

A SEQUÊNCIA DE PADOVAN OU DE COORDONIER

Francisco Regis Vieira Alves
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE, Brasil

Paula Maria Machado Cruz Catarino
Universidade de Trás-Os-Monstes e Alto D´ouro – UTAD, Portugal.

(aceito para publicação em junho de 2022)

Resumo

De modo geral, os autores de livros de História da Matemática dedicam um expediente de discussão considerável aos números de Fibonacci. De fato, uma profusão de exemplos e sua manifestação, por intermédio de propriedades, de toda ordem, parecem eclipsar o papel e a constatação da ocorrência pitoresca de outras entidades matemáticas numéricas. Por conseguinte, o presente trabalho busca envidar uma discussão em torno do número plástico e da sequência de Padovan. Seu espaço de utilidade singular foi detectado na Arquitetura, todavia, por intermédio de um processo matemático evolutivo, histórico e epistemológico, o trabalho constata o interesse atual na pesquisa em Matemática, cujo vigor evolutivo pode ser objetivado por intermédio do estabelecimento de novas definições matemáticas que representam, grosso modo, seu processo ininterrupto de formalização e de generalização. Isso posto, propugnam-se, ao final do mesmo, importantes e significativas repercussões e uma legítima trajetória epistemológica evolutiva que comunica ao leitor um viés não estático e evolutivo do pensamento e dos objetos matemáticos.

Palavras-chave: Números de Padovan, Sequência, Evolução histórica, Definições matemáticas.

[THE PADOVAN OR COORDONIER SEQUENCE]

Abstract

In general, the authors of Mathematical History books devote considerable discussion to Fibonacci numbers. In fact, a profusion of examples and their manifestation, through properties, of all order, seem to eclipse the role and the observation of the picturesque

occurrence of other numerical mathematical entities. Therefore, the present work seeks to make a discussion about the plastic number and sequence of Padovan. Its singular space of utility was detected in the Architecture, however, through an evolutionary, historical and epistemological mathematical process, the work confirms the current interest in Mathematics research, whose evolutionary vigor can be objectified through the establishment of new mathematical definitions that represent, in large part, its uninterrupted process of formalization and generalization. This, at the end of the same, proposes important and significant repercussions and a legitimate evolutionary epistemological trajectory that communicates to the reader a non-static and evolutionary bias of thought and mathematical objects.

Keywords: Padovan numbers, Sequence, Historical evolution, Mathematical definitions.

Introdução

Propugnamos um caráter essencial e imprescindível objetivando a compreensão e o entendimento adequado acerca de um viés evolutivo irrefreável e generalizante das ideias matemáticas. Tais ideias matemáticas podem ser registradas, por vezes, por intermédio de uma apreciação e da percepção de exemplos particulares, bem como a útil identificação de processos e de objetos matemáticos que, de um ponto de vista local e histórico, possuem, indubitavelmente, um intrínseco cenário de gênese/origem, todavia, do ponto de vista epistemológico, carregam um valor indene que se consubstancia e se revela por uma espécie de vigor diacrônico, capaz de ser observado por intermédio do seu processo de generalização e da sistematização progressiva em um contínuo temporal. (ALVES, 2017).

No esteio do pensamento anterior, assumimos uma caráter de imprescindibilidade acerca dos elementos de ordem epistemológica e de natureza histórica, assim como o processo evolutivo dos conhecimentos matemáticos. Dessa forma, no presente trabalho trazemos uma discussão em torno dos números de Padovan de Coordonier. Como iremos demonstrar nas seções subsequentes, podem ser observadas algumas semelhanças entre os números de Padovan e os números de Fibonacci, na medida em que, de modo quase invariante, deparamos nos livros de História da Matemática - HM uma restritiva profusão de exemplos de representações geométricas, envolvendo relações intrigantes com a divina proporção e os números de Fibonacci, todavia não registramos um espaço correspondente para os números de Padovan. Abordaremos nas seções subsequentes, de modo preliminar, o trabalho do arquiteto alemão Hans van der Laan (1904–1991), que buscou seguir um estilo de arquitetura baseada na razão áurea mas que, ao passo que considerou as três dimensões, H. Laan descobriu o número plástico ψ' que, como demonstraremos, possui íntima relação com a sequência de Padovan, entretanto, na Matemática, Gérard Cordonnier (1907–1977) desenvolveu, também, alguns estudos contemporâneos aos estudos de Hans van der Laan.

Finalmente, em consonância com uma necessidade do entendimento evolutivo do conhecimento matemático, nas últimas seções, apresentaremos um exemplo particular das tendências de pesquisa atual e dos trabalhos produzidos em torno da generalização da

sequencia recorrente de segunda ordem, nominada de sequência Padovan ou de Coordonier e que recebeu tal denominação devido aos trabalhos posteriores do também arquiteto Richard Padovan (1935–).

O número plástico

Marohnić & Strmečki (2012) comentam que no ano de 1928, após abandonar os estudos em arquitetura, o monge noviço Hans van der Laan (1904–1991) descobriu um novo e único sistema de arquitetura proporcional. Segundo Marohnić & Strmečki (2012, p. 3) a “sua construção é completamente baseada em um único irracional cujo valor é chamado de número plástico ou constante plástica, cujo valor aproximado é $\psi = 1.324718... \approx \frac{4}{3}$ ”.

Cabe observar, todavia, que tanto Marohnić & Strmečki (2012, p. 3) quanto Yilmaz (2015, p. 2) observam que os números que determinam a razão anterior foram estudados pela primeira vez por Gérard Cordonnier (1907-1977).

Weiss (2014, p. 81) explica, no contexto da arquitetura, que “a razão áurea, o retângulo áureo, a espiral áurea proporcionaram a origem de várias generalizações”. Weiss (2014) recorda, por exemplo, os trabalhos do arquiteto Hans van der Laan, que buscou determinar modelo análogo 3D para a razão áurea, aplicando no seu *design* de Arquitetura. Weiss (2014, p. 81) explica que “equações características para determinados valores aproximados podem ser formuladas como condições fechadas geométricas. Valores médios, como conceitos matemáticos, são dimensionados como sendo justamente números irracionais”. Por sua vez, Voet e Schoonjans (2012), por exemplo, observam que o trabalho de Hans van der Laan é puramente arquitetônico e, também, matemático.

Spinadel e Buitrago (2009, p. 163) explicam que “Hans van der Laan, arquiteto e membro da ordem beneditina, introduziu de forma pioneira a noção de número plástico $\psi \simeq 1.3247179572447...$ como razão envolvendo uma escala geométrica de objetos tridimensionais”. Tal grandeza constitui uma das soluções (reais) da equação cúbica $x^3 - x - 1 = 0$ e que representa uma das equações cúbicas que pertence à família dos trinômios gerais descritos do tipo $x^n - x - 1 = 0, n = 2, 3, \dots$ (SPINADEL, 1999). Voet e Schoonjans (2012, p. 255) comentam que “seu número plástico possui o vigor do seu próprio sistema proporcional, sendo testado e usado por vários arquitetos e matemáticos”.

