Revista Brasileira de História da Matemática – Vol. 20, nº 40 – pp. 46–79
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

A JUSTIFICAÇÃO DAS OPERAÇÕES ALGÉBRICAS NA INGLATERRA DO SÉCULO XVII A XIX – O CASO DAS QUANTIDADES NEGATIVAS

Michel Santos Salazar
Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ – Brasil

Gert Schubring
Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ– Brasil

(aceito para publicação em julho de 2020)

Resumo

O período de XVII a XIX abarcou uma forte discussão sobre os fundamentos da álgebra e questionamentos sobre a legitimidade de quantidades negativas e imaginárias, que eram comumente chamadas de "absurdas" ou "ininteligíveis". A discussão, motivada pelo estabelecimento da álgebra como uma ciência de conhecimento certo, acabou trazendo interessantes movimentos entre algebristas britânicos, com a virada das abordagens analíticas para as sintéticas e finalmente com o surgimento da chamada álgebra simbólica. A presente pesquisa pretende analisar algumas dessas diferentes concepções de álgebra, com foco na maneira como eram introduzidas e justificadas as quantidades negativas e as operações básicas que as envolviam.

Palavras-chave: álgebra, Inglaterra, operações algébricas, quantidades negativas, números negativos

[THE RATIONALE FOR ALGEBRAIC OPERATIONS IN ENGLAND FROM THE 17TH TO THE 19TH CENTURY – THE CASE OF NEGATIVE QUANTITIES]

Abstract

The period from the 17th to the 19th century saw a long discussion concerning the foundations of algebra and questionings regarding the legitimacy of negative and imaginary quantities, which were commonly referred to as "absurd" or unintelligible". This discussion, primarily motivated by the establishment of algebra as a science of infallible truths brought about interesting movements among British algebraists, such as the diversion which occurred from analytical to synthetic approaches and finally towards the so-called symbolical ones. Hence, the present paper intends to analyse a few of these different conceptions of algebra, focusing on the ways negative quantities were introduced and substantiated, as well as how authors reasoned about their operations.

Keywords: algebra, England, algebraic operations, negative quantities, negative numbers.

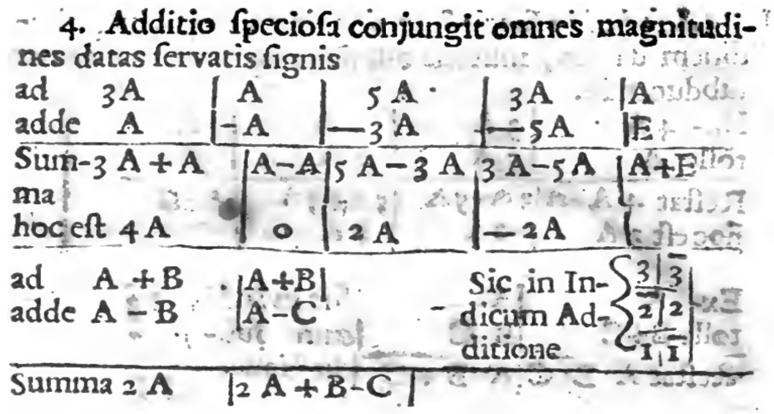
I. O "entusiasmo algébrico" (Pycior)

Oughtred e Harriot: Início da álgebra Inglesa

Nossa análise começa pelas obras algébricas de dois ingleses: William Oughtred e Thomas Harriot. Os escritos destes dois, ambos lançados em 1631, constituem os primeiros originais que causaram um impacto significativo na Inglaterra, no sentido de serem continuamente mencionados por matemáticos nos anos posteriores.

Oughtred (1574–1660) nasceu em Buckingham, Inglaterra, e ingressou na *King's College* de Cambridge aos 17 anos. Lá, a matemática ainda não fazia parte dos estudos centrais, e sua formação consistiu majoritariamente em filosofia e teologia. Ainda assim, Oughtred relata as noites que passava estudando a matemática como um estudo paralelo, já demonstrando sua aptidão pelo assunto. Sem nenhuma espécie de treinamento formal em matemática, um nobre mecenas apadrinhou Oughtred, na propriedade onde deve ter tido o primeiro contato com os trabalhos de Viète. Enquanto tutor de matemática, Oughtred escreveu e publicou sua breve e relevante obra algébrica: a *Clavis Mathematicae* (Chave matemática), feita especialmente para seu jovem aluno.

Em sua discussão teórica, podemos ver que as quantidades algébricas estão proximamente associadas a uma ideia de medida de alguma grandeza real. A grande vantagem que ele cita sobre o método algébrico repousa no fato de que o simbolismo permite a generalização de soluções. Sua obra, como ele mesmo coloca, objetivava utilizar das ferramentas analíticas para resolver os problemas geométricos dos antigos sem a necessidade de tanta verbosidade. Diante disto, a sua álgebra funciona como uma ferramenta em que as quantidades representariam medidas. Apesar disto, quantidades negativas isoladas existem para ele, ainda que ele não se preocupe em oferecer algum exemplo real que indique o que elas poderiam representar. A única coisa que ele diz sobre o significado dos sinais é que + e - indicam mais e menos, respectivamente, e que "pertencem" às quantidades as quais eles precedem. Diante dessa concepção de que os sinais pertencem às quantidades, surgem quantidades positivas e negativas e ele então estabelece regras puramente simbólicas para realizar as quatro operações fundamentais com elas. Por exemplo, para somar quantidades, "junte as magnitudes sem alterar os sinais" e, para subtrair, "junte as magnitudes dadas, alterando o sinal daquelas que devem ser subtraídas."



4. Additio ſpecioſa conjungit omnes magnitudines datas ſervatis ſignis

ad	3A	A	5A	3A	A
adde	A	−A	—3A	—5A	E
Summa	3A + A	A−A	5A − 3A	3A−5A	A+E
hoc eſt	4A	o	2A	—2A	

ad	A + B	A+B	Sic in Indicum Additione	3|3
adde	A − B	A−C		2|2
				1|1
Summa	2A	2A + B−C		

Figura 1: Exemplos de somas algébricas na Clavis de Oughtred (Oughtred, 1648, p. 5)

Estas regras, portanto, se aplicam tanto para quantidades compostas como simples, sejam elas positivas ou negativas, e Oughtred caracteristicamente não provê qualquer justificativa ou interpretação para elas. Apesar de quantidades negativas figurarem dentro dessas operações, as mesmas não surgem em respostas para seus problemas geométricos, de modo que elas podem ser vistas como ferramentas de cálculo.

