» et ensuite remplacé par le terme «paramètre». La tendance moderne est d'appeler paramètre la moitié de la longueur du latus rectum. Plusieurs géomètres après Apollonius ont donné différentes expressions géométriques, prises dans le cône, de la longueur du latus rectum. Cela permet de placer une conique donnée sur un cône donné. Si nous désignons par y l'ordonnée NP, par x l'abscisse NR et par p la longueur du côté droit, l'énoncé de la proposition se traduit par $y^2 = px$, qui est l'équation cartésienne de la parabole rapportée à des axes obliques, dont l'un est un diamètre, et l'autre la tangente à son extrémité.
Apollonius a démontré dans les propositions XLI à LI que la propriété fondamentale de la parabole est valable pour un diamètre arbitraire et pas seulement pour le diamètre déterminé par la section du cône. Alors si (RS) est un diamètre quelconque on aura :
$NP^2 / NR = p$ où $p = AR.BC^2 / AB.AC$

L'origine du mot parabole.

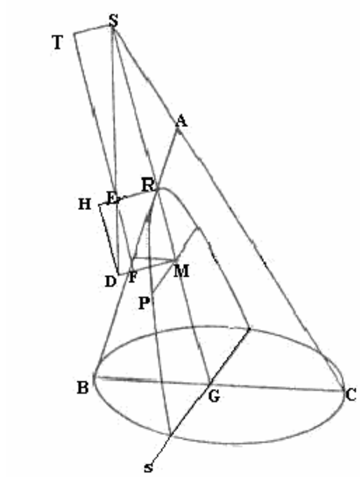
La propriété fondamentale de la parabole établit l'égalité $MP^2 = RC.RM$ ou $y^2 = px$



Comme $px = y^2$ est une égalité entre l'aire d'un rectangle construit sur le segment entier [RC] (appelé latus rectum) et un carré, Apollonius nomme cette courbe du même nom «parabole» que les Pythagoriciens avaient attribué à cette construction.
C'est la première fois, à l'exception du titre chez Archimède, qu'on nomme cette courbe parabole. L'origine du mot parabole (qui en grec signifie application) vient du fait qu'elle est l'unique section du cône par un plan qui a la propriété que le carré construit sur [PM] soit équivalent au rectangle de côtés [RM] et [RC].

La définition de l'hyperbole chez Apollonius

Dans la proposition XII du premier livre des Coniques, Apollonius présente la définition d'hyperbole et la démonstration de sa propriété fondamentale :



D'après la figure de la traduction par Paul Ver Eecke

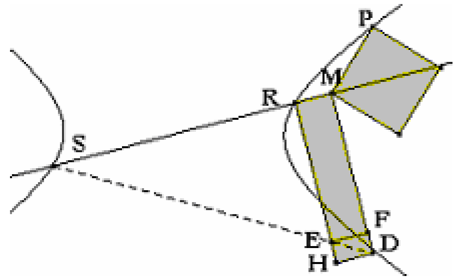
En langage moderne, la proposition, d'après la figure ci-dessus, dit que le carré construit sur le segment [PM] équivaut au rectangle RMFE ayant le côté droit (latus rectum) [RE] comme hauteur et le segment [RM] comme base, et augmentée du rectangle EFDH, semblable au rectangle SRET qui a pour base l'axe transverse [RS] et pour hauteur le côté droit (latus rectum) [RE]. Si nous désignons par y l'ordonnée PM, par x l'abscisse RM, par 2.a la longueur de l'axe transverse [SR], et par p la longueur du côté droit [RE], l'énoncé de la proposition se traduit par $y^2 = px + (px^2) / 2a$, qui est l'équation cartésienne de l'hyperbole rapportée à des axes obliques, dont l'un est un diamètre, et l'autre la tangente à son extrémité. Donc, l'hyperbole chez Apollonius est définie comme la section qui vérifie la condition $y^2 = px + (px^2) / 2a$.

Apollonius montre ensuite dans les propositions XLI à LI que la propriété fondamentale de l'hyperbole est valable pour un diamètre arbitraire et non seulement pour le diamètre déterminé par la section du cône.

L'origine du mot hyperbole

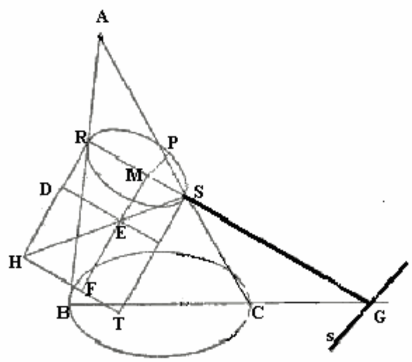
La propriété fondamentale de l'hyperbole $y^2 = px + (px^2)/(2.a)$ montre une égalité entre l'aire d'un rectangle construit sur un segment plus grand que le latus rectum et l'aire d'un carré. Les Pythagoriciens utilisaient le mot hyperbole dont un des sens est dépassement pour dire «application sur une droite donnée d'une aire donnée avec excédent d'une aire définie». Il y a donc un lien entre la propriété fondamentale de l'hyperbole et le nom attribué par les Pythagoriciens à cette construction. Apollonius nomme alors pour la première fois cette courbe hyperbole.

Donc l'origine du mot hyperbole pour désigner cette courbe qui en grec signifie excès, vient du fait que le rectangle RMDT équivalent au carré construit sur une ordonnée quelconque [PM] a un excès par rapport au rectangle RMFE construit sur le côté droit (latus rectum) [RE].



La définition de l'ellipse chez Apollonius

Dans la proposition XIII du premier livre des Coniques Apollonius présente la définition de l'ellipse et la démonstration de sa propriété fondamentale :

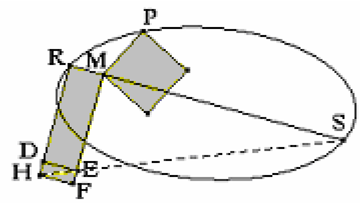


D'après la figure de la traduction par Paul Ver Eecke

En langage moderne, la proposition, d'aprés la figure ci-dessus, dit que le carré construit sur [PM] équivaut au rectangle RMFH ayant le côté droit (latus rectum) [RH] comme hauteur et le segment [RM] comme base, et diminuée d'un rectangle DEFH, semblable à un rectangle RSTH qui a pour base le diamètre et pour hauteur le côté droit (latus rectum)[RH]
Si nous désignons par y l'ordonnée PM, par x l'abscisse RM, par 2.a la longueur du diamètre [SR], et par p la longueur du côté droit [RH], l'énoncé de la proposition se traduit par $y^2 = px - (px^2) / (2.a)$, qui est l'équation cartésienne de l'ellipse rapportée à des axes obliques, dont l'un est un diamètre, et l'autre la tangente à son extrémité.
Donc, l'ellipse chez Apollonius est définie comme la section qui vérifie la condition
$y^2 = px - (px^2) / (2.a)$. Apollonius montre ensuite dans les propositions XLI à LI que la propriété fondamentale de l'ellipse est valable pour un **diamètre arbitraire** et non seulement pour le diamètre déterminé par la section du cône.