Por outro lado, Voet e Schoonjans (2012, p. 255) comentam que Richard Padovan descreveu um tratado biográfico sobre Hans van der Laan, em 1994, que deixou de lado o entendimento essencialmente religioso, que influenciava fortemente o monge beneditino holandês e enfatizou, sobretudo, o pensamento sistemático e matemático do mesmo. Pimm e Sinclair (2000, p. 233) comentam que, do ponto de vista da abstração, R. Padovan veria a matemática como uma criação feita pelo homem, uma construção puramente artificial, um sistema de sinais convencionais e as regras para manipulá-los. A natureza é assim algo com que podemos interpretar o pensamento matemático só porque a matemática é uma criação humana. Um pouco mais adiante, expressamos um viés filosófico do pensamento de Padovan (1999), a partir do seguinte fragmento:

“Considerar a natureza como indescritível e talvez insondável, a Ciência e a Arte como abstrações, construções artificiais que nós evocamos com o sentido de compreendê-las e comandá-las [...] a tendência em sustentar que nós mesmos, como seres humanos, possuímos a afinidade natural e com a qual conhecemos e compreendemos. Le Corbusier chama de afinidade como um traço indefinível absoluto, que reside na profundidade de nosso ser”. (PADOVAN, 1999, p. 12)

Na figura 1 divisamos uma imagem do arquiteto holandês Hans van der Laan. Voet e Schoonjans (2012, p. 259) observam que “as elaborações proporcionadas por H. V. Laan possuem uma matriz tridimensional de ritmos. Um espaço polirrítmico definido por várias séries e sua superposição espacial”. Ademais, o número plástico se coloca em uma análise de perspectiva de síntese. Por intermédio do número plástico ψ' , é possível gerar a realidade atual e concreta, o qual se configura como uma relação de relações. Na figura 1, ao lado direito, visualizamos um exemplo de construção de um mosteiro beneditino cuja construção foi balizada pelo modelo desenvolvido por Hans van der Laan e que foi objeto de estudo e pesquisa minuciosa para Richard Padovan (1935 –?).

Do ponto de vista geométrico, o número plástico possui significados e interpretações no plano e no espaço. Na figura 2, ao lado esquerdo, Stewart (2004, p. 89) discute a representação planar de uma espiral formada a partir dos números de Padovan.



Figura 1. Explicações sobre as motivações religiosas que influenciaram o pensamento de Hans van der Laan segundo Voet e Schoonjans (2012)

Ainda na figura 2, ao lado direito, Weiss (2014) indica uma construção com os “retângulos de prata” que conduzem para a determinação da “espiral de prata”. Na seção subsequente abordaremos, de modo mais detalhado, alguns aspectos matemáticos sobre os números que adquiriram maior popularidade a partir do trabalho de Padovan. Decerto que os limites do trabalho atual não permitem uma discussão minuciosa do trabalho de Hans van der Laan, cujo viés sensitivo, sensorial e espiritual dermacaram um estilo e um *modus operandi* vigoroso em Arquitetura, e que, de forma insofismável, extrapola o interesse do presente estudo. (GAZALÉ, 1999; GONZÁLEZ-DÍAZ; GARCÍA-NAVARRO, 2016;

GUTIÉRREZ, 2009). Na seção seguinte, registraremos a descrição de uma sequência numérica nominada, conforme explicações de Stewart (2000, p. 19), como a sequência de Padovan (ou sequência de Cordonnier).

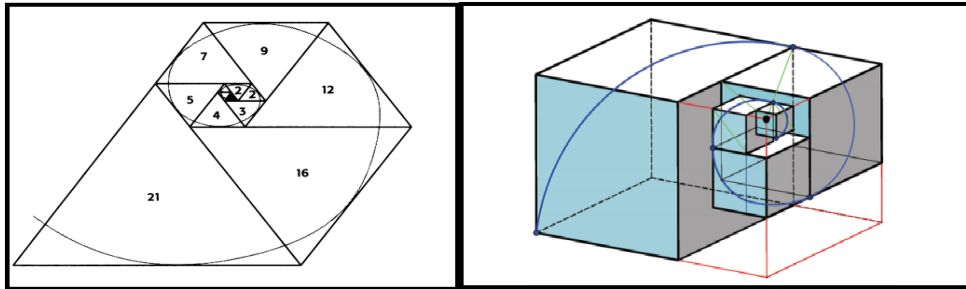


Figura 2. Discussão da espiral formada pelos números de Padovan segundo Voet e Schoonjans (2012) e comentários sobre o processo de generalização e a visualização de razões com projeção no espaço e os prismas de Laan segundo Weiss (2014, p. 17)

Os números de Padovan ou de Cordonnier

Alsina e Nelsen (2015, p. 154) recordam que a sequência de Padovan $\left\{ P_n \right\}_{n=0}^{\infty}$, cujo nome foi devido ao arquiteto Richard Padovan, é uma espécie de “primo” de uma outra sequência, a bem mais conhecida sequência de Fibonacci. Stewart (2000, p. 19) comenta que “gostaria de nomear tal sequência como sequência de Padovan, estudada por Richard Padovan e, por uma coincidência interessante, Padovan possui como mesma origem o termo ‘Padoue’, uma vila um pouco distante de Pisa, de onde Fibonacci foi originário”. A mesma é definida de acordo com a definição 1 que vemos logo abaixo. O trabalho de R. Padovan assumiu importante posição na Arquitetura, e sua relação intrínseca com a Matemática é indubitável, como explica Sousa Gomes (2012, p. 25) quando acentua que “a título de exemplo podemos referir a sequência de Fibonacci ao sistema áureo ou a associação da sequência de Padovan ao sistema plástico”. Stewart (2000, p. 20) acrescenta ainda que Alan Saint George fundou várias esculturas e monumentos empregando relações e propriedades da sequência, tendo em vista suas propriedades tridimensionais.

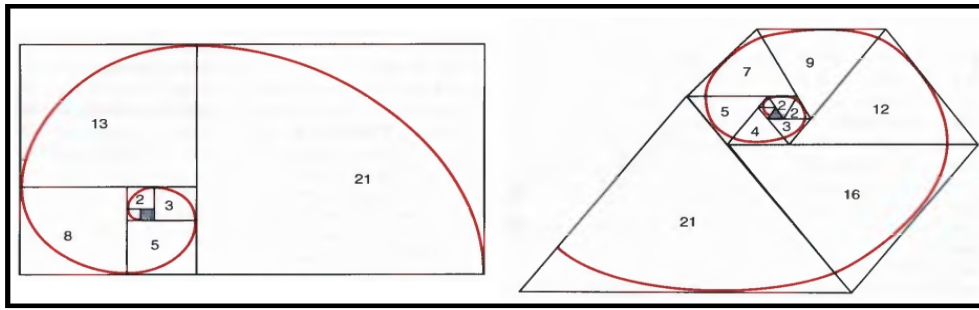


Figura 3. Comparação das propriedades das espirais originadas da sequência de Fibonacci e da sequência de Padovan segundo Stewart (2000)

Definição 1: A sequência de Padovan é definida pela seguinte recorrência $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$, $n \geq 3$, cujos valores indiciais são indicados por $P_0 = P_1 = P_2 = 1$.

Tal recursão de segunda ordem proporciona a origem dos números de Padovan: 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37, ... (*) Todavia, “Padovan indicou o crédito da descoberta ao matemático francês Gérard Cordonnier (1907–1977) e observa que a sequência foi descoberta, de modo independente, por Dom Hans van der Laan, como o número plástico” (ALSINA E NELSEN, 2015, p. 154), indicado na literatura, de formas

variadas, como por exemplo $\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \dots}}}}} = \psi$, que podemos até comparar

com outra expressão $\sqrt[2]{1 + \sqrt[2]{1 + \sqrt[2]{1 + \sqrt[2]{1 + \sqrt[2]{1 + \dots}}}}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, que corresponde ao número

de ouro. Stewart (2000, p. 20) explica ainda o estudo de uma outra sequência, com propriedades semelhantes, que se tornou popularizada pelos trabalhos de Edouard Lucas (1842 – 1891) e nominada por sequência de Perrin, todavia, com os valores iniciais diferentes.