O caso dos manuscritos de Thomas Harriot (1560–1621), por sua vez, é um tanto delicado. Pouquíssimo se sabe sobre os primeiros anos da vida de Harriot, mas sabe-se que, assim como Oughtred, Harriot também foi apadrinhado por um nobre chamado Henry Percy. Em sua residência, Harriot teve contato com um grupo de intelectuais, dentre os quais, destacamos Nathaniel Toporley, que muito provavelmente foi quem lhe introduziu à álgebra de Viète. Lá, Harriot também escreveu uma série de manuscritos que foram editados e publicados apenas postumamente por Walter Warner, também da residência de Henry Percy. O texto foi lançado em 1631 sob o nome de *Artis analyticae praxi*s, tendo sofrido algumas alterações de estrutura e de conteúdo com relação aos textos originais, como sugere Stedall (2003), a qual tentou recuperar a proposta original de Harriot. De qualquer maneira, podemos ver aqui que os dois primeiros grandes nomes da álgebra inglesa assemelham-se por não terem tido treinamento formal em matemática, por terem produzido seus escritos enquanto mecenas e pela influência vinda do francês Viète, cujos métodos eram marcadamente analíticos com aplicações a problemas geométricos. Os manuscritos de Harriot, em particular, estão repletos de referências ao francês, sendo que muito do conteúdo é retirado de seus textos *Isagoge* e *De potestatum resolutionae*, que foram reescritos em uma nova notação e sob um tratamento próprio.

Com relação aos textos em si, destacamos primeiramente que os manuscritos originais de Harriot não oferecem qualquer tipo de definição, seja para quantidades, as operações ou a análise de uma maneira geral. As regras operacionais são apresentadas de uma maneira puramente simbólica parecida com a de Oughtred, com a diferença que uma regra geral não chega a ser verbalizada: os exemplos por si fornecem uma ideia de como cada operação deve ser realizada.

1) *Operations of arithmetic in letters*[1]

	a		aa		aaa
add	b	add	bc	add	bcc
sum	$a+b$	sum	$aa+bc$	sum	$aaa+bcc$

	a		aa		aaa
subtract	b	subtract	bc	subtract	bcc
remainder	$a-b$	remainder	$aa-bc$	remainder	$aaa-bcc$

	$a+b$	$a+b$	$a+b$	$a+b$
add	$c+d$	$c-d$	$-d$	$-b$
sum	$a+b+c+d$	$a+b+c-d$	$a+b-d$	a

	$a+b$	$aa+cc$	$aaa+cdf-ddd$
add	$c+b$	$aa+cc$	$aaa+bdd+ddd$
sum	$a+c+2,b$	$2,aa+2,cc$	$2,aaa+cdf+bdd$

	$a+b$	$a+b$	$a+b$	$a+b$
subtract	$c+d$	$c-d$	$-d$	$-b$
remainder	$a+b-c-d$	$a+b-c+d$	$a+b+d$	$a+2,b$
		or $a+b-,c-d$		

	$a+b$	$aa+cc$	$aaa+cdf-ddd$
subtract	$c+b$	$aa+cc$	$aaa+bdd+ddd$
remainder	$a+b-c-b$	$aa+cc-aa-cc$	$cdf-bdd-2,ddd$
that is:	$a-c$	that is: 0	

Figura 2: Exemplos de operações algébricas nos manuscritos de Harriot, segundo recuperação de Stedall. (Stedall, 2003, p. 39)

De fato, Harriot procedeu dessa maneira em todos os seus manuscritos, os quais ainda oferecem novidades sobre a teoria de equações que foram absorvidas pelos autores subsequentes como parte do estudo sistemático da álgebra. Além disto, sua notação é notavelmente simplificada e desprovida de elementos linguísticos associados a magnitudes, diferentemente do que vemos em seu antecessor, Viète. No simbolismo de Harriot, quantidades ficam representadas por letras minúsculas e suas potências são iterações da mesma e essa representação se viu presente nos autores ingleses seguintes em conjunto com a proposta de Descartes de utilizar expoentes. Com relação aos objetos da álgebra de Harriot, pouco se pode afirmar sobre a natureza deles, uma vez que Harriot não discorre a respeito disso e seria equivocado afirmar que sua álgebra consiste de um simbolismo puramente abstrato. Ainda assim, é expressivo o fato de que o autor fez questão de preservar a lei da homogeneidade em seus cálculos.

Neste primeiro momento, então, vemos o estabelecimento de uma álgebra com um simbolismo mais enxuto, onde se reconhece a brevidade e generalidade como seu ponto alto para resolver problemas. Além disto, a álgebra encontra-se proximamente associada ao método analítico, uma associação que já havia sido tecida desde os algebristas cossistas do século anterior. O conceito de quantidade perdura, de maneira que os símbolos algébricos representam grandezas, isto é, medidas de quantidades em um sentido intuitivo. Ainda assim, quantidades negativas puras existem sem que possamos precisar de que maneira os autores as concebiam conceitualmente. As mesmas aparentam servir apenas como ferramenta intermediária, uma vez que elas somente surgem nos cálculos de Oughtred, mas nunca nas soluções de caráter geométrico.