L'origine du mot ellipse

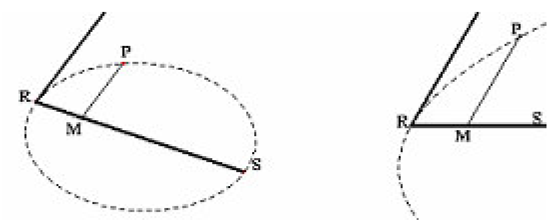
La propriété fondamentale de l'ellipse $y^2 = px - (px^2) / (2a)$ établit une égalité entre l'aire d'un rectangle construit sur un segment plus petit que le latus rectum et l'aire d'un carré. Les Pythagoriciens utilisaient le mot ellipse, dont un des sens est «manquer à», pour dire «application sur une droite donnée d'une aire donnée avec défaut d'une aire définie. » Apollonius a nommé cette courbe du même nom attribué à cette construction par les Pythagoriciens : ellipse. Le mot ellipse introduit par Apollonius, qui en grec signifie défaut, a son origine du fait que le rectangle RMED équivalent au carré construit sur une ordonnée quelconque [PM] a un **défaut** par rapport au rectangle construit sur le côté droit (latus rectum) [RH]



Les axes obliques chez Apollonius

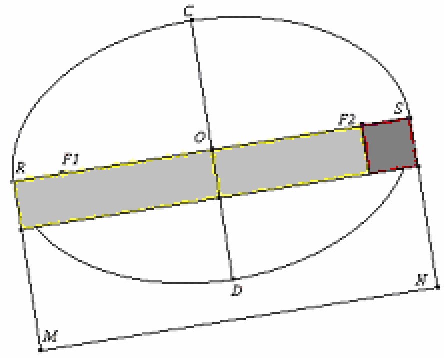
Les propriétés fondamentales des coniques (propositions XI, XII et XIII) introduites par Apollonius montrent l'existence d'une relation quantitative entre abscisses et ordonnées d'un point quelconque d'une conique. L'un des axes est le diamètre (RS) et l'autre est la tangente à son extrémité (parallèle à un diamètre conjugué). Les noms des trois courbes sont distingués par les propriétés métriques $y^2 = px$, $y^2 = px + (px^2)/RS$ et $y^2 = px - (px^2)/RS$. *«La terminologie en usage dans l'ouvrage d'Apollonius pour la désignation des trois courbes ne fait pas référence au mode de génération des courbes comme sections de cône, mais à leurs propriétés caractéristiques exprimées en termes d'application des aires. »* (Descorps-Foulquier, M. 2000, p. 25)

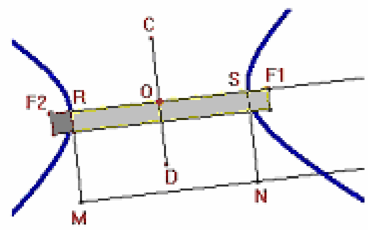
Une nouveauté chez Apollonius est que les coordonnées sont rapportées à des axes obliques et non seulement à des axes orthogonaux comme probablement chez Menechme.



Les foyers chez Apollonius

Apollonius, dans la proposition 45 du troisième livre présente pour la première fois la notion de «*points issus de l'application*» de l'ellipse et de l'hyperbole (ces points sont nommés foyers depuis Kepler (1604)). Il désigne les foyers comme étant les «points issus de l'application», et les définit comme des points qui divisent le grand axe de l'ellipse ou l'axe transverse de l'hyperbole, de part et d'autre suivant l'axe, en deux segments dont le produit est égal au quart de la figure. (Le terme «figure» désigne dans le traité d'Apollonius le rectangle qui a pour côtés l'axe transverse et le latus rectum.) RSNM est un rectangle qui a pour côtés l'axe transverse et le côté droit.

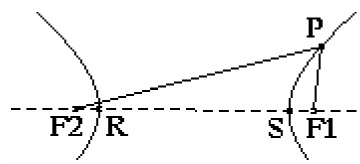




Les propriétés bifocales de l'ellipse et de l'hyperbole.

La proposition LI du livre III démontre que la différence des distances de chaque point d'une hyperbole aux deux foyers est constante et égale à la longueur de l'axe transverse.

«Si l'on applique, de chaque côté suivant l'axe d'une hyperbole ou de sections opposées, un rectangle équivalent à la quatrième partie de la figure et qui est augmenté d'une figure carrée, et si, à partir des points issus de l'application de ce rectangle, des droites viennent se briser sur l'une ou sur l'autre des sections, la plus grande droite excède la plus petite de l'axe. » En symbolisme moderne : $|PF_2 - PF_1| = RS$



Cette proposition d'Apollonius fournit le moyen de tracer la courbe d'un mouvement continu. La proposition 52 du livre III démontre que la somme des distances de chaque point d'une ellipse aux deux foyers est constante et égale à la longueur du grand axe. L'énoncé d'Apollonius est : *«Si dans l'ellipse, on applique de part et d'autre, suivant le grand axe, un rectangle équivalent à la quatrième partie de la figure, diminué d'une figure carrée, et si,* ***des points issus de l'application, des droites viennent se briser sur la ligne, elles seront égales à l'axe. »***

Les propriétés 51 et 52 permettent de tracer une hyperbole et une ellipse par un mouvement continu.

Dioclès.

L'ouvrage de Dioclès «Les Miroirs Ardents» est cité par Eutocius dans son commentaire sur «La sphère et le cylindre» d'Archimède. Cet ouvrage a été traduit par Ibn al-Haytham au dixième siècle et nous est parvenu dans une version arabe dans deux traductions. La première en français de Roshdi Rashed et la seconde en anglais de G. J. Toomer. Il semble que Dioclès (environ 190 avant J-C) fut un contemporain d'Apollonius.

Les miroirs ardents à l'époque hellénistique étaient des instruments destinés à un usage pratique. Ces miroirs ont joué un rôle important dans la transmission et propagation du savoir scientifique.

L'oeuvre de Dioclès utilise la propriété foyer-directrice pour résoudre des problèmes de réflexion des rayons lumineux. Elle contient seize propositions. La plus grande partie de ce livre utilise des propositions sur les coniques. Nous allons citer un résultat qui est absent dans les « Coniques » d'Apollonius. C'est la propriété foyer-directrice de la parabole que est introduite dans la quatrième proposition. Dioclés résout le problème de construire un miroir parabolique par une méthode qui consiste à tracer une parabole au moyen du foyer et de la directrice. La lecture de l'ouvrage de Dioclès nous amène à conjecturer que Diocles dans «*les Miroirs Ardents*» a construit une parabole par point en utilisant la propriété foyer-directrice mais que la parabole n'était pas encore définie par la propriété foyer-directrice.