Observamos, entretanto, que a definição 1 poder ser caracterizada, ainda, pela seguinte consideração para os valores arbitrários iniciais: $P_0 = 0, P_1 = 0, P_2 = 1$. (SOKHUMA, 2013, p. 7093). Decerto que, a despeito de uma reordenação dos termos da sequência $\left\{ P_n \right\}_{n=0}^{\infty}$, podemos determinar, de modo preciso, a mesma lista numérica chamada por alguns autores de sequência de Cordonnier (SABHIN, 2017).

Observamos, com origem na relação, que $P_n = P_{n-2} + P_{n-3} \cdot \frac{P_n}{P_{n-2}} = 1 + \frac{P_{n-3}}{P_{n-2}}$.

Logo em seguida, escrevemos $\frac{P_n}{P_{n-1}} \cdot \frac{P_{n-1}}{P_{n-2}} = 1 + \frac{1}{\frac{P_{n-2}}{P_{n-3}}}$. Em seguida, vamos admitir que o

seguinte limite existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = \psi$, onde tomamos a seguinte expressão

$\frac{P_n}{P_{n-1}} = \psi_n, n \geq 1$. Logo em seguida, passando o sinal do limite na igualdade que

indicamos em (*), teremos: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{P_n}{P_{n-1}} \cdot \frac{P_{n-1}}{P_{n-2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{P_{n-2}}{P_{n-3}}} \right)$ e, portanto, determinamos

que $\lim_{n \rightarrow \infty} (\psi_n \cdot \psi_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\psi_{n-2}} \right) \cdot \psi \cdot \psi = 1 + \frac{1}{\psi}$. De imediato, determinamos

a seguinte equação $\psi^3 - \psi - 1 = 0$. Cabe observar que as demais raízes são dadas por

$$\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} \approx -0.662359 \pm 0.56228i.$$

Stewart (2008) apresenta uma interessante explicação sobre a origem dos números de Padovan e relaciona a sequência de Padovan com a sua “prima”, a emblemática sequência de Fibonacci.

“Eu chamo esta seqüência de números Padovan porque o arquiteto Richard Padovan me contou sobre eles, embora ele negue qualquer responsabilidade. Curiosamente, “Pádova” é a forma italiana de “Pádua”, e Fibonacci era de Pisa, a cerca de cento e cinquenta quilômetros de distância. Eu sou tentado a renomear os números de Fibonacci “números Pisan” para refletir a geografia italiana, mas como você pode ver eu consegui resistir.” (STEWART, 2008, p. 104)

Pouco mais adiante, Stewart (2008) observa que o quociente envolvendo os números de Fibonacci possui um crescimento mais rápido, tendo em vista que o número

plástico é menor do que número de ouro $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Por outro lado, podemos observar a

seguinte decomposição polinomial $x^5 - x^4 - 1 = (x^3 - x - 1) \cdot (x^2 - x + 1)$. Mais adiante, Stewart (2008, p. 104) comenta que a equação quártica anterior pode ser derivada (associada) da seguinte relação de recorrência $x_n = x_{n-1} + x_{n-5}$ e que, facilmente, podemos observar que tal recorrência “representa uma regra alternativa para se determinar demais termos da sequência de Padovan” (STEWART, 2008, p. 105). Ademais, o número

plástico $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = \psi'$ representa, também, uma de suas raízes. Outrossim, podemos

constatar, ainda, que a seguinte relação de recorrência (associada) $x_n = x_{n-3} + x_{n-4} + x_{n-5}$ também pode gerar os números que indicamos anteriormente em (*).

Por outro lado, Aarts, Fokkink e Kruijtzter (2001, p. 57) observam que algumas propriedades derivadas da divina proporção concorreram para a seguinte definição abaixo.

Definição 2: Um número real $p > 1$ é chamado de número mórfico se existem números naturais m e n , de forma que satisfazem $p + 1 = p^m$ e $p - 1 = p^{-n}$.

De imediato, com origem na definição anterior, podemos constatar que ψ' satisfaz as seguintes equações $\psi'^5 - \psi'^4 = 1$. $\therefore \psi' - 1 = \psi'^{-4}$ e ainda que $\psi'^3 - \psi' - 1 = 0$, dessa forma, podemos escrever $\psi' + 1 = \psi'^3$. Por conseguinte, “o número plástico é também um número mórfico, com $m = 3, n = 4$ ” (AARTS; FOKKINK E KRUIJTZER, 2001, p. 57). O caráter pitoresco da definição anterior pode ser compreendido a partir de um conjunto de números extremamente pequenos que satisfazem as condições da definição 2.

Teorema 1: Existem apenas dois números mórficos, nominados por a divina proporção e o número plástico de Dom Van der Laan. (AARTS; FOKKINK E KRUIJTZER, 2001).

Demonstração: Detalhes da demonstração podem ser verificados diretamente no trabalho de Aarts, Fokkink e Kruijtzter (2001) ou Marohnić, Kovačić e Radišić (2013).

Logo em seguida, trazemos um teorema que fornece a descrição de uma fórmula explícita dos termos presentes na sequência de Padovan ou de Coordonier, semelhante ao resultado que discutimos concernente à fórmula de Binnet ou de De Moivre ou de Lamé (ALVES, 2017). Maiores detalhes e uma aplicação da configuração espiral determinada por tal sequência podem ser apreciados no trabalho de Audet (2013) e Stewart (2000).

Teorema 2: Sejam as três raízes da equação cúbica r_1, r_2, r_3 que indicamos por $x^3 - x - 1 = 0$. Então, podemos escrever a fórmula explícita para os números de Padovan

$$P_n = \frac{(1-r_1)(1-r_2)}{(r_0-r_1)(r_0-r_2)} r_0^n + \frac{(1-r_0)(1-r_2)}{(r_1-r_0)(r_1-r_2)} r_1^n + \frac{(1-r_0)(1-r_1)}{(r_2-r_0)(r_2-r_1)} r_2^n,$$

para $n \geq 0$. E valem as seguintes relações: $\left| \frac{r_1}{r_0} \right| < 1, \left| \frac{r_2}{r_0} \right| < 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = \psi$.

Demonstração: Como mostramos no parágrafo anterior, a equação de recorrência $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$ determina o polinômio característico $x^3 - x - 1 = 0$ e consideramos suas três raízes r_1, r_2, r_3 . Daí, buscamos determinar que $P_n = A \cdot r_0^n + B \cdot r_1^n + C \cdot r_2^n$.

Mas, tendo em vista que foram tomados $P_0 = P_1 = P_2 = 1$, escrevemos as condições:

$$\begin{cases} P_0 = A \cdot r_0^0 + B \cdot r_1^0 + C \cdot r_2^0 = 1 \\ P_1 = A \cdot r_0^1 + B \cdot r_1^1 + C \cdot r_2^1 = 1 \\ P_2 = A \cdot r_0^2 + B \cdot r_1^2 + C \cdot r_2^2 = 1 \end{cases} \therefore \begin{cases} A + B + C = 1 \\ A \cdot r_0 + B \cdot r_1 + C \cdot r_2 = 1 \\ A \cdot r_0^2 + B \cdot r_1^2 + C \cdot r_2^2 = 1 \end{cases} \text{ . Neste caso,}$$

buscamos isolar e determinar as expressões correspondentes para as incógnitas A, B, C .