John Kersey e John Wallis

As décadas seguintes viram surgir uma nova seca de textos originais da álgebra inglesa, enquanto novos e importantes tratados continentais estavam sendo publicados. Notavelmente, a *Geometria* de Descartes trouxe uma série de traços distintos com relação à álgebra de Oughtred e Harriot. Neste contexto, John Collins, um entusiasta matemático, contador e então livreiro da Royal Society, distingue-se por seu incômodo com a inatividade na álgebra britânica. Tendo conhecimento das práticas matemáticas estrangeiras, como as de Descartes, Collins acreditava que aspectos da álgebra de Oughtred, cuja obra era a mais popular na região, já pareciam ultrapassados. Após promover alguns projetos de tradução de obras estrangeiras, Collins passou a desejar por publicações novas e originais de seu território. Dentre suas investidas de sucesso, destacamos a obra de John Kersey, *The Elements of that Art Commonly Called Algebra, Expounded in Four Books*, lançada em 1673 e 1674. Kersey (1616–1677), que nunca possuiu treinamento formal acadêmico em matemática, elaborou aqui um exemplar de uma nova álgebra inglesa, marcada por inspirações tanto de seus antecessores Oughtred e Harriot como da nova álgebra que se desenvolvia em outros lugares. Podemos ver isto imediatamente através de seu simbolismo: ocorre aqui uma mescla entre as quantidades iteradas de Harriot e os expoentes de Descartes: pode-se escrever tanto *xx* como x^2.

De começo, a associação da álgebra ao método analítico permanece, e Kersey demonstra defendê-la como sendo capaz de produzir conhecimento tão verdadeiro como a geometria e a aritmética, as quais, acreditava-se, eram regidas por princípios inegáveis por serem auto-evidentes. Diferenças conceituais, contudo, já surgem no momento de introdução dos símbolos operacionais: ambas possuem a dupla função de caracterizar cada quantidade como positivas ou negativas e de marcar uma operação entre duas quantidades distintas.

> "*Esse sinal - é um sinal de negação, assim como de subtração, e sempre pertence à quantidade que o sucede; como por exemplo,* -5 *é um número fictício menor do que nada por 5.*" (Kersey, 1673, p. 3, tradução nossa)

Vemos aqui que quantidades positivas e negativas isoladas são entendidas como sendo respectivamente maiores e menores do que o "nada", uma caracterização metafísica do zero originada em Descartes. A ideia de uma quantidade negativa também é apresentada a partir de uma analogia a grandezas concretas que admitam ideias de opostos:

> "[...] *assim como* $+5\,l$ *pode representar cinco pounds em dinheiro, ou o estado de uma pessoa que vale claramente cinco pounds; e pode*

> *representar uma dívida de cinco pounds devidos por uma pessoa que está ‘pior do que nada’ em cinco pounds.”* (Kersey, 1673, p. 3, tradução nossa)

Além disso, outro conceito de Descartes é a de que os sinais + e - apresentam uma oposição um com o outro, e logo que a quantidade afirmativa, detentora do sinal +, “destrói” a negativa, que possui seu oposto -. Ou seja, unir quantidades opostas resulta em zero.

> *“quando duas quantidades simples iguais propostas forem somadas, e possuem números prefixados iguais, mas sinais contrários, a soma será 0, ou nada; pois a quantidade afirmativa destrói ou extingue a negativa.”* (Kersey, 1673, p. 9, tradução nossa)

Mais interessante, Kersey recorre à analogia de uma dívida sendo somada a um saldo positivo para explicar tal operação; e o fato de o raciocínio ser considerado “evidente” o tornaria uma justificativa suficiente:

> *“Pois supondo -c, ou -1c como sendo uma dívida de uma coroa que devo e +c ou +1c como uma coroa em minha bolsa, é evidente que uma coroa em dinheiro vivo irá descarregar ou remover uma dívida de uma coroa; e dessa maneira o débito e o crédito sendo somados ou comparados conjuntamente, a soma resulta em zero”*. (Kersey, 1673, p. 9, tradução nossa)

Desta maneira, Kersey procede na explicação das operações fundamentais com quantidades algébricas: provendo primeiramente uma regra em termos puramente simbólicos como os de Oughtred, mas recorrendo a analogias para apoiar algumas que não parecem ser suficientemente evidentes e necessitam de uma explicação intuitiva que evidencie sua veracidade. Vejamos como ele novamente recorre à ideia de dívida para explicar que mais geralmente, somar uma quantidade negativa é o mesmo que subtraí-la:

> *“Conceber* $+3\,a$ *como três pounds de dinheiro à mão, e* $-2\,a$ *uma dívida de dois pounds; então comparando o dito dinheiro à mão e a dívida você encontra por subtração que o dinheiro que sobra após a dívida ser paga será um pound, ou seja,* $+1\,a$ *ou* a*, que é a soma das quantidades* $+3\,a$ *e* $-2\,a$.” (Kersey 1673, p.10, tradução nossa)

A regra do produto de quantidades compostas, no entanto, é demonstrada por Kersey com recurso aos axiomas tradicionais da aritmética.A demonstração de que *(a-b)c= ac-bc* torna-se suficiente para demonstrar que *-b* por *c* é *-bc.* Ou seja, as quantidades *-b* e *c* passam a ser consideradas de maneira isolada em vez de fazerem parte de uma quantidade composta:

1. *f=a-b*
2. *f+b=a*
3. *fc+bc=ac*
4. *fc=ac-bc*

O argumento mostra como o duplo significado do sinal - se confunde com *Kersey:* a quantidade *b em a-b* poderia ser interpretada como uma quantidade afirmativa b que está sendo subtraída de *a*, mas a mesma também fica entendida juntamente com o sinal, isto é, como a quantidade *-b,* no momento em que ele infere o produto para a quantidade *-b* isolada a partir do raciocínio acima.

Este tipo de problema pode ser melhor entendido pelo fato de que as letras em si representam sempre um número natural, enquanto o sinal - é externo a ele, e serve apenas para caracterizá-lo como quantidade subtraída ou negativa. Por conta disto, as equações quadráticas precisam ser separadas em diversos casos, assim como as cúbicas, entre outros tipos de problemas. O mesmo problema será visto nos autores que abordaremos em seguida.