La période des commentateurs grecs

A la fin IV^me^ siècle après J.C une œuvre très importante pour l'histoire des coniques est apparue. C'est l'ouvrage de **Pappus d'Alexandrie** «*la Collection mathématique*» où on trouve des renseignements précieux sur des ouvrages des géomètres de l'Antiquité aujourd'hui perdus. Cette ouvrage se composait originairement de huit livres : le premier est entièrement perdu, le second ne nous est parvenu qu'en partie, et les six derniers seuls nous ont été intégralement conservés. Les livres de Pappus contiennent commentaires sur les sections coniques, particulièrement le livre VII. Pappus cite que les géomètres grecs classaient les constructions géométriques en trois catégories selon les moyens qui permettaient de les résoudre : les *problèmes plans* qui étaient résolubles à la règle et le compas, les *problèmes solides* qui exigeaient l'intervention des coniques et les *problèmes linéaires* qui exigeaient d'autres courbes telles que les spirales, les quadratrices, les conchoïdes et les cissoïdes. Cette classification amène Pappus à faire des considérations sur les différentes solutions du problème solide de la trisection de l'angle. Pappus nous a fait connaître pour la première fois la caractérisation monofocale des coniques dans le livre VII, propositions 235 à 238 déjà citée dans le paragraphe Aristée et Euclide. C'est un des rares passages dans des œuvres grecques où cette propriété est utilisée.

Ensuite nous présentons la contribution du commentateur grec **Serenus d'Antinoe** (vers 400 après JC) à l'étude des coniques. Son œuvre se compose de deux livres qui s'intitulent «*De la Section du Cylindre*» et «*De la Section du Cône*». Serenus observe dans le préambule de «*De la Section du cylindre*» que beaucoup de géomètres avaient imaginé que la section du cylindre était différente de celle du cône.

> Considérant, ami Cyrus, que beaucoup de ceux qui s'adonnent à la géométrie s'imaginent que la section transversale du cylindre est différente de celle du cône qu'on appelle ellipse, j'ai cru qu'il ne fallait laisser dans cette erreur ni eux ni ceux qu'ils ont persuadés d'être du même avis. (Ver Eecke, P. 1969, p. 1)

D'où il juge nécessaire d'établir, par une preuve géométrique, que les dites sections sont également des ellipses. Mais ce n'est pas la première fois dans l'histoire que la section d'un cylindre par un plan est considéré. Euclide avait déjà mentionné dans ses *Phénomènes* que,

si un cône ou un cylindre est coupé par un plan non parallèle à la base, la courbe engendrée peut être une section de cône acutangle, c'est -à-dire une ellipse.
Le premier livre du traité de Serenus renferme huit définitions et trente-trois propositions. Les premières définitions visent à étendre la notion de cylindre droit en considérant aussi le cylindre oblique. Mais Serenus dans le cylindre oblique ne traite pas le cas général. Il considère dans ces cylindres seulement les sections faites par des plans perpendiculaires à celui qui passe par l'axe et par sa projection sur le plan du cercle de base. On remarque dans les propositions XIV et XVII l'utilisation des caractérisations de l'ellipse d'Archimède et d'Apollonius.

Nous devons à **Eutocius** (vers la fin du cinquième siècle) des renseignements précieux sur les recherches géométriques des géomètres grecs. On a conservé de l'œuvre d'Eutocius les commentaires sur les traités d'Archimède «De la sphère et du cylindre», «De la mesure du cercle» et «De l'équilibre des figures planes» et sur le traité d'Apollonius les «Coniques». La tradition grecque ne nous a pas transmis le texte original des quatre premiers livres des «Coniques» d'Apollonius. Ils nous sont parvenus grâce à son édition commentée. Dans l'introduction de son commentaire sur les «Coniques» qui a été traduit par Heiberg, Eutocius dit :

> Comme il existe plusieurs éditions, ainsi qu'Apollonius le dit lui-même dans sa lettre d'envoi, j'ai jugé préférable de les réunir en une seule, en plaçant dans le texte, pour la commodité de l'exposition, les démonstrations les plus claires qui s'offraient à moi, et en signalant leurs variantes, en dehors du texte, dans mon commentaire, comme c'est l'usage. » (cité par Decorps-Foulquier, M. 2000, pp. 67-68)

Avant de nous éloigner des mathématiciens grecs, nous voulons mentionner l'œuvre **d'Anthémius de Tralles** (vers la fin du cinquième siècle) sur les miroirs ardents. Il nous reste de lui un fragment qui a été traduit par M.Dupuy et se trouve dans les Mémoires de l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres, de l'année 1777. Nous avons suivi la traduction de ce fragment faite par Roshdi Rashed dans l'ouvrage «les Catoptriciens Grecs». Le fragment commence par la question relative : *« Comment devrions-nous amener un rayon solaire fixe à ne pas quitter une certaine position quand on nous le demande, à tout moment et en toute saison* ? » Anthémius répond à cette question par l'étude du miroir ellipsoïdal. «*La démarche d'Anthémius s'ordonne selon trois étapes successives. Il commence par construire la courbe par points, puis montre qu'il s'agit d'une ellipse, et enfin trace cette ellipse par un mouvement continu, selon le fameux procédé du jardinier*»). C'est la première fois qu'un miroir ellipsoidal est cité dans les oeuvres anciennes. Pour cette démarche il s'appuie sur la propriété optique de l'ellipse. Dans une autre partie du fragment, Anthémius évoque le fait qu'Archimède se servit d'un miroir ardent pour incendier la flotte de Marcellus devant Syracuse. Alors il veut établir la possibilité de ce fait. Il se propose de construire un système de miroirs dont il fait la description. Ensuite, Anthémius aborde l'étude du miroir parabolique.

Les coniques au temps des Arabes

L'étude des sections coniques chez les Arabes a été entreprise non seulement à cause des problèmes géométriques hérités de l'Antiquité comme la duplication du cube, le partage d'une sphère par un plan (proposition 4 du livre II d'Archimède, *Sur la sphère et le cylindre*), mais surtout en vue de leur application à des domaines non prévus par les premiers mathématiciens comme l'optique, la statique et l'astronomie. De cet intérêt a résulté le développement de la recherche sur les coniques.

A la fin du huitième siècle et au neuvième siècle un grand nombre d'ouvrages scientifiques grecs était disponible dans le monde islamique par l'intermédiaire de l'activité des traducteurs. Un rôle déterminant a été joué par les frères Muhammad, Ahmad et al-Hasan dans le recouvrement et la traduction de ces œuvres. Ils sont connus sous le nom de frères **Banu Musa**. L'histoire de leurs efforts pour faire traduire en arabe les «Coniques» d'Apollonius" est racontée dans leur préface à la traduction arabe.