Para tanto, usaremos a regra de Cramer da seguinte forma para determinar que:

$$A = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & r_1 & r_2 \\ 1 & r_1^2 & r_2^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_0 & r_1 & r_2 \\ r_0^2 & r_1^2 & r_2^2 \end{vmatrix}} = \frac{(1-r_1)(1-r_2)(r_1-r_2)}{(r_0-r_1)(r_0-r_2)(r_1-r_2)} = \frac{(1-r_1)(1-r_2)}{(r_0-r_1)(r_0-r_2)}, B =$$

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_0 & 1 & r_2 \\ r_0^2 & 1 & r_2^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_0 & r_1 & r_2 \\ r_0^2 & r_1^2 & r_2^2 \end{vmatrix}} = \frac{(r_0-1)(r_0-r_2)(1-r_2)}{(r_0-r_1)(r_0-r_2)(r_1-r_2)} = \frac{(1-r_0)(1-r_2)}{(r_1-r_0)(r_1-r_2)}, C = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_0 & r_1 & 1 \\ r_0^2 & r_1^2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_0 & r_1 & r_2 \\ r_0^2 & r_1^2 & r_2^2 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{(r_0-r_1)(r_0-1)(r_2-1)}{(r_0-r_1)(r_0-r_2)(r_1-r_2)} = \frac{(1-r_0)(1-r_1)}{(r_2-r_0)(r_2-r_1)}.$$

Por outro lado, consideraremos a equação característica e sua decomposição em fatores irredutíveis da forma

$x^3 - x - 1 = (x - r_0)(x - r_1)(x - r_2)$ e que $r_1 = \overline{r_2}, r_0 > 0$. Fazendo as contas, devemos determinar as seguintes relações: $r_0 + r_1 + r_2 = 0, r_0 r_1 + r_0 r_2 + r_1 r_2 = -1, r_0 r_1 r_2 = 1$.

Agora, com origem nas relações anteriores, podemos observar o comportamento:

$$\begin{aligned} \left| \frac{r_1}{r_0} \right| &= \frac{|r_1|}{|r_0|} = \frac{\sqrt{r_1 \cdot r_1}}{|r_0|} = \frac{\sqrt{r_1 \cdot r_2}}{r_0} = \frac{\sqrt{-1 - r_0 \cdot r_1 - r_0 \cdot r_2}}{r_0} = \frac{\sqrt{-1 - r_0 \cdot r_1 - r_0 \cdot r_2}}{\sqrt{r_0^2}} = \sqrt{\frac{-1 - r_0 \cdot r_1 - r_0 \cdot r_2}{r_0^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{-1 - r_0(r_1 + r_2)}{r_0^2}} = \sqrt{\frac{-1 - r_0(-r_0)}{r_0^2}} = \sqrt{\frac{-1 + r_0^2}{r_0^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{r_0^2}} < 1. \end{aligned}$$

vamos observar que: $\left| \frac{r_2}{r_0} \right| = \frac{|r_2|}{|r_0|} = \frac{|r_1|}{|r_0|} = \left| \frac{r_1}{r_0} \right| < 1$, visto que $|r_2| = |r_1|$. Finalmente,

vejamos o comportamento do seguinte limite: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A \cdot r_0^{n+1} + B \cdot r_1^{n+1} + C \cdot r_2^{n+1}}{A \cdot r_0^n + B \cdot r_1^n + C \cdot r_2^n} =$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A \cdot r_0 + B \cdot \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^n \cdot r_1 + C \cdot \left(\frac{r_2}{r_0}\right)^n \cdot r_2}{A + B \cdot \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^n \cdot r_1 + C \cdot \left(\frac{r_2}{r_0}\right)^n \cdot r_2} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(A \cdot r_0 + B \cdot \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^n \cdot r_1 + C \cdot \left(\frac{r_2}{r_0}\right)^n \cdot r_2 \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(A + B \cdot \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^n \cdot r_1 + C \cdot \left(\frac{r_2}{r_0}\right)^n \cdot r_2 \right)} = \frac{A \cdot r_0 + 0 + 0}{A + 0 + 0} \\ &= r_0 = \psi' = \sqrt[3]{\frac{9 + \sqrt{69}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{9 - \sqrt{69}}{18}} = 1.324718... \approx \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Por fim, observamos a relação inesperada para $\psi'^3 = 1 + \psi' \therefore \psi' = \sqrt[3]{1 + \psi'}$.

Recursivamente, obteremos que $\psi' = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \dots}}}}}}}$.

Doravante, apresentaremos ao leitor algumas propriedades combinatórias e propriedades matriciais originadas da sequência de Padovan ou de Coordonier. Mais uma vez, observamos grande similaridade de propriedades correspondentes que podem ser registradas no estudo de sua “prima” mais emblemática, popularizada a partir do trabalho de Fibonacci (CHOLET, 2008). Por fim, apresentaremos duas definições formais até agora não discutidas/introduzidas na literatura especializada e, por conseguinte, envolvendo certo teor de ineditismo no trabalho.

A sequência de Padovan, generalizações e propriedades matriciais

Na seção passada, apresentamos a definição $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}, n \geq 3$. Doravante, reparemos que, se $n = 2 \therefore P_2 = P_0 + P_{-1} \leftrightarrow P_{-1} = P_2 - P_0 = 1 - 1 = 0$. Ou ainda, se tomarmos que $n = 1 \therefore P_1 = P_{-1} + P_2 \leftrightarrow P_{-2} = P_1 - P_2 = 1 - 0 = 1$. Mais uma vez, podemos considerar ainda $n = 0 \therefore P_0 = P_{-2} + P_{-3} \leftrightarrow P_{-3} = P_0 - P_{-2} = 1 - 1 = 0$. Para assegurar nosso argumento anterior e convencer de fato o leitor, vejamos ainda que $n = -1 \therefore P_{-1} = P_{-3} + P_{-4} \leftrightarrow P_{-4} = P_{-1} - P_{-3} = 0 - 0 = 0$ ou ainda encontramos que $n = -2 \therefore P_{-2} = P_{-4} + P_{-5} \leftrightarrow P_{-5} = P_{-2} - P_{-4} = 1 - 0 = 1$. Na tabela abaixo, exibimos os demais valores determinados com arrimo do mesmo argumento. De modo recorrente, podemos empregar a seguinte recorrência $P_{n-3} = P_n - P_{n-2}, n \leq 2$. Na figura abaixo, divisamos alguns valores particulares determinados por Weger (1997, p. 632), envolvendo números de Padovan com índices negativos. Para otimizar nossos cálculos, vamos adotar a seguinte representação matricial introduzida por Sokhuma (2013) ao definir a seguinte

matriz $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Sokhuma (2013, p. 7093) assume, todavia, os seguintes valores

iniciais: $P_0 = 0, P_{-1} = 0, P_{-2} = 1$. Reparemos que, se consideramos a definição 1, podemos ter a impressão de que se trata de outra sequência, tendo em vista os valores iniciais diferentes, todavia, a menos de uma reordenação, provocada pela mudança dos valores iniciais, temos a mesma sequência numérica que indicamos na seção anterior.

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_{-m}	-1	1	0	-1	2	-2	1	1	-3	4
m	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
P_{-m}	-3	0	4	-7	7	-3	-4	11	-14	10
m	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
P_{-m}	1	-15	25	-24	9	16	-40	49	-33	-7
m	31	32	...							
P_{-m}	56	-89	...							