1. *aa +ca = b*
2. *aa-ba = k*
3. *ca-aa=n*

Aqui, *a* representa a incógnita, e se pode ver que os coeficientes representam quantidades estritamente positivas, se considerarmos os sinais operacionais da expressão como sendo "externos" a elas. Se houvesse a permissão de que os coeficientes fossem quaisquer quantidades, ele poderia derivar uma equação única da forma parecida com a que conhecemos hoje. E, apesar de Kersey reconhecer soluções negativas normalmente, a forma *aa+ba+c=0,* a qual somente produz soluções negativas, é completamente ignorada, assim como fez Oughtred e autores subsequentes. Ainda assim, Kersey carrega um discurso de defesa das quantidades negativas como soluções legítimas para problemas, em contraste com as quantidades imaginárias que são taxadas de absurdas:

> "[...] *raízes impossíveis são aquelas cujo valor não pode ser concebido ou compreendido, seja pela aritmética ou pela geometria; como na equação* $a=2-\sqrt{-1}$*, onde* $\sqrt{-1}$*, ou seja, a raíz de* -1*, é de maneira nenhuma inteligível, pois nenhum número pode ser imaginado, que ao ser multiplicado por si mesmo de acordo com as regras da multiplicação, produz* -1*."* (Kersey, 1673, p. 269, tradução nossa)

Esta afirmação mostra como o autor concebe apenas quantidades que possuam algum tipo de "essência" identificável. Como $\sqrt{-1}$ não pode ser compreendido por meio de seus conceitos matemáticos básicos aceitos, ele é considerado algo ininteligível.

Uma abordagem um tanto próxima pode ser vista no tratado de John Wallis (1616–1713), *Tratado de Álgebra*, que foi lançado em 1685. Wallis, formou-se também em Cambridge pela *Queen's College* e também não teve qualquer treinamento formal em matemática. Quando se mudou posteriormente para Oxford, em 1648, a fim de ocupar a cadeira de geometria, Wallis ainda tinha pouco conhecimento em matemática (Stedall, 2002, p. 4). Também familiarizado com Collins, Wallis é conhecido por ter colecionado controvérsias com matemáticos estrangeiros, bem como pelo seu espírito nacionalista. Seu tratado é marcado por uma defesa da álgebra britânica como aquela que impulsionou a ciência até seu estado atual. Enquanto Harriot é tratado com muita estima, Descartes é acusado de lhe ter plagiado em quase tudo a que seu nome é associado. Uma de suas críticas reveladoras ao francês mostra como Wallis defende a emancipação da álgebra pura com relação à geometria e quaisquer outras aplicações:

> *"Mas a aplicação ali contida à geometria, ou outros assuntos particulares (os quais Descartes busca) não é a proposta daquele tratado de Harriot (a não ser o que ele manejou em seus outros escritos, os quais ainda não tiveram a sorte de terem sido publicados) sendo o propósito deste puramente álgebra, abstraída de assuntos particulares."* (Wallis, 1685, prefácio *v*, *tradução nossa*)

Suas quantidades e sinais ficam introduzidos de maneira similar a Kersey, mas sua argumentação para as operações fica mais marcada por uma argumentação baseada na interpretação intuitiva das ideias de quantidade negativa e subtração. Não se recorre, assim, a definições formais para provar resultados, mas sim à semântica que ele atribui aos símbolos:

> *"Se os sinais forem diferentes (+ em um, e - no outro) o caso se altera de uma certa forma: Como se a* $5A$ *(ou* $+5A$*) somarmos* $-3A$*, resulta* $5A-3A$*, ou* $5A's$ *faltando* $3A's$*, ou seja,* $2A's$*. (Pois somar um defeito de* 2 *é o mesmo que retirar* 2*) E se a* $+3A$*, somarmos* $-5A$*, resulta* $3A-5A$*, ou seja,* $-2A$ *(pois retirar* $2A's$ *a mais do que o total, e logo sobram* $2A's$ *menos do que nada, ou um defeito de* $2A's$*. Como quando um homem possui três pounds mas deve* 5 *pounds, seu estado é* -2 *pounds, ou seja* 2 *pounds a menos do que nada) mas ainda assim o agregado é coletado numa soma."* (Wallis, 1985, p. 73, tradução nossa)

Ou seja, a demonstração das operações é feita a partir do recurso a um significado comum que é associado a uma subtração, isto é, "remover" ou "tirar" uma quantidade. Quantidade negativa, por sua vez, é entendida como um "defeito" ou "a falta de uma quantidade". Dessa maneira, subtrair uma quantidade negativa é o mesmo que somá-la pois simplesmente estamos "removendo um defeito". Isto por si explica o resultado. Além disso, podemos ver que o recurso a exemplos reais também se faz presente. Algo que Wallis destaca ainda é que todos estes resultados são obtidos a partir das "noções comuns da aritmética". Nossa última observação a este respeito concerne o que ele diz sobre quantidades negativas posteriormente:

> "[...] *também é impossível que qualquer quantidade (mas não um suposto quadrado) possa ser negativa. Uma vez que não é possível que qualquer grandeza possa ser menos do que nada, ou qualquer número menor do que nenhum.*
>
> *Mas não é essa suposição (de quantidades negativas) inútil ou absurda, quando corretamente entendida. E apesar de, na notação algébrica pura, ele denotar uma quantidade menor do que nada: mas em se tratando de aplicações físicas, ele denota uma quantidade tão real quanto se o sinal fosse +; mas interpretada em um sentido contrário."* (Wallis, 1685, p. 265, tradução nossa)

Assim, estas não podem ser consideradas de maneira "abstrata", diferentemente das quantidades positivas, as quais poderiam ser entendidas sem recurso à natureza da grandeza que representam. Mas, mesmo assim, utilizá-las pode ser entendida a partir do significado que elas podem possuir dentro de contextos onde uma quantidade pode assumir uma "direção contrária", como são os casos "débito e crédito" ou de "movimento para frente e movimento para trás".

A Aritmética Universal de Newton

Aproximadamente na mesma época em que Wallis escreveu seu tratado, Newton estava escrevendo os manuscritos de suas *Lições* de álgebra, lecionadas em Cambridge, enquanto professor lucasiano da universidade. Isaac Newton (1646–1727) ingressou cedo na *Trinity College*, onde iniciou um estudo de grandes cientistas e, particularmente, matemáticos como Euclides, Viète, Oughtred e Isaac Barrow. No mesmo ano em que largou a cadeira lucasiana, em 1687, Newton lançou sua famosa obra *Principia*, um grande tratado sobre filosofia natural, exposto sob alicerces da geometria sintética. Com o rigor associado aos métodos da geometria, Newton conseguiu satisfazer sua preocupação em demonstrar suas proposições de uma maneira certa, e todo seu método de fluxões foi exposto sob esta nova roupagem. Os anos antecedentes a esta publicação, de fato, marcaram um período em que Newton teria transitado a favor dos métodos geométricos dos antigos, provavelmente sob influência também de Isaac Barrow, seu antecessor na cadeira lucasiana.