Rashed, R. dans les Actes du Colloque de la SIHSPAI de 1993 mais publiées en 1997 présente un article intitulé «*Les commencements des mathématiques archimédiennes en arabe : Banu Musa»* où on peut observer la définition bifocale de l'ellipse sans référence au cône. Il signale que les frères Banu Musa ont laissé divers ouvrages de géométrie et que selon le témoignage des mathématiciens al Sijzi et Ibn al-Samh (mort en 1035), al-Hasan a rédigé un ouvrage sur l'ellipse intitulé *«Sur une figure ronde oblongue»*. Une version d'une compilation de cet ouvrage nous est parvenue et selon le livre d'Ibn al-Samh *«le cheminement d'al-Hasan Ibn Musa s'articule de la manière suivante : il part de la figure circulaire allongée* ***définie par la propriété bifocale*** *: MF + MF'=2a, où 2a est la longueur du grand axe, pour ensuite établir que la section plane d'un cylindre de révolution par un plan non parallèle aux bases a les mêmes propriétés que cette courbe. Il passe ensuite à la détermination de l'axe de l'ellipse, pour enfin étudier les propriétés de ses cordes, ses flèches, etc.»* .C'est la première fois qu'on est confronté dans cette recherche à une référence à la caractérisation bifocale de l'ellipse en tant que définition.

Dans la première moitié du X^{me} siècle, le terme conique chez les Arabes désignait les objets mathématiques définis dans l'ouvrage d'Apollonius: sections d'un cône par un plan. Les propositions les plus importantes des «Coniques» étaient bien connues des géomètres arabes, principalement les propriétés optiques.

Le mathématicien arabe **Ibrahim Sinan** (909-946) présente une œuvre « *Livre sur la construction des trois sections»* où il traite des méthodes pour générer les trois sections. Plus tard la même construction de la parabole apparaît en 1522 dans l'œuvre de Johannes Werner et en 1641 dans l'œuvre de Claude Mydorge, ces auteurs la présentant comme originale.

Nous arrivons ensuite à la deuxième moitié du X^{me} siècle avec les travaux des mathématiciens arabes, al-Quhi et Ibn Sahl. La lecture de plusieurs travaux **d'al Quhi** mettent en évidence certains aspects de la place qu'occupaient les sections coniques dans la géométrie au X^{me} siècle. Dans le traité intitulé «*Le livre des centres des cercles tangents, situés sur des lignes, par la méthode de l'analyse*», al-Quhi détermine le lieu des centres des cercles vérifiant certaines conditions imposées. Par exemple, il s'intéresse aux centres des cercles tangents à une droite donnée et passant par un point donné. Le lieu est la parabole de directrice la droite donnée et de foyer le point donné. *«Pour démontrer qu'il s'agit bien d'une parabole, il cherche à retrouver la relation donnée en définition par*

Apollonius» Cela montre que chez Al-Quhi la propriété foyer-directrice ne caractérise pas encore la parabole comme lieu géométrique de points. On voit apparaître dans ce traité une classification différente des coniques: d'un côté les paraboles et de l'autre les coniques à centre. Dans un autre traité intitulé «*Traité sur le compas parfait*» il conçoit un instrument servant à tracer les coniques d'un mouvement continu. L'étude de la continuité de ces courbes sera employée pour discuter l'existence des points d'intersection des coniques dans la résolution des problèmes.

Ibn Sahl, contemporain d'al Quhi, appartenait à une tradition de recherche sur les miroirs ardents, au sein de laquelle la connaissance des travaux de ses prédécesseurs n'empêchait pas les savants de reprendre les mêmes problèmes pour en donner des autres directions. Dans son traité d'optique «*Les instruments ardents*» Ibn Sahl rompt avec la tradition des catoptriciens grecs et arabes en introduisant la réfraction et les lentilles. Le problème traditionnel des catoptriciens grecs et arabes s'est donc modifié en un nouveau problème: embraser en un point donné par une source lumineuse éloignée ou proche en utilisant non seulement la réflexion mais aussi la réfraction. La conception et la construction du modèle géométrique serviront à la fabrication du gabarit du miroir et de la lentille.Pour expliquer le fonctionnement des phénomènes liés à la réflexion et à la réfraction il s'appuie sur l'ouvrage des Coniques d'Apollonius et présente des procédés mécaniques pour le tracé continu de ces courbes. Le principe du dispositif conçu par Ibn Sahl pour décrire la construction d'une parabole repose sur la propriété foyer et directrice mais cette propriété ne caractérise pas encore la parabole comme lieu de points. Pour la construction de l'ellipse et l'hyperbole il utilise les propriétés optiques des coniques. Au cours de ses démonstrations, il fait appel aux relations fondamentales des sections coniques, exposées dans les propositions 11,12 et 13 du premier livre des Coniques.

A la suite d'ibn Sahl, **Ibn al-Haytham**, dans la premiére moitié du XI^{ème} siècle, a poursuivi la recherche sur les miroirs ardents et sur les instruments ardents[1] et a fait une profonde innovation dans l'étude de l'optique en rejetant la doctrine d'Euclide et de Ptolémée de rayons visuels sortant de l'oeil et en prenant parti pour la réception de la lumière dans l'oeil. L'ouvrage le plus important d'Ibn al-Haytham qui nous est parvenu est *«L'Optique»* en sept livres s'occupant de la théorie de la vision et de la théorie de la lumière. Dans cet ouvrage, les constructions géométriques faites avec des sections coniques occupent une place importante. Ibn al Haytham est l'auteur, après Ibn Sahl et d'autres, d'une réforme de l'optique géométrique. C'est la première réforme de l'optique après *«l'Optique»* de Ptolomée. Cette reformulation a abouti à l'émergence de problèmes nouveaux comme celui du problème d'Alhazen[2] : trouver sur un miroir circulaire le point de réflexion d'un rayon lumineux issu d'une source ponctuelle donnée et aboutissant à un observateur donné. Ce problème a été résolu par al-Haytham en utilisant l'intersection d'un cercle et d'une hyperbole. L'oeuvre mathématique d'bn al-Haytham est immense. Le traité « ***Sur l'achèvement de l'ouvrage des Coniques*** », s'occupe de l'étude d'un certains nombres de problèmes géométriques solides et aussi plans. Dans son commentaire (Les mathématiques infinitésimales du IX^{e} au XI^{e} siècle, t.3,p.19) sur ce traité Roshdi Rashed

[1] c'est-à-dire ceux qui embrasent non seulement par réflexion, mais aussi par réfraction
[2] en Europe Occidentale ibn al-Haytham est connu sous le nom Alhazen

dit: «*C'est ainsi qu'on rencontre tour à tour des problèmes solides construits à l'aide des coniques, des problèmes plans construits à l'aide des coniques, et des problèmes plans construits à la règle et au compas. On n'a pas suffisamment souligné ce fait majeur qui suggère pourtant que la construction au moyen des coniques était devenue une méthode recevable en géométrie, puisque légitime aussi bien pour les problèmes solides que pour les problèmes plans.»* Ces problèmes et d'autres comme la nécessité d'améliorer les tables trigonométriques existantes ont poussé les mathématiciens arabes à résoudre des équations particulières du troisième degré à l'aide des coniques.