Figura 4. Discussão sobre o processo de extensão dos números com índices inteiros negativos para a sequência de Padovan segundo Weger (1997)

Nesse caso particular, com a recorrência $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$, determinamos o seguinte conjunto de números: $0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, \dots$. Assim, alguns valores iniciais se modificam, todavia, a partir da quarta posição, passamos a determinar os mesmos elementos que indicamos em (*). Em um trabalho recente, deparamos a família de

$$\text{matrizes: } Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, Q_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, Q_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observamos, entretanto, que podemos ainda considerar uma sexta matriz que denotaremos

$$\text{por } Q_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = Q_2^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T. \text{ Ora, depreendemos, facilmente, as}$$

seguintes relações envolvendo o conjunto $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6\}$ e suas matrizes

$$\text{transpostas: } Q_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Q_1^T, Q_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Q_3^T \text{ e } Q_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = Q_2^T.$$

A partir do conjunto $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6\}$, observamos que a equação característica $\chi^3 - \chi - 1 = 0$, que possui como raiz real, precisamente, o número plástico, pode ser descrita na forma matricial $X^3 - X - I = 0$ e, facilmente, podemos verificar que $Q_i^3 - Q_i - I_{2 \times 2} = 0$, para $1 \leq i \leq 6$. Tal propriedade nos conduz a denominá-las como “matrizes plásticas”, como intimamente decorrentes do número plástico.

Por outro lado, podemos facilmente observar as seguintes matrizes

$$Q^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & P_1 \\ P_1 & P_3 & P_2 \\ P_2 & P_4 & P_3 \end{pmatrix}, Q^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & P_1 \\ P_1 & P_3 & P_2 \\ P_2 & P_4 & P_3 \end{pmatrix},$$

$$Q^5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & P_1 \\ P_1 & P_3 & P_2 \\ P_2 & P_4 & P_3 \end{pmatrix}, Q^5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & P_1 \\ P_1 & P_3 & P_2 \\ P_2 & P_4 & P_3 \end{pmatrix},$$

$$Q^6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & P_1 \\ P_1 & P_3 & P_2 \\ P_2 & P_4 & P_3 \end{pmatrix}. \text{ Similarmente, observemos ainda que}$$

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{-2} & P_0 & P_{-1} \\ P_{-1} & P_1 & P_0 \\ P_0 & P_2 & P_1 \end{pmatrix}, \quad Q^{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{-3} & P_{-1} & P_{-2} \\ P_{-2} & P_0 & P_{-1} \\ P_{-1} & P_2 & P_0 \end{pmatrix},$$

$$Q^{-3} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{n-1} & P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n+2} & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_{n+3} & P_{n+2} \end{pmatrix}, \quad Q^{-4} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{n-1} & P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n+2} & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_{n+3} & P_{n+2} \end{pmatrix},$$

$$Q^{-5} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{n-1} & P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n+2} & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_{n+3} & P_{n+2} \end{pmatrix} \text{ etc. Empregaremos o argumento indutivo de}$$

Sokhuma (2013), assumindo por indução que $Q^n = \begin{pmatrix} P_{n-1} & P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n+2} & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_{n+3} & P_{n+2} \end{pmatrix}$.

Em seguida, podemos facilmente ver que

$$Q^{n+1} = Q^n \cdot Q = \begin{pmatrix} P_{n-1} & P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n+2} & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_{n+3} & P_{n+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_n & P_{n+1} & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_{n+2} & P_{n+2} \\ P_{n+2} & P_{n+3} & P_{n+3} \end{pmatrix}. \text{ No caso das}$$

matrizes inversas, recordando a propriedade $(Q^{-1})^n = Q^{-n}$, poderemos notar ainda:

$$Q^{-n-1} = Q^{-n} \cdot Q^{-1} = \begin{pmatrix} P_{-n-1} & P_{-n+1} & P_{-n} \\ P_{-n} & P_{-n+2} & P_{-n+1} \\ P_{-n+1} & P_{-n+3} & P_{-n+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P_{-n-1} + P_{-n+1} & P_{-n} & P_{-n-1} \\ -P_{-n} + P_{-n+2} & P_{-n+1} & P_{-n} \\ -P_{-n+1} + P_{-n+3} & P_{-n+2} & P_{-n+1} \end{pmatrix}. \text{ Mas}$$

recordamos, por exemplo, que: $P_{-n+1} = P_{-n-1} + P_{-n-2}$. Fazendo as substituições,

$$\text{encontraremos a seguinte potência: } Q^{-n-1} = \begin{pmatrix} P_{-n-2} & P_{-n} & P_{-n-1} \\ P_{-n-1} & P_{-n+1} & P_{-n} \\ P_{-n} & P_{-n+2} & P_{-n+1} \end{pmatrix}, \text{ para } n \geq 1.$$

Lema 1: Para todo inteiro positivo n , temos $Q^{-n} = \begin{pmatrix} P_{-n-1} & P_{-n+1} & P_{-n} \\ P_{-n} & P_{-n+2} & P_{-n+1} \\ P_{-n+1} & P_{-n+3} & P_{-n+2} \end{pmatrix}$.

Demonstração: Basta ver os argumentos predecessores no caso de Sokhuma (2013).

Agora, antes de finalizarmos a seção atual, vejamos algumas propriedades provenientes das somas de termos de números de Padovan para podemos verificar a correspondente expansão para as somas, com os correspondentes índices inteiros.

Teorema: Para todo inteiro positivo $n \geq 0$, determinamos as seguintes somas de

termos: (i) $\sum_{i=0}^n P_i = P_{n+3} + P_{n+2} - P_1 - P_2$; (ii) $\sum_{i=0}^n P_{2i} = P_{2n+3} - P_1$; (iii)

$\sum_{i=0}^n P_{2i+1} = P_{2n} - P_2$; (iv) $\sum_{i=0}^n P_{-i} = P_2 + P_3 - P_{-n} - P_{-n+1}$; (v) $\sum_{i=0}^n P_{-2i} = P_3 - P_{-2n+1}$;

(vi) $\sum_{i=0}^n P_{-2i-1} = P_2 - P_{-2n}$.

Demonstração: De imediato, podemos considerar as seguintes somas e cancelamentos

alternados: $\begin{cases} P_3 = P_1 + P_0 \\ P_4 = P_2 + P_1 \\ P_5 = P_3 + P_2 \\ P_6 = P_4 + P_3 \\ P_7 = P_5 + P_{n-3} \\ P_8 = P_6 + P_5 \\ P_9 = P_7 + P_6 \\ \vdots \\ P_n = P_{n-2} + P_{n-3} \end{cases} \therefore \begin{cases} P_0 = P_3 - P_1 \\ P_1 = P_4 - P_2 \\ P_2 = P_5 - P_3 \\ P_3 = P_6 - P_4 \\ P_4 = P_7 - P_5 \\ P_5 = P_8 - P_6 \\ P_6 = P_9 - P_7 \\ \vdots \\ P_n = P_{n+3} - P_{n-1} \end{cases}$. Assim, poderemos determinar a

soma dos n primeiros números de Padovan, que indicamos $\sum_{i=0}^n P_i = P_{n+3} + P_{n+2} - P_1 - P_2$.

Nas somas anteriores, se considerarmos apenas os índices de ordem par, por intermédio de

cancelamentos telescópicos, encontraremos $\sum_{i=0}^n P_{2i} = P_{2n+3} - P_1$ e, tomando os termos de

ordem ímpar, encontraremos ainda que $\sum_{i=0}^n P_{2i+1} = P_{2n} - P_2$. De forma semelhante, escrevemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_3 = P_1 + P_0 \\ P_2 = P_0 + P_{-1} \\ P_1 = P_{-1} + P_{-2} \\ P_0 = P_{-2} + P_{-3} \\ P_{-1} = P_{-3} + P_{-4} \\ P_{-2} = P_{-4} + P_{-5} \\ \vdots \\ P_{-n+3} = P_{-n+1} + P_{-n} \end{array} \right. . \text{ Mais uma vez, agruparemos os termos, considerando os devidos}$$

cancelamentos, para determinar que $\sum_{i=0}^n P_{-i} = P_2 + P_3 - P_{-n} - P_{-n+1}$. De modo análogo,

encontraremos ainda que $\sum_{i=0}^n P_{-2i} = P_3 - P_{-2n+1}$ e $\sum_{i=0}^n P_{-2i-1} = P_2 - P_{-n}$.