Como veremos, tal mudança no método de Newton acabou propagando-se por toda a universidade de Cambridge. No entanto, antes de tal transição, é notável que Newton tenha colecionado uma série de manuscritos, dentre eles, as *Lições*. Contrariamente às intenções do próprio autor, esses manuscritos acabaram encorpando boa parte do conteúdo da *Universal Arithmetick*, que foi publicado anonimamente por William Whiston anonimamente no ano de 1707. Nela, podemos ver um esboço da concepção algébrica de Newton antes da "virada" geométrica.

Não se pode aproveitar muito sobre essa obra no assunto das operações, uma vez que elas todas aparecem sem uma tentativa de justificação. Contudo, alguns aspectos sobre a obra merecem menção, diante da influência que ela teve em Cambridge. A princípio, Newton faz em suas primeiras linhas uma conexão fundamental entre a aritmética e álgebra, destacando a generalidade à qual a última se presta. Mantendo a tradição, a mesma também fica associada ao método analítico.

> *"Elas são ambas construídas sob os mesmos fundamentos, e almejam o mesmo fim, ou seja, a aritmética definidamente e particularmente, a álgebra indefinidamente e universalmente; de modo que quase toda expressão encontrada nessa computação e particularmente conclusões, podem ser chamados de teoremas."* (Universal…, 1727, p. 1, tradução nossa)

Mantendo ainda uma teoria substancialista, sua concepção de número fica fortemente subordinada ao conceito de quantidade.

> *"Por número, entendemos não tanto como uma multiplicidade de unidades, mas como uma razão abstraída entre qualquer quantidade e outra quantidade de mesmo tipo, a qual tomamos como unidade* […] *quando a quantidade de qualquer coisa é desconhecida, ou contemplada como indeterminada, de modo que não podemos expressá-la em números, a denotamos por alguma espécie ou por alguma letra."* (Universal…, 1727, pp.2–3, tradução nossa)

Em seguida, ele assume a existência dos dois tipos de quantidade, também fazendo apelo a exemplos concretos como retas geométricas, e dívidas, e recorrendo a definição de Descartes de quantidades menores do que nada:

> *"Quantidades são afirmativas, ou maiores do que nada, ou negativas, ou menores do que nada. Dessa maneira em assuntos humanos, possessões ou estoques podem ser considerados bens afirmativos, e débitos, negativos* […]*"* (Universal…, 1727, p.3, tradução nossa)

Newton reconhece ainda os sinais em seu sentido operacional:

> *"Em um agregado de quantidades, a notação + significa, que a quantidade a qual ela prefixa, deve ser somada, e a notação -, que ela deve ser subtraída. E geralmente expressamos essas notações pelas palavras Plus [mais] (ou more) e Minus [menos] (ou less)."* (Universal..., 1720, p. 3, tradução nossa)

Como dissemos, porém, Newton não expõe tentativas de argumentar sobre as quatro operações fundamentais, de modo que elas são colocadas em termos de regras simbólicas. Sua obra parece bastante focada na resolução de problemas concretos, visto que ele traz um passo a passo que ensina a traduzir problemas para equações, depois resolvendo uma série de exemplos. A solução da equação do segundo grau, expressa por $x=\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}pp\cdot p}$, onde os pontos representam um sinal de + ou de -, mostra uma clara tentativa de generalização da equação numa única forma, ainda que continue fazendo os coeficientes serem positivos sempre.

Colin MacLaurin e William Saunderson: a análise em Cambridge no século XVIII

Nosso próximo passo é observar os livros de análise que estavam sendo comumente usados em Cambridge ao longo do século XVIII. Mesmo com a virada do século, destacamos, a álgebra destes continua sendo elogiada por sua capacidade de generalizar a resolução de problemas parecidos. O primeiro destaque será dado a **Nicholas Saunderson** (1682–1739), que foi professor lucasiano na universidade, lecionando entre outras coisas, os *Principia* e os *Elementos* de Euclides. Em sua obra *Elementos de Álgebra, de 1740* Saunderson define os dois tipos de quantidades:

> *"Uma quantidade afirmativa é uma quantidade maior do que nada, e é conhecida pelo seu sinal +; uma quantidade negativa é uma quantidade menor do que nada, e é conhecida pelo sinal −: dessa forma +a significa que a quantidade a é afirmativa, e deve ser lida dessa forma, plus a ou mais a: -b significa que a quantidade b é negativa, e deve ser lida dessa forma, menos b ou less b."*(Saunderson, 1740, p. 50, tradução nossa)

O que é mais interessante na abordagem de Saunderson é que ele tenta defender as quantidades negativas, o que também já demonstra a dificuldade que existia em concebê-las segundo as definições que elas costumavam ter. Segundo Saunderson, existe uma espécie de transição que ocorre das quantidades positivas para o "nada" e, em seguida, para a negação, sugerindo uma espécie de homogeneidade entre quantidades opostas:

> "*Dessa forma, uma pessoa em suas fortunas, pode-se dizer ter uma quantidade de 2000 libras, ou 1000. ou nada, ou -1000, ou -2000; em que nos dois últimos casos, se diz 1000 ou 2000 pior do que nada; dessa forma um corpo pode ter 2 graus de calor, ou um grau, ou nenhum grau, ou -um grau, ou -dois graus* [...]" (Saunderson, 1740, p. 51, tradução nossa)

A passagem sugere uma concepção imatura de "reta numérica". Nela, quantidades negativas e positivas formariam o mesmo espectro de uma única espécie de quantidade, sendo o zero, ou o "nada", a ponte entre essas duas direções ilimitadas. A partir dos exemplos, porém, é claro que esta concepção é construída tendo em vista quantidades concretas como dívidas e créditos, onde o zero na verdade representa uma "ausência de coisas" e, por isso, sendo entendido como nada. Sobre isto, Saunderson também tenta explicar o porquê de o termo "menor do que nada" não apontar o absurdo das quantidades negativas:

> *"É certo que toda quantidade contrária admite um estado intermediário, que da mesma maneira toma parte de ambos extremos, e é melhor representada por uma cifra, ou 0, e se é apropriado dizer que os graus em um dos lados desse limite comum são maiores que zero, não vejo por que não deveria ser apropriado também dizer que no outro lado os graus são menores do que zero."* (Saunderson, 1740, p. 51, tradução nossa)

A sua próxima fala ainda mostra como os sinais das quantidades como uma espécie de adjetivo, ou qualificador, para a quantidade em si:

> *"Esses sinais portanto na álgebra carregam a mesma distinção junto a elas que particles[1] e adjetivos na língua comum, como as palavras conveniente e inconveniente, feliz e infeliz, boa saúde e má saúde."* (Saunderson, 1740, p. 52, tradução nossa)

Dessa maneira, as quantidades opostas podem ser entendidas segundo dois aspectos: a sua quantidade em si, inteligível no mesmo sentido associado aos números naturais, e a uma qualidade representada pelo sinal + ou -. Quanto à origem dessa concepção que separa as quantidades em duas características, podemos dizer que uma ideia similar já havia sido levantada de maneira mais explícita no exterior: o francês Bernard de Fontenelle, em sua obra *Éléments de la géométrie de l'infini de 1727*, concebe já dois seres das quantidades: sua quantidade e sua qualidade, sendo a qualidade entendida em termos da oposição existente entre quantidades positivas e negativas.

> "[…] *toda magnitude positiva ou negativa, não apenas possui seu ser numérico, a partir do qual ele é um certo número, uma certa quantidade, mas possui além disso, seu ser específico, a partir do qual ele é uma certa coisa oposta a outra. Eu digo oposto a outra, porque é apenas por essa oposição que ele obtém um ser específico."*(Fontenelle, 1727, p. 170, tradução nossa)

Esta trata-se de uma nova ontologia das quantidades opostas que veio a se popularizar. Fontenelle era secretário permanente da *Academie des Sciences*, ocupando um cargo altamente respeitado. Ele mantinha-se atualizado sobre novos desenvolvimentos na ciência e correspondia com cientistas de vários países europeus, o que nos ajuda a entender como suas ideias podem ter facilmente alcançado as mãos de ingleses.

---

1 Termos que não fazem parte de nenhuma das principais classes gramaticais da língua inglesa. São comumente associadas a termos como "off", "up" ou "down", que podem dar novos significados a verbos aos quais estão associados. Por exemplo. "look" significa olhar enquanto "look up" significa pesquisar.

Além de ajudar a conceitualizar a ideia de negativo, porém, a ideia de Saunderson de quantidades com qualidades contrárias também acaba dando luz a uma meta-regra que o ajuda a explicar as operações:

> *"Essa consideração, se devidamente considerada, removeria todas as dificuldades concernentes aos sinais das quantidades que surgem na adição, subtração, multiplicação, e divisão; pois o resultado de trabalhar com quantidades positivas é conhecido; e logo operações de mesmo tipo com quantidades negativas podem ser conhecidas pela regra dos contrários. "* (Saunderson, 1740, p. 51–52, tradução nossa)

Dessa forma, as quantidades positivas e negativas possuem uma contrariedade que por si explica as operações com as quantidades negativas: se sabemos somar quantidades positivas, por exemplo, somar uma quantidade negativa deverá ter o "efeito contrário", isto é, subtrair a mesma quantidade. Da mesma maneira, subtrair uma quantidade negativa deverá ser o equivalente a somar a sua quantidade. Vejamos por exemplo como Saunderson explica a subtração:

> *"*[...] *Já que subtrair qualquer quantidade de outra é o mesmo em efeito de somar o contrário, e já que mudar o sinal da quantidade a muda para o contrário do que ela era, é evidente que após essa mudança ela pode ser somada à outra, e que o resultado dessa adição será o mesmo da subtração pretendida."* (Saunderson, 1740, p. 54, tradução nossa)

Ao explicar a regra dos sinais da multiplicação, por meio de um exemplo, a meta-regra dos contrários também fica sugerida na sua argumentação:

> "$+4$ *multiplicado por* $+3$ *produz* $+12$*; logo* -4 *por* $+3$ *ou* $+4$ *por* -3 *deve produzir algo contrário a* $+12$*, ou seja,* -12*; mas se* -4 *for multiplicado por* -3 *deve produzir algo contrário a* -12*, isto é,* $+12$ [...]*"* (Saunderson, 1740, p. 58, tradução nossa)

Marcadamente, Saunderson ainda desenvolve uma equação geral quadrática:

$$A x^2 = Bx + C$$

onde:

> *"*[…] A*,* B *e* C *denotam quantidades integrais conhecidas, sejam elas afirmativas ou negativas, e* x *a quantidade desconhecida, o sinal + no outro lado da equação* $Bx+C$ *significando nada mais do que o fato de que as duas quantidades* Bx *e* C *devem ser somadas de acordo com as regras comuns da adição."* (Saunderson, 1740, p. 172, tradução nossa)

Isto mostra como Saunderson sucede em separar o sinal operativo da equação do sinal da quantidade. Ao permitir que os coeficientes assumam valores negativos e positivos, independentemente do sinal que o precede, uma única forma quadrática compacta todos os problemas possíveis. Ao mencionar casos onde as equações apresentam soluções duplas, positivas ou negativas, Saunderson defende o estatuto das soluções negativas. No caso de problemas geométricos, por exemplo, a obtenção de uma reta AB negativa é explicada com recurso à sua "reta", onde ocorre a transição da afirmação para a negação:

> *"a reta AB deve agora ser olhada como negativa, tendo passado de algo para o nada em direção à negação; e mesmo assim uma reta desse tipo negativo é uma reta tão real quanto qualquer uma afirmativa, e logo as raízes negativas de equações quadráticas que exibem retas negativas devem ser de estimação igual com as raízes reais."* (Saunderson, 1740, p. 174, tradução nossa)

E a mesma argumentação vale igualmente para problemas de diferentes naturezas:

> "[...] *e essas duas raízes em todas as artes e ciências onde equações quadráticas entram em questão, são de estimação igual, sejam elas negativas ou afirmativas, ou uma afirmativa e a outra negativa."* (Saunderson, 1740, p. 174, tradução nossa)

Mais uma vez, vemos as soluções serem defendidas dado o contexto no qual a equação está inserida. Equações sem contexto chegam a ser solucionadas, mas Saunderson sempre apela à intuição para defender a possibilidade de haver soluções negativas. Em situações em que elas não possam ser interpretadas como soluções legítimas, podemos apenas ignorá-las (Saunderson, 1740, p. 174).