Dans la seconde moitié du XI^{me} siècle le *«Traité d'Algèbre»* **d'al-Khayyam** donne l'occasion de voir l'usage systématique des coniques dans la résolution des équations du troisième degré. Contrairement à ses prédécesseurs qui étudiaient des cas particuliers de l'équation cubique, al-Khayyam élabore une théorie géométrique des équations de degré inférieur ou égal à trois. Il part de la classification des équations des deux premiers degrés établie par Al-Khwarizmi, au début du neuvième siècle et par Thabit ibn Qurra dans la seconde moitié de ce même siècle, et classe *tous les types d'équations du troisième degré* selon la répartition des termes constants, du premier degré, du second degré et du troisième degré, entre les deux membres de l'équation. Ensuite, en s'appuyant sur les ouvrages d'Euclide «les Eléments» et les «Données», ainsi que les deux premiers livres d'Apollonius sur les «Coniques», il trouve les solutions positives de chacune de ces espèces d'équations par l'intersection de sections coniques. Nous pouvons résumer les éléments constituants de la théorie des équations à l'époque d'al Khayyam : construction géométrique des racines des équations de degré inférieur ou égal à 3 au moyen des coniques et résolution numérique de ces équations.

Al Khayyam a eu un successeur qui a poussé plus loin sa théorie des équations. C'est le mathématicien arabe de la seconde moitié du XII^{me} siècle **Sharaf al-Din al-Tus**i. Son «*Traité sur les Equations*» concerne des constructions géométriques des racines des équations du troisième degré et contrairement à al-Khayham qui classe les équations du troisième degré selon le nombre de monômes, il classe les équations selon l'existence ou non de solutions positives. Pour chaque équation étudiée, il démontre l'existence du point d'intersection de deux courbes, et par conséquent de l'existence des racines. L'étude de son «*Traité sur les Equations*» permet de voir aussi qu'à cette époque quelques propriétés fondamentales des coniques étaient considérées comme des caractérisations. Comme dans ce travail nous nous intéressons spécifiquement aux caractérisations des coniques, nous ferons une incursion seulement aux préliminaires de son ouvrage.Dans l'introduction du traité, al-Tusi donne les définitions des trois coniques. Pour commencer l'étude des équations à l'aide des coniques, il considère seulement un cône de révolution ayant un angle de sommet droit. Seule l'étude des propriétés de la parabole et de l'hyperbole sont entreprises. En effet les constructions de tous les types d'équations du troisième degré sont effectuées au moyen de la parabole, de l'hyperbole et du cercle.

Après al-Khayyam et al-Tusi les mathématiciens arabes se sont également intéressés à la théorie géométrique des équations de degré supérieur**.** Al-Kasi, au XV^{me} siècle étudie les équations du quatrième degré et affirme avoir donné les solutions de 70 équations du quatrième degré de formes différentes.

La théorie des coniques et son évolution aux XVII^{me}

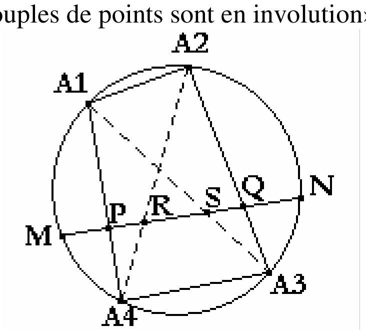
Au XVII^{me} siècle l'introduction de deux nouvelles méthodes marque un changement de point de vue sur la théorie de ces courbes : la méthode des projections qui interprète les coniques comme des projections de cercles et la méthode des coordonnées qui permet d'étudier les coniques dans le plan et sans référence au cône.

Au début du XVII^{me} siècle, après plusieurs tentatives pour trouver à la planète Mars une orbite concordante avec les observations de l'astronome Tycho**, Kepler** découvre les formes des orbites planétaires. Dans son œuvre «*Astronomia Nova*» Kepler signale que les orbites de toutes les planètes sont des ellipses dont le soleil occupe l'un des foyers (la loi des ellipses). Cette loi est une généralisation d'observations du ciel. Dans une autre œuvre «*Ad Vitellionem paralipomena, quibus astronomioe pars optica traditur*» publiée en 1604 et *traduit en français par Catherine Chevalley en 1980*, il utilise des hyperboles pour la mesure de la réfraction. Cette œuvre contient un court chapitre sur les sections coniques où il les présente d'une façon unifiée. Il introduit ce chapitre ave un commentaire inusité : *«Comme l'étude des sections est difficile, parce qu'elle est trop peu pratiquée, nous préférons en parler d'une manière méchanique, analogique et populaire : que les Géométres nous pardonnent.»* (Chevalley, 1980, p. 220). Pour la première fois la parabole apparaît comme limite, à la fois, d'une ellipse et d'une hyperbole. «*Il existe différents cônes: les cônes rectangles, les cônes acutangles et les cônes obtusangles; de même il existe des cônes droits et des cônes scalènes ou encore aplatis: à ce sujet voyez Apollonius et les commentaires d'Eutocius. Pour tous ces cônes sans distinction, il existe cinq espèces de sections. En effet, la ligne formée à la surface d'un cône par sa section est soit une droite, soit un cercle, soit une parabole, soit une hyperbole, soit une ellipse. Entre ces lignes, il y a un ordre, qui est le passage de la ligne droite à la parabole par l'intermédiaire d'une infinité d'hyperboles, puis de là au cercle par l'intermédiaire d'une infinité d'ellipse»* (Ibid., p. 220). On observe que c'est un premier mode d'unification des coniques qui se déduisent les unes des autres par déformation. Kepler a introduit le mot «foyer» dans cette œuvre. Il utilise le nom «focus» traduit initialement dans le français du XVIIme siècle par «points brûlants» et ensuite par «foyers». «*Or ces lignes comportent certains points de caractère particulier, qui ont une définition précise mais pas de nom, sauf à se servir d'une définition ou d'une propriété comme d'un nom. Des droites menées de ces points forment par rapport aux tangentes à la section et aux points de contact des angles égaux à ceux formés si l'on associe à ces mêmes points de contact les points opposés.* ***Nous appellerons quant à nous ces points des «Foyers»,*** *à cause de la lumière et en pensant à la Méchanique»*. (Ibid, pp. 221-222). Rappelons qu'Apollonius utilise les foyers dans les propositions 45 à 52 du livre III, en les appelant «points issus de l'application». Dans son œuvre, Kepler mentionne que la parabole a un de ses deux foyers infiniment éloigné. *«Dans la parabole un foyer se trouve à l'intérieur de la section, et un autre foyer doit être imaginé sur l'axe, soit à l'extérieur de la section soit à l'intérieur, éloigné du premier foyer par une distance infinie.* » (Ibid., p. 222). Kepler donne aussi une méthode pour la construction par fil des trois courbes dans un plan.