A pesquisa (contemporânea) atual sobre a sequência (generalizada) de Padovan

Nas seções anteriores, abordamos algumas propriedades fundamentais a respeito do número plástico e sua íntima relação com a sequência de Padovan. Agora, preservando uma perspectiva que defendemos em nossos trabalhos que objetiva proporcionar ao leitor não apenas um entendimento do contexto histórico a da gênese de determinadas ideias matemáticas e, além disso, um entendimento sobre o respectivo processo evolutivo e do vigor indene dos objetos e dos processos matemáticos que apresentam uma evolução, nem sempre contígua, todavia, irrefreável. Isso posto, trazemos agora alguns indícios sobre a pesquisa atual em torno dos números ou da sequência de Padovan. De imediato, apresentamos algumas definições recentemente introduzidas na literatura especializada. Vejamos a primeira.

Definição 3: A sequência gaussiana de Padovan é uma sequência de números complexos, denotada por GP_n , com valores iniciais $GP_0 = 1, GP_1 = 1 + i, GP_2 = 1 + i$ e a seguinte relação de recorrência $GP_n = GP_{n-2} + GP_{n-3}, n \geq 3$. (TASCI, 2018a).

Com origem na definição anterior, facilmente podemos determinar os números da recorrência: $GP_0 = 1, GP_1 = 1 + i, GP_2 = 1 + i, GP_3 = 2 + i, GP_4 = 2 + 2i, GP_5 = 3 + 2i, GP_6 = 4 + 3i, GP_7 = 5 + 4i, GP_8 = 7 + 5i, GP_9 = 9 + 7i$, etc. Reparemos ainda que, se $n = 2 \therefore GP_2 = GP_0 + GP_{-1} \leftrightarrow GP_{-1} = GP_2 - GP_0 = 1 + i$. No caso subsequente, tomamos $n = 1 \therefore GP_1 = GP_{-1} + GP_{-2} \leftrightarrow GP_{-2} = GP_1 - GP_{-1} = 0$. Repetindo o

procedimento, vemos que

E, sucessivamente, encontramos: $GP_{-4} = 2 + 2i, GP_{-5} = -2 - 2i, GP_{-6} = 1 + i, GP_{-7} = 1 + i, etc$. Por consequência, podemos determinar os números gaussianos de Padovan para índices inteiros negativos.

Logo em seguida, trazemos outra recente definição introduzida por Tasci (2018b).

Definição 4: Um número quaternion de Padovan é definido por $QP_n = P_n + iP_{n+1} + jP_{n+2} + kP_{n+3}$, em que $\{1, i, j, k\}$ constitui uma base para os quaternions, e o coeficiente P_n representa o n-ésimo número de Padovan. (TASCI. 2018b)

Observamos um conjunto de regras formais definidas para os elementos do conjunto acima: $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = ji = k, jk = -kji, ki = -ik = j$.

De imediato, podemos determinar alguns dos números, com origem na definição anterior dos quaternions de Padovan: $QP_0 = P_0 + iP_1 + jP_2 + kP_3 = 1 + i + j + 2k$, $QP_1 = P_1 + iP_2 + jP_3 + kP_4 = 1 + i + 2j + 2k$, $QP_3 = P_3 + iP_4 + jP_5 + kP_6$.

Nossa última definição envolvendo uma especialização dos números de Padovan se apoia na noção introduzida por William Kingdon Clifford (1845-1879). Um número real dual é representado da seguinte forma $d = a + \varepsilon a^*$, onde ε representa a unidade dual, sujeita ao conjunto das seguintes regras formais $\varepsilon \neq 0, 0\varepsilon = \varepsilon 0, 1\varepsilon = \varepsilon 1 = \varepsilon, \varepsilon^2 = 0$.

Definição 5 (*): Um número dual de Padovan é definido por $DP_n = P_n + \varepsilon P_{n+1}$, onde P_n representa n-ésimo número de Padovan e ε a unidade dual.

De imediato, decorre que $DP_n = DP_{n-2} + DP_{n-3}$, isto é, verifica-se a mesma relação de recorrência para o caso dos números duais de Padovan. A verificação pode ser vista $DP_{n-2} + DP_{n-3} = P_{n-2} + \varepsilon P_{n-1} + P_{n-3} + \varepsilon P_{n-2} = P_{n-2} + P_{n-3} + \varepsilon(P_{n-1} + P_{n-2}) = P_n + \varepsilon P_{n+1} = DP_n$. E, por fim, trazemos uma última definição formal, decorrente e generalizada, de modo natural, a partir das definições formais anteriores.

Definição 6 (*): Um quaternion dual de Padovan é um número dual de Padovan definido por $DQ_n = Q_n + \varepsilon Q_{n+1}$, onde Q_n representa n-ésimo número quaternion de Padovan e onde ε representa a unidade dual. A unidade dual sujeita às condições e regras formais $\varepsilon \neq 0, 0\varepsilon = \varepsilon 0, 1\varepsilon = \varepsilon 1 = \varepsilon, \varepsilon^2 = 0$.

Mais uma vez, podemos verificar a relação de recorrência fundamental que se mostra, supreeedentemente, herdada de sequência original de Pavovan. Com efeito, vejamos que:

$DQ_{n-2} + DQ_{n-3} = Q_{n-2} + \varepsilon Q_{n-1} + Q_{n-3} + \varepsilon Q_{n-2} = Q_{n-2} + Q_{n-3} + \varepsilon Q_{n-1} + \varepsilon Q_{n-2}$ e, agrupando, temos: $DQ_{n-2} + DQ_{n-3} = (Q_{n-2} + Q_{n-3}) + \varepsilon(Q_{n-1} + Q_{n-2}) = Q_n + \varepsilon Q_{n+1} = DQ_n$.

Decerto que o conjunto de cerca de seis definições matemáticas formais não exprime um universo definitivo, todavia pode inspirar o leitor no sentido de distinguir um percurso evolutivo, de generalização e da descoberta de propriedades matemáticas especializadas e derivadas dos números de Hans van der Laan, ou de Cordonnier ou de Padovan. Os trabalhos desses três personagens, não de modo sistemático e/ou cooperativo, concorreram para seu processo de popularização e evolução, como recorda Yilmaz (2015).

“Cordonnier trabalhou em práticas arquitetônicas desta contagem e em 1958 e deu palestras sobre o uso da proporção de plástico nos edifícios e monumentos. [...] Mas pela primeira vez, em 1924, Gérard Cordonnier, um arquiteto nascido na França encontrou a proporção de plástico descoberto por um Monge arquiteto francês independente Dom Hans Van Der Laan”. [...] Cordonnier, Van Der Laan e Padovan apresenta uma importante parceria histórica. Hoje, como avanços tecnológicos, matemática e outras ciências, ocorre uma reaproximação. Nesta aproximação, a teoria matricial tem uma proposição separada. Por causa; engenharia, estatística e muitas outras matrizes internas, a teoria dos números da teoria das matrizes, definindo matriz matrizes de algumas seqüências numéricas. É muito importante porque haverá uma ponte entre vários conceitos.” (YILMAZ, 2015, p. 2).

Assim, no excerto acima, constatamos inesperadas relações que devem concorrer para a pesquisa contemporânea em torno da seqüência de Padovan ou de Coordonier, que prossegue vigorosa (ALSINA; NELSEN, 2015; BUGATTI, 2012; IIIOPOULOS, 2014; JAVIER; DOLOREZ, 2008; MAROHNÍČ; STRMEČKI, 2012; WEISS, 2014a; 2014b). De modo particular, assinalamos as recentes contribuições do trabalho de Vieira (2020) que podem ser constatados no Quadro 1.