Outro sinal da sua proximidade com a ideia de quantidade concreta é a maneira como as quantidades imaginárias seguem sendo desconsideradas de quaisquer problemas. Uma vez que uma explicação realista não consegue ser dada a estas, elas devem ser excluídas mesmo de equações sem contexto dado, o que não ocorre com negativas, que podem de alguma maneira serem interpretadas.

Uma visão bastante parecida pode ser vista no tratado do escocês **Colin MacLaurin** (1698–1746), que lecionou, entre outros tópicos, os *Principia*, os *Elementos* e astronomia na Universidade de Edimburgo. Enquanto lá, ele também desenvolveu sua própria teoria algébrica em alguns manuscritos sistematizados que foram finalmente publicados dois anos após sua morte. Sua teoria encontra-se em *Um Tratado sobre Álgebra*, lançado em 1748, e que passou a ser amplamente usado como texto algébrico em Cambridge.

Sua apresentação é bastante parecida com a de Newton. A álgebra novamente é associada fundamentalmente à aritmética e chamada de aritmética universal, tendo como diferencial a sua capacidade de generalização. MacLaurin realiza uma comparação interessante entre a expressividade da geometria e o simbolismo algébrico:

> *"Na geometria, retas são representadas por retas, triângulos por triângulos, e outras figuras por uma do mesmo tipo; mas, na Álgebra, quantidades são representadas pelas mesmas letras do alfabeto* [...] *Na geometria, as representações são mais naturais, na álgebra, mais arbitrárias. A primeira é como as primeiras tentativas de representar objetos, o que era feito traçando-se desenhos semelhantes, o último corresponde mais ao uso presente da linguagem e da escrita." Dessa forma, a evidência da geometria é algumas vezes mais simples, enquanto que o uso da álgebra, mais extensivo e pronto; especialmente agora que as matemáticas foram aplicadas a muitas questões."* (Maclaurin, 1748 p. 2, tradução nossa)

A passagem sugere haver uma proximidade mais clara na geometria entre o objeto representado e a sua representação visual. Na álgebra, o representante é arbitrariamente selecionado e, por conta disso, o simbolismo algébrico pode não ser tão imediatamente expressivo como os desenhos da geometria. Apesar disso, a disciplina ainda possui as suas próprias vantagens: sua manipulação é mais simples e seu domínio de aplicação é maior.

Sua definição de quantidades é marcada por uma concepção operacional, diferentemente do que vimos nos autores anteriores:

> *"A quantidade representada por a, $+a$ significa que a deve ser somado, mas $-a$ significa que a deve ser subtraído.*[...] $+a-b$ *denota a quantidade que surge quando da quantidade a, a quantidade b é subtraída."* (MacLaurin, 1748, p. 4, tradução nossa)

Apesar dessa ideia, as quantidades negativas e positivas existem isoladamente, isto é, fora de um contexto operacional. Uma das passagens mais ricas de MacLaurin evidenciam melhor a sua concepção de quantidade, mostrando mais uma aproximação com Fontenelle e a "regra dos contrários" de Saunderson:

> *"Uma quantidade que deve ser adicionada é da mesma maneira chamada de positiva, e uma quantidade a ser subtraída é dita negativa: elas são igualmente reais, mas opostas, de modo que uma tira o efeito da outra em qualquer operação, quando são iguais em termos de quantidade. Dessa forma, 3-3=0 e a-a=0 . Mas apesar de +a e -a serem iguais em quantidade, não supomos na álgebra que +a=-a, pois para inferir igualdade nessa ciência, elas não apenas devem ser iguais em termos de quantidade mas também de qualidade, de modo que em toda operação, uma possui o mesmo efeito que a outra. Um decrescimento pode ser igual a um incremento, mas em todas as operações possui um efeito contrário."* (MacLaurin, 1748, pp. 6–7, tradução nossa)

Ou seja, *-a* e *+a* são iguais em quantidade, porém opostas em qualidade, no sentido de que o efeito de uma será o oposto da outra numa operação qualquer. A passagem a seguir também mostra como essa separação das quantidades em dois aspectos se traduz em interpretações de quantidades negativas em grandezas concretas:

> *"Um movimento para baixo pode ser igual a um movimento para cima, e a depressão de uma estrela abaixo do horizonte pode ser igual à elevação de uma estrela acima dele: mas essas posições são opostas, e a distância das estrelas é maior do que se uma delas estivessem no horizonte de modo a não ter elevação acima ou depressão abaixo dela."* (MacLaurin, 1748, p. 7, tradução nossa)

Como era de se esperar, sua concepção de oposição inerente das quantidades também ajuda a fundamentar operações com as quantidades negativas. Subtrair uma quantidade negativa é o mesmo que somá-la:

> *"Pois subtrair qualquer quantidade, seja ela positiva ou negativa, é o mesmo que somar a de tipo oposto."* (MacLaurin, 1748, p. 11, tradução nossa)

Apesar disto, podemos ver ainda demonstrações parecidas com aquelas que vimos no século anterior, demonstrando um apego a interpretações da palavra subtrair como "remover". Para tentar prover uma segunda evidência de que subtrair $-b$ é o mesmo que somar b, MacLaurin raciocina da seguinte maneira:

1. Sabemos que $a-b+b=a$
2. Na expressão $a-b$, se "removermos" $-b$, ficamos apenas com a.
3. Na primeira linha, estamos somando b e obtemos a. Na segunda, estamos subtraindo -b da mesma expressão e obtendo o mesmo resultado. Logo, somar b é o mesmo que subtrair $-b$

Na segunda linha ficou claro que MacLaurin entendeu que subtrair $-b$ é o mesmo que "remover" o símbolo $-b$ da expressão. Uma demonstração da regra dos sinais da multiplicação também recorre a alguns pressupostos tacitamente assumidos pelo autor, e se parece bastante com a de John Wallis:

Caso 1. Primeiramente, multiplicar uma dada quantidade por uma quantidade positiva $+a$ a $+n$ significa somar a ($n$vezes), logo o produto resulta em na, que é evidentemente positivo.