Claude **Mydorge** (1585-1647) a publié un traité sur les coniques en 1641. Ce travail se compose de quatre livres et suit la tradition classique. Mydorge utilise un cône circulaire et le plan sécant n'a pas besoin d'être perpendiculaire à une génératrice. Il met en valeur certains éléments qui l'intéressent et appelle **paramètre** ce que les anciens appelaient côté droit (latus rectum)

La génération des coniques par des cercles

Pendant que Kepler étendait de manière intuitive les définitions établies par les Grecs, Girard **Desargues** (1593-1662) traite les sections du cône sans se servir du triangle par l'axe. Il jette les premières bases de la géométrie projective. Au lieu de traiter cas par cas les intersections d'un cône à base circulaire et d'un plan, il regarde les coniques comme des perspectives du cercle de base vu du sommet du cône, dans le plan sécant qui était le tableau. Cela lui permet de transporter les propriétés du cercle aux coniques. Ce point de vue permet de faire le premier traitement unifié des diverses coniques. En cherchant parmi les propriétés des cercles, celles qui se conservent par perspective il introduit un outil nouveau : **l'involution**. Il consacre une grande partie de son œuvre «*Brouillon project d'une atteinte aux événemens des rencontres d'un cône avec un plan*», publiée en 1639, pour établir la théorie de l'involution. Finalement Desargues démontre la propriété fondamentale des cercles et des coniques Ce théorème était connu sous une forme incomplète avant la découverte, en 1845, de la copie du «*Brouillon Project*» qu'avait faite De La Hire. En langage moderne: «Si un quadrilatère est inscrit dans un cercle et une transversale quelconque coupe les deux couples de côtés opposés et le cercle en trois couples de points, les trois couples de points sont en involution».



(MP.MQ) / (MR.MS) = (NP.NQ) / (NR.NS)

On peut l'étendre aux coniques puisque l'involution de six points est un invariant.
R. Taton signale que la caractéristique essentielle de ce théorème est de donner une relation entre six points quelconques d'une même conique.

Pascal (1623-1662) disciple de Desargues, interprète lui aussi, les coniques comme projections d'un cercle sur un plan. Pascal en 1640 a réuni sous le titre «Essay pour les coniques» quelques-uns des principaux théorèmes du traité complet des coniques. Cet écrit ne nous est parvenu qu'en 1779, par les soins de M. Bossut, dans son édition complète des œuvres de Pascal. Dans ce traité il énonce le théorème de l'hexagramme mystique qui occupe une place centrale dans l'étude des propriétés des coniques. La formulation moderne de ce célèbre théorème est la suivante : si un hexagone est inscrit dans un cercle, alors les points de rencontre des trois couples de côtés opposés sont alignés et réciproquement, si les points de rencontre des trois couples de côtés opposés d'un hexagone sont alignés alors les sommets de l'hexagone appartiennent à un cercle. Ce théorème est décrit par Leibniz dans une lettre (lettre de Leibniz à Etienne Périer du 30 août 1676) en ajoutant : «*Après avoir expliqué la génération des sections du cône, faite optiquement par la projection d'un cercle sur un plan qui coupe le cône des rayons, il explique les propriétés remarquables d'une certaine figure, composée de six lignes droites, qu'il appelle hexagramme mystique*». Pascal fait voir au moyen des projections que tout hexagramme mystique convient à une section conique, et que toute section conique donne un hexagramme mystique. Ce théorème peut donc être étendu aux coniques par la formulation suivante : si un hexagone est inscrit dans une conique, alors les points de rencontre des trois couples de côtés opposés sont alignés et réciproquement, si les points de rencontre des trois couples de côtés opposés d'un hexagone sont alignés alors les sommets de l'hexagone appartiennent à une conique. La réciproque du théorème de Pascal donne une méthode pour construire une conique à partir de cinq points. Ce théorème est donc une propriété fondamentale et caractéristique des coniques.

Philippe De La Hire (1640-1718) reprend la méthode de projection de Desargues et propose un autre type de transformation pour étudier les coniques.

Il a publié trois ouvrages sur les coniques. Le premier, paru en 1673, contenait une méthode de déduction des propriétés d'une conique à partir d'un cercle. Le deuxième, paru en 1679, exprimait les caractérisations de chaque conique à partir de ses foyers. Le troisième paru en 1685 disposait en ordre toutes les propriétés des coniques rencontrées dans les écrits des anciens et des modernes par une méthode fondée sur une ligne divisée harmoniquement. Le traité de 1673 (*La nouvelle méthode en géométrie pour les sections des superficies coniques et cylindriques qui ont pour base des cercles, ou des paraboles, des ellipses et des hyperboles*) est celui où De La Hire se montre vraiment original et novateur. Dans la première partie les coniques sont considérées dans le cône et dans la deuxième partie elle sont engendrées sur le plan. Dans le traité de 1679 (*Nouveaux éléments des sections coniques, les lieux géométriques, la construction ou effectuation des équations*), De La Hire a énoncé la définition bifocale des coniques à centre. Il définit les sections coniques comme celles où la somme (ou la différence) des distances de chacun de leurs points à deux points fixes, est constante, ou bien (cas de la parabole) dont chaque point est à égale distance d'un point et d'une droite fixes. De ce seul point de départ il conclut un grand nombre de propriétés de ces courbes. Cette manière de présenter les coniques a été adoptée ensuite par plusieurs géomètres. Le traité de 1685 (Grand Livre des Sections Coniques) présente pour la première fois, toutes les propriétés des coniques, démontrées par une méthode qui a pour fondement la division harmonique d'une droite, les faisceaux harmoniques et les lignes divisées harmoniquement dans le cercle.

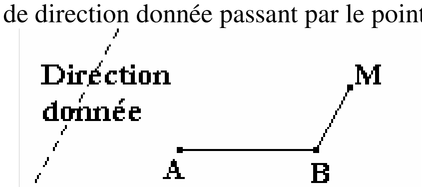
La génération des coniques par des équations

Descartes (1596-1650) publie en 1637 le traité «*Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences*». Cet ouvrage était accompagné de trois appendices intitulés : la dioptrique, les météores et la géométrie.