Considerações finais

Nas seções passadas abordamos alguns elementos que permitem uma compreensão sobre o processo de gênese, de generalização e da repercussão matemática da pesquisa especializada em torno dos números de Padovan ou de Coordonier. Mostramos, de modo preliminar, seu papel emblemático para os modelos matemáticos empregados na Arquitetura e que, de modo pioneiro, com o arquiteto holandês Hans van der Laan, foi popularizado com a contribuição de Richard Padovan, embora, tais relações numéricas já eram estudadas por Gerard Coordonnier em 1924. (YILMAZ, 2015, p. 2).

Constatamos, nas seções predecessoras, a demarcação inequívoca de um campo matemático evolutivo, cujos pressupostos e propriedades tendem a evoluir a partir do estabelecimento de definições matemáticas, e estas se mostram visceralmente relacionadas com um processo indene evolutivo de generalização de propriedades relacionadas com os números de Padovan e, conseqüentemente, com a seqüência de Padovan. O quadro abaixo busca comunicar ao leitor, por intermédio de uma rápida apreciação, um período temporal que visa significar um processo de generalização e a gradativa abstração, especialização de

propriedades matemáticas precisas, por intermédio de outras formas de representação, nomeadamente, a introdução de unidades imaginárias e a útil representação matricial.

Observamos que “o número plástico possui uma curta história em Arquitetura, mas sua origem matemática é, ao menos, tão respeitável quanto sua sequência prima dourada” (STEWART, 2000, p. 19), quando consideramos a Sequência de Fibonacci. Por conseguinte, divisamos um promissor entendimento matemático (CHOULET, 2008; PADOVAN, 2002) acerca das múltiplas ligações e da generalização da sequência de Fibonacci e da sequência de Padovan (ou de Cordonnier) que requerem atenção minuciosa por parte de autores de livros de História da Matemática. (ALVES, 2017; 2022).

Finalmente, no Quadro 1, logo em seguida, proporcionamos ao leitor um cenário de apreciação que sumariza, de modo substancial, algumas das propriedades e definições formais abordadas nas seções predecessoras. Nosso objetivo precípua visa transmitir uma percepção eminentemente histórica, matemática, epistemológica e evolutiva da Matemática, e, de modo particular, a sequência aqui abordada imprime um exemplo tão emblemático quanto ao caso de Fibonacci (ALVES, 2017). Ao final, trazemos as novas relações decorrentes das definições formais 5 e 6 (número dual de Padovan e quaternions dual de Padovan). Observemos que não discutimos, de forma detalhada, uma outra noção nominada por sequência matricial de Padovan (VIEIRA, 2020) ou de Coordonnier (YILMAZ & TASKARA, 2013; 2014; YILMAZ, 2015).

Quadro 1: Descrição simplificada de algumas noções e propriedades evolutivas.

Noção matemática ou definição	Relações e propriedades características
Razão plástica ou número plástico (número mórfo)	$\psi = 1.324718... \approx \frac{4}{3}$ (Gérard Cordonnier, 1907–1977) $\frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}, \frac{7}{7}, \frac{9}{9}$ (Hans van der Laan, 1904 – 1991)
Número de Padovan	$P_n = P_{n-2} + P_{n-3}, n \geq 3$
Sequência matricial de Padovan definida para índices inteiros	$\wp_n = \wp_{n-2} + \wp_{n-3}, n \geq 3, \text{ onde}$ $\wp_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \wp_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \wp_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (YILMAZ & TASKARA, 2013; 2014).
Números gaussianos de Padovan	$GP_n = GP_{n-2} + GP_{n-3}, n \geq 3. \text{ (Tasci, 2017).}$

Quaternions de Padovan	$QP_n = P_n + iP_{n+1} + jP_{n+2} + kP_{n+3}$ (Tasci, 2018).
Números duais de Padovan (*)	$DP_n = P_n + \varepsilon P_{n+1}$ (Os autores)
Quaternions duais de Padovan (*)	$DQ_n = DQ_{n-2} + DQ_{n-3}$ (Os autores)
Vieira (2020)	Sequência de Tridovan, Tetradovan, Pentavan, Hexavan, etc, Z – Dovan. Relações bidimensionais, tridimensionais, n – dim.

Fonte: elaboração dos autores.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio e suporte financeiro concedido pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq.

Bibliografia

ALSINA, Claudi.; NELSEN, Roger. B. *A mathematical space odyssey: solid geometry in the 21th Century*. The mathematical association of America. 2015.

ALSINA, C. J.L. GARCÍA-ROIG: On plastic numbers. *Journ. Math.& Design*, Vol.1 No.1 (2001), p.13-19. Disponível em: <<http://www.ajmao.org/WebEditor/Pagines/el%20numero%20de%20oro%20es%20plano.pdf>>.

ALVES, Francisco. R. V. Fórmula de de moivre, ou de binet ou de lamé: demonstrações e generalidades sobre a sequência generalizada de fibonacci – SGF. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 17, nº 33, 1 – 16. 2017. Disponível em: <<http://www.rbhm.org.br/issues/RBHM%20-%20vol.17,no33/Francisco.pdf>>.

ALVES, Francisco. R. V. Propriedades combinatórias sobre a sequência de Jacobsthal, a noção de tabuleiro e alguns apontamentos históricos. *Revista Cearense de Educação Matemática*, v. 1, nº 1, 1 – 12, 2022. (no prelo).

AARTS, Jan; FOKKINK, Robbert; KRUIJTZER, Godfried. Morphic numbers. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, v. 5, nº2, p. 56–58, 2001. Disponível em: <<http://www.nieuwarchief.nl/serie5/pdf/naw5-2001-02-1-056.pdf>>.

AUDET. Daniel. Le nombre plastique: cousin négligé du nombre d’or. *Association mathématique du Quebec*. v. 53, nº 1, 29 – 36. 2013. mars, Disponível em: <<http://archimede.mat.ulaval.ca/amq/bulletins/mar13/9-maitre-Plastique-mars-2013.pdf>>.

BUGATTI, Enrica Caterina. Dom Hans van der Laan e il numero plastico. *Corso di Laurea in Architettura*. Milano. 2012. Disponível em: <https://www.politesi.polimi.it/bitstream/10589/57542/1/2012_07_Bugatti.pdf>.

BUITRAGO, A. Redondo. *Los numeros morficos en secundaria*. *REVISTA SUMA*. 59, 7–16, 2008. Disponível em: <<http://www.ajmao.org/WebEditor/Pagines/los%20numeros%20morficos%20en%20secundaria.pdf>>.

CHOULET, Richard. Après le nombre d'or, quels nombres aussi riches inventer ? *Revue Mathématique et Pédagogie*. n° 166, 3 – 30. 2008. Disponível em: <<https://www.apmep.fr/IMG/pdf/nbag.pdf>>.

GAZALÉ, Midhat J. *GNOMON - From Pharaohs to Fractals*. Princenton: Princeton University Press. 1999.

GUTIÉRREZ, V. Sainz. La arquitectura monástica de Dom Hans van der Laan. *Actas del Congreso Internacional de Arquitectura Religiosa Contemporánea*. 86 – 107, 2009. Disponível em: <<https://idus.us.es/xmlui/handle/11441/25348>>.

IIIIOUPOULOS, Vasileios. The plastic number and its generalised polynomial. *AirxiV*. 1 – 4, 2014. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/263738896_The_plastic_number_and_its_generalized_polynomial>.