La «Géométrie» commence par une exposition des principes de la géométrie analytique et contient la discussion d'un problème particulier qui avait été proposé par Pappus dans le septième livre de «la Collection» et dont quelques cas particuliers avaient été traités par

Euclide et Apollonius. C'est le problème des trois et quatre lignes de Pappus. Ce sont les essais tentés pour arriver à le résoudre qui conduisirent Descartes et Fermat à «l'application de l'algèbre à la géométrie», première forme de notre géométrie analytique moderne. On peut trouver les prémisses de cette méthode dans l'œuvre d'Apollonius.
Cette méthode permet une simplification des méthodes d'Apollonius et permet l'étude de nouvelles courbes. Pour rechercher les propriétés d'une courbe il suffit de choisir comme définition une propriété géométrique caractéristique de cette courbe et de l'exprimer au moyen d'une équation entre les coordonnées d'un point quelconque de la courbe. Le traitement de cette équation permet de trouver toutes les autres propriétés de la courbe. C'est la première fois dans l'histoire qu'on utilise le calcul algébrique dans la géométrie.
L'appendice de la «*Géométrie*», traite aussi la question de la classification des courbes algébriques et mécaniques. Descartes rompt avec la tradition qui distinguait les courbes constructibles à la règle et au compas et celles nécessitant d'autres instruments et prépare la voie à une classification des courbes basée sur la nature des équations qui les représentent. Il affirme par exemple que toutes équations du deuxième degré représentent une conique. *«Lorsque cette équation ne monte que jusqu'au rectangle de deux quantités indéterminées, ou bien au carré d'une même, la ligne courbe est du premier et plus simple genre, dans lequel il n'y a que le cercle, la parabole, l'hyperbole et l'ellipse qui soient comprises. »* Dans l'appendice qui traite de la «Dioptrique» il présente, dans le huitième discours, une description de l'ellipse et de l'hyperbole.

Fermat (1601-1665) a développé la méthode des coordonnées dans son traité «*Ad locos planos et solidos isagoge*» publié en 1679 mais écrit en même temps que l'œuvre de Descartes. Nous avons utilisé dans cette étude la traduction française faite par Paul Tannery (1896) du tome troisième des œuvres de Fermat. Dans son traité un point est déterminé par deux longueurs de segments. A partir d'une droite fixe avec une origine A et une direction donnée, un point M est déterminé par les longueurs des segments [AB] et [BM] où B est l'intersection de la droite de direction donnée passant par le point M et la droite fixe.



L'abscisse est mesurée depuis l'origine le long d'une ligne fixe, l'ordonnée depuis l'extrémité de l'abscisse dans une direction donnée qui ne nécessite pas d'être perpendiculaire à l'axe des abscisses. Fermat n'utilise que des coordonnées positives.
Une courbe est définie par une relation entre les deux longueurs AB et BM. Il appelle *propriété spécifique* d'une courbe ce qu'on nomme aujourd'hui *équation*.
Son principe fondamental est : «*toutes les fois que dans une équation finale on trouve deux quantités inconnues, on a un lieu, l'extrémité I de l'une d'elles décrivant une ligne droite ou courbe. »* Le problème principal est de trouver le lieu déterminé par une équation du premier ou du second ordre. Fermat démontre que : Si d.a=b.e (les voyelles indiquent des quantités inconnues, les consonnes des quantités connues) ou si d.r -d.a=b.e, alors I décrit une droite. Si a.e=r.s ou si d.c+a.e=r.a+s.e, I décrit une hyperbole. Si $a^2=e^2$ ou si a^2/e^2 est

dans un rapport donné ou si $(a^2+a.e)/e^2$ est dans un rapport donné, I décrit une ligne droite. Si $a^2=d.e$ ou si $b^2-a^2=d.e$ ou si, I décrit une parabole**.** Si $b^2-a^2=e^2$ ou si, I décrit un cercle. Si $(b^2-a^2)/e^2$ est dans un rapport donné, I décrit une ellipse. Si $(a^2+b^2)/e^2$ est dans un rapport donné, I décrit une hyperbole. A la suite, Fermat dit que «L'équation la plus difficile est celle où a^2 et e^2 figurent avec des termes en a.e» . Si $b^2-2a^2=2.a.e+e^2$, I décrit une ellipse.

En 1665 **Wallis** (1616-1703) a publié un traité «*Tractatus de Sectionibus Conicis*» dans lequel il définit analytiquement les coniques et sans aucune référence au cône. C'est le livre le plus ancien dans lequel les coniques n'apparaissent plus comme sections d'un cône mais comme des courbes du second degré.

Wallis caractérise la parabole par l'équation $p^2 = ld$ rapportée à un repère défini par un diamètre et une parallèle à l'ordonnée par l'extrémité de ce diamètre. (d est l'abscisse du point P, p l'ordonnée du point P et l la longueur du latus rectum par rapport à ce diamètre.

L'ellipse et l'hyperbole sont définies respectivement par les équations $e^2 = ld - ld^2/t$ et $h^2 = ld + ld^2/t$ rapportées à un repère défini par un diamètre et une parallèle à l'ordonnée par l'extrémité de ce diamètre. (d est l'abscisse, e et h les ordonnées, l la longueur du latus rectum [SE] par rapport à ce diamètre et t la longueur du diamètre transverse [RS])

Jan de Witt (1629-1672) dans son traité «*Elementa curvarum Linearum, Liber primus*» publié en **1659** approche les coniques comme des lieux de points mobiles sur le plan et sans se servir du cône. Dans son traité «*Elementa curvarum Linearum, Liber Secundus*» il traite les coniques analytiquement. C'est le premier livre qui est un texte de géométrie analytique. Dans ce deuxième livre, basé sur les idées de Descartes, De Witt utilise la notation et la méthode de Descartes pour l'étude des coniques. Un point M est déterminé par une abscisse et une ordonnée. Les variables et les coefficients sont considérés comme des segments. Ensuite il construit une courbe, choisit un point de cette courbe et montre qu'elle vérifie une équation. Dans le chapitre I, il traite des équations du premier degré. Dans le chapitre II, il montre que les équations $y^2 = ax$, $ay = x^2$, $y^2 = ax+b^2$, $ay+b^2 = x^2$, $y^2 = ax-b^2$, $ay-b^2 = x^2$, $y^2 = -ax+b^2$ et $b^2-ay = x^2$ représentent une parabole. Ensuite il réduit les autres équations à une de ces formes. A la fin de ce chapitre il montre que le lieu des points équidistants d'une droite fixe et d'un point fixe non situé sur elle est une parabole. Dans le chapitre III, il prouve que les équations $yx = f^2$, $ly^2/g = x^2-f^2$, $y^2-f^2 = lx^2/g$ représentent une hyperbole et que l'équation $ly^2/g = f^2-x^2$ représente une ellipse. Il montr**e** que l'hyperbole (ellipse) est le lieu des points avec la propriété que la différence (somme) des distances d'un point aux foyers a une valeur constante.

Les coniques au XVIII^{ème} siècle

Le marquis Guillaume de **l'Hôpital** suivant la nouvelle méthode de De La Hire traite les sections coniques comme des courbes, telles que la somme ou la différence des distances de chacun de leur points à deux points fixes, est constante, ou bien dont chaque point est à égale distance d'un point et d'une droite fixes. L'œuvre du marquis de l'Hôpital «*Traité Analytique des Sections Coniques, et de leur usage pour la résolution des Equations dans les problèmes tant déterminés qu'indéterminés* » a été publiée à titre posthume en 1707.

Leonhard Euler (1707-1783) a publié, en 1748, le traité «*Introductio in analysin Infinitorum*», en deux tomes. Le deuxième tome est consacré à la géométrie analytique. Il présente les principes généraux des courbes algébriques et leur classification par ordres, classes et genres ; il applique aussi ces principes aux sections coniques. Dans le chapitre V du second tome imprimé en 1797 il montre que les différentes espèces de courbes renfermées dans l'équation $0=\alpha+\beta x+\gamma y+\delta xx+\varepsilon xy+\zeta yy$, x et y étant les coordonnées perpendiculaires, sont exactement le cercle, l'ellipse, la parabole et l'hyperbole. Il remarque que ces courbes sont plus connues sous le nom de Sections Coniques parce qu'elles résultent toutes de la section d'un cône. Il examine ensuite les propriétés qu'on peut déduire de leur équation générale, sans recourir à d'autres moyens. Dans le chapitre VI il remarque que «*quoique toutes ces propriétés soient communes à toutes les lignes du second ordre, cependant elle diffèrent beaucoup entre elles par leur figure ; c'est pourquoi il convient de les distribuer en genres, afin d'avoir plus de facilité pour en distinguer les différentes figures, et pour découvrir les propriétés qui conviennent à chaque genre en particulier.* » Il fait une étude spécifique de la parabole, de l'ellipse et de l'hyperbole à partir de l'équation générale $yy = \alpha xx + \beta x + \gamma$. Dans l'appendice *Traité abrégé des surfaces* il traite de la géométrie analytique de l'espace.

Les coniques au XIX^{me} siècle

A. Quételet, professeur à l'Athénée de Bruxelles, élu le 1er février 1820 à l'Académie Royale des sciences et Belles Lettres de Bruxelles, a présenté à l'Académie le 23 décembre 1820 un mémoire intitulé : « Une nouvelle théorie des sections coniques considérées dans le solide». Ce mémoire a été jugé digne d'être imprimé dans le recueil de l'Académie (rapport de M. Garnier du 24 février 1821). (*Nouveaux mémoires de l'Académie de Bruxelles, volume 2, 1822, pp. 124-153*) (c'est dans ce même volume, quelques pages plus loin, que se trouve le mémoire de Dandelin)

Dans l'introduction, Quételet indique : *«Je doute qu'on ait jamais remarqué la relation qui existe dans les sections coniques entre la distance des deux foyers et les distances du sommet du cône aux deux extrémités du grand axe. On aurait vu que la différence de ces dernières distances égale toujours la distance des deux foyers dans l'ellipse; et que leur somme égale la distance des deux foyers dans l'hyperbole.»*

Il donne un résultat principal (pp. 126-127) *«Ainsi la distance des foyers dans une ellipse égale la différence des deux rayons vecteurs, menés du sommet du cône aux extrémités du grand axe de l'ellipse.»*Et plus loin, p.129 il dit : *«Si l'on joint un même point d'une ellipse au foyer de cette ellipse et au sommet du cône, la différence des rayons vecteurs est constante, et vaut la distance du sommet du cône à l'extrémité du petit axe de l'ellipse, moins le demi grand axe de cette même ellipse.»* Ces propriétés lui permettent de construire aisément les foyers de la conique.

Dandelin (1794-1847) présente en 1822 un théorème relatif aux sections d'un cône par un plan sécant où il montre pour la première fois comment déterminer les foyers d'une conique à partir du cône. Il intitule sa contribution *«Mémoire sur quelques propriétés remarquables de la focale parabolique par M.G.Dandelin, officier du génie, au service de S.M. le roi des Pays Bas lu à la séance du 1er avril 1822».* Son célèbre théorème sur la détermination des foyers d'une conique, se trouve dans le *Nouveaux mémoires de l'Académie de Bruxelles*, Tome 2, 1822, pp. 172-202.

Conclusion

Les coniques ont été introduites par les Grecs comme sections d'un cône par un plan. Elles apparaissent initialement comme sections planes d'un cône de révolution par des plans perpendiculaires aux génératrices. Archimède les utilise dans les traités «conoïdes et sphéroïdes» et «la quadrature de la parabole» comme outils pour résoudre des problèmes. Apollonius les définit comme sections planes d'un cône quelconque par des plans non nécessairement perpendiculaires à une génératrice et démontre des propriétés fondamentales liées aux diamètres. Ces propriétés sont équivalentes aux équations cartésiennes rapportées à des axes obliques. Pappus nous fait connaître la caractérisation monofocale utilisée à l'époque d'Euclide. Dans le monde arabe, elles interviennent à partir du cône et ensuite sont transportées dans le plan. Les propriétés focales interviennent directement dans plusieurs démonstrations à cause de l'optique.

Avec Desargues en 1639 qui les interprète comme perspectives de cercles commence une nouvelle phase. Avec la parution des idées de Descartes et Fermat, elles commencent à être étudiées dans le plan, sans référence au cône et sous le point de vue analytique. Des équations particulières du second degré des coniques apparaissent chez Fermat, Wallis et Jan de Witt. Philippe de La Hire presente en 1679 la génération des coniques à partir des propriétés bifocales et sans référence au cône. Euler en 1748 unifie l'étude des coniques au travers d'une équation algébrique générale du second degré. En 1822, Dandelin donne une interprétation géométrique des foyers d'une conique à partir du cône. Plus tard, à partir d'un article de Lebesgue «*les coniques dans l'enseignement secondaire*» publié dans l'Enseignement scientifique en 1933 (Lebesgue, 1942), les trois courbes sont étudiées par une définition commune, soit par un foyer et une directrice, soit en tant que courbes planes tracées sur des cônes de révolution. En 1935, Leconte Th. propose une nouvelle définition commune des trois courbes qui sera retrouvée plus tard dans l'enseignement sous une forme plus simplifiée, celle qui définit les coniques comme lieux géométriques des centres des cercles qui passent par un point fixe et sont tangents à une droite ou un cercle donnés.

Cette recherche nous a donné des éléments pour une étude élémentaire des caractérisations des coniques. Nous distinguons quatre manières différentes de les concevoir qui sont à l'origine de nouvelles théories mathématiques : les coniques comme sections d'un cône par un plan, les coniques comme lieux géométriques, les coniques comme courbes algébriques du second degré et les coniques comme transformées de cercle.

Vincenzo Bongiovanni
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP.

E-mail: vincenzo@pucsp.br