KOVACIC, Bojan; MAROHNIC, Luka; OPACIC, Renata. (2013). O Padovanovu nizu. *Osječki Matematički*. Croacia, v. 13, n° 1. Available in: <<https://bib.irb.hr/prikazi-rad?rad=628833>>.

MAROHNIC, Luka; KOVAČIĆ, Bojan; RADIŠIĆ, Bojan. O nultokama polinoma oblika $x^n - x - 1 = 0$. Croacia, *Osječki matematički list*. n° 13, 1 – 13. 2013. Disponível em: <http://bib.irb.hr/datoteka/749107.O_nultokama_polinoma_xn-x-1.pdf>.

MAROHNIC, Luka; STRMEČKI, Tihana. Plastic Number: Construction and Applications. *Advanced Research in Scientific Areas*. December, 3 – 7, 2012. Disponível em: <https://bib.irb.hr/datoteka/628836.Plastic_Number_-_Construct.pdf>.

GONZÁLEZ-DÍAZ, María-Jesús; GARCÍA-NAVARRO, Justo. Non-technical approach to the challenges of ecological architecture: Learning from Van der Laan. *Frontiers of Architectural Research*, v. 5, 202 – 212. 2016. Disponível em: https://ac.els-cdn.com/S2095263516000121/1-s2.0-S2095263516000121-main.pdf?tid=018e396c-06db-4d3d-8485-03824cdf0f40&acdnat=1526491904_907780ce59b4bf45cc3fca0b6773df3b>.

JAVIER, Rodrigo; DOLOREZ, L. Generalizaciones de los números de oro y Padovan. *Segundo Congreso Internacional de Matemáticas en la Ingeniería y la Arquitectura*. 407 – 422, Madrid. 2008. Disponível em: <<http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/Fdistancia/MAIC/CONGRESOS/SEGUNDO/028%20Generalizaciones.pdf>>.

PADOVAN. Richard. Dom Hans Van Der Laan and the Plastic Number, p. 181-193. *Nexus IV: Architecture and Mathematics*, eds. Kim Williams and Jose Francisco Rodrigues Fucecchio (Florence): Kim Williams Books, 2002. Disponível em: <<http://www.nexusjournal.com/the-nexus-conferences/nexus-2002/148-n2002-padovan.html>>.

PIMM, David.; SINCLAIR, Nathalie. Aesthetics and Mathematical Mind. In: PIMM, David.; SINCLAIR, Nathalie; HIGGINSON, William. *Mathematics and Aesthetics: new approaches to the Ancient Infinity*. New York: Springeg. p. 223 – 255. 2000.

SELMER, E. S., On the irreducibility of certain trinomials. *Mathematica. Scand.* v. 4, 287–302. 1956. Disponível em: <<http://www.msand.dk/article/view/10478/8499>>.

SAHIN, Adem. On the generalized perrin and cordonnier. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. SÈrvia.* v. 68, nº 1, 242 – 253. 2017. Disponível em: <<http://dergiler.ankara.edu.tr/dergiler/29/2136/22111.pdf>>.

SOKHUMA, Kritsana. Matrices formula for Padovan and Perrin Sequences. *Applied Mathematical Sciences.* v. 7, nº 142, 7093 – 7096, 2013. Disponível em: <<https://pdfs.semanticscholar.org/99b4/476c10c2e36f1292e8333d088b33dcdba0ea.pdf>>.

SOUSA GOMES, Vasco. M. V. *Sistemas proporcionais como metodologia de sistematização projecutal*. (Dissertação de mestrado em Arquitetura). Porto: Faculdade de Arquitetura do Porto. 2012. Disponível em: <<https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/80297/2/23453.pdf>>.

SPINADEL, Vera W.; BUITRAGO, Antonia Redondo. Towards van der Laan’s Plastic Number in the Plane. *Journal for Geometry and Graphics.* v. 13, nº 2, 163 – 175, 2009. Disponível em: <<http://www.heldermann-verlag.de/jgg/jgg13/j13h2spin.pdf>>.

SPINADEL, Vera. W. La familia de numeros metalicos. *Cuadernos del CIMBAGE*, nº 6, 17 – 44, 1999. Disponível em: <<http://www.redalyc.org/html/462/46200602/>>.

STEWART, Ian. *Professor Stewart’s Cabinet of Mathematical Curiosities*. New York: Basic Books. 2008.

STEWART, Ian. *L’Univers des Nombres*. Paris: Belin pour la Science. 2000.

TASCI, Dursun. Gaussian padovan and gaussian pell- padovan sequences. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat.* v. 67, n° 2, 82 – 88. 2018a. Disponível em: <<http://dergiler.ankara.edu.tr/dergiler/29/2239/23280.pdf>>.

TASCI, Dursun. Padovan and pell-padovan quaternions. *Journal of Science and Arts.* v. 18, n° 1, 125 – 132. 2018b. Disponível em: <http://www.icstm.ro/DOCS/josa/josa_2018_1/a_08_Tasci_125-132.pdf>.

VOET, Caroline; SCHOONJANS, Yves. Benedictine thought as a catalyst for 20TM century liturgical space: the motivation behind Dom Hans Van der Laan's aesthetic church architecture. *Proceeding of the 2nd international conference of the Europa Architectural History of Network.* May, 255 – 261, 2012. Disponível em: <<https://lirias.kuleuven.be/bitstream/123456789/391810/1/C+VOET+eahn+2012.pdf>>.

VIEIRA, R. P. (2020). *Sequência generalizada de Padovan ou Coordonier e suas relações n dimensionais.* 2020. Dissertação (Mestrado em ensino de ciencias e matematica - PGCEM/IFCE) - Instituto Federal de Educação Ciencia e Tecnologia.

YILMAZ, Nazmiye. *Padovan ve perrin sayilarinin matris temsilleri.* (Doctorat thesis). Konya: Turkey University. 2015. Disponível em: <<http://acikerisim.selcuk.edu.tr:8080/xmlui/bitstream/handle/123456789/3682/418927.pdf?sequence=1&isAllowed=y>>.

YILMAZ, Nazmiye; TASKARA, Necati. Matrix Sequences in terms of Padovan and Perrin Numbers. *Journal of Applied Mathematics.* v. 7, 1 – 7. 2013. Disponível em: <<https://www.hindawi.com/journals/jam/2013/941673/>>.

YILMAZ, Nazmiye; TASKARA, Necati. On the Negatively Subscripted Padovan and Perrin Matrix Sequences. v. 5, n° 2, 59 – 72. 2014. Disponível em: <<http://www.rgnpublications.com/journals/index.php/cma/article/view/227>>.

WEISS, Gunter. From the golden rectangle to laan's box and more. *Proceedings of 21st conference geometry graphics computer.* p. 81 – 82, 2014a. Disponível em: <http://ogigi.polsl.pl/zeszyt_Gdansk_14/81_proceeding_2014.pdf>.

WEISS, Gunter. Solving algebraic equations with Fibonacci sequences. *Proceedings of the 9th International Conference on Applied Informatics.* Hungary, February, v. 1, 9 – 18. 2014b. Disponível em: <<http://icai.ektf.hu/icai2014/papers/ICAI.9.2014.1.9.pdf>>.

WEGER, Benjamin M. M. Padua and pisa are exponentially far apart. *Publications Matemàtique.* v. 41, 631 – 651, 1997. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/pdf/43737267.pdf?refreqid=excelsior%3A6a7108e9bb19ca16ee6473d7d16e9754>>.

Francisco Regis Vieira Alves

Departamento de Matemática e Física do IFCE.

E-mail: fregis@ifce.edu.br

Paula Maria Machado Cruz Catarino

Departamento de Matemática Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro (UTAD).

E-mail: pcatarino23@gmail.com