Caso 2. Para o caso de o multiplicando ser negativo ($-a$), e multiplicador, positivo (n), a concepção da multiplicação se mantém, e basta somar o termo negativo n vezes para obter o resultado. Como já se sabe somar quantidades negativas, descobre-se que o resultado é $-na$ e, portanto, negativo.

Caso 3. Agora, no caso de o multiplicador ser negativo, MacLaurin diz que fica implícito, que deve ser feita uma subtração iterativa. Logo, quando $+a$ for multiplicado por

-*n*, o significado é que +*a* deve ser subtraído tantas vezes quanto há unidades em *n.* Assim, o produto é negativo, igual a -*na*.

Caso 4. Agora, se pretendemos multiplicar uma quantidade negativa, -*a*, por outra, -*n*, basta subtrair -*a* tantas vezes como há unidades em *n.* Como já foi mostrado que subtrair uma quantidade negativa equivale a somá-la, o resultado será positivo, igual a +*na*. (MacLaurin 1748, p. 12-13, *tradução nossa*)

A divisão, como de costume, fica evidenciada por se tratar apenas de um raciocínio invertido da multiplicação.

Comparando a abordagem de MacLaurin sobre equações quadráticas com a de Saunderson e as demais, podemos ver como sua forma é menos generalizante: equações simples da forma $x^2=a$ sequer são consideradas como quadráticas, mas resolvidas à parte. Apesar de uma regra geral retórica ser desenvolvida, não vemos uma equação geral, onde os coeficientes possam assumir quaisquer valores. O que é apresentado são diferentes exemplos para mostrar a natureza das soluções. Por exemplo, ao abordar uma equação específica, $y^2-ay+3a^2=0$, MacLaurin mostra que neste caso as soluções são impossíveis. Ele então não consegue estabelecer os casos em que as soluções são impossíveis, descritas em função dos valores dados aos coeficientes de uma equação geral. De qualquer forma, soluções negativas são plenamente aceitas conforme os mesmos motivos que encontramos no tratado de Saunderson. Já as soluções imaginárias são chamadas de impossíveis e desconsideradas como soluções de equações.

II. Rupturas das abordagens algebrizantes para uma "álgebra sintética"

Desde as primeiras publicações de livros-texto de álgebra na Inglaterra, podemos encontrar abordagens que favoreciam uma "algebrização": a resolução de equações clamava pela consideração de quantidades negativas que precisavam ser reconhecidas como objetos legítimos de alguma forma. Com Saunderson, em particular, enxergamos já uma conceitualização bastante elaborada das chamadas quantidades opostas.

Em meados do século XVIII uma transição para uma abordagem distinta começou a surgir em Cambridge. As raízes distantes dessa mudança encontram-se na *Escola Newtoniana*, isto é, os seguidores de Newton impactados pelas suas maiores obras, *Principia* e *Opticks*, que eram marcadas pelos seus novos métodos segundo a geometria clássica.

Na primeira década do século, alguns eventos fizeram com que Cambridge tivesse que realizar um novo tipo de teste individual suplementar às tradicionais disputas que serviam para medir a aptidão dos seus alunos. Já em meados do século, esse exame, que ficou conhecido como *Senate House Examination*, acabou por assumir a posição de exame mais importante para avaliar os alunos. Seu conteúdo, sob forte influência dos assuntos Newtonianos, diferenciava-se por destacar a obra de Euclides, não exatamente por seu conteúdo matemático, mas em sua abordagem metodológico-filosófica. O conteúdo do exame refletia um novo paradigma da universidade. Oxford, em contrapartida, tinha seus exames focados em assuntos das ciências humanas e a matemática como um todo ainda não tinha espaço.

A mudança de perspectiva em Cambridge acabaria por impactar diretamente a álgebra. Como pudemos ver, o método analítico da álgebra motivou abordagens generalizantes de quantidade e isso viria a conflitar com os métodos sintéticos da geometria euclidiana.

No caminho para uma álgebra sintética: Thomas Simpson

O primeiro tratado que nos interessa foi escrito por Thomas Simpson (1710–1761). Simpson nasceu em Leicestershire, na Inglaterra, tendo tido contato com a aritmética bem cedo por meio do popular livro *Cocker's Arithmetick.* Ainda assim, Simpson não teve uma educação formal de matemática, e chegou a trabalhar como tecelão. Posteriormente, ele se mudou para Londres onde a prática matemática já havia se desenvolvido mais. No ano de 1743, Simpson foi apontado segundo mestre da *Royal Military Academy* de Woolwich, onde se formavam membros da artilharia e engenheiros navais. Enquanto professor da academia, Simpson escreveu três livros-texto, dentre eles, o seu *Tratado sobre Álgebra*, que rendeu dez edições no período de 1745 a 1826, além de versões americanas e alemãs.

Nela, as quantidades são apresentadas, já sugerindo que as letras representam quantidades positivas e que as quantidades negativas são de fato subtrativas:

> *"O sinal + significa que a quantidade à qual ela está prefixada deve ser adicionada:... O sinal - significa que a quantidade à qual ela está prefixada deve ser subtraída...Também, aquelas quantidades às quais o sinal + está prefixado são chamadas de afirmativas, e aquelas às quais o sinal - está prefixado, negativas."* (Simpson, 1745, p. 2, tradução nossa)

Ao adentrar a explicação das operações, percebe-se que Simpson não traz qualquer exemplo envolvendo quantidades negativas isoladas. Apenas encontramos quantidades subtrativas, isto é, quantidades subtraídas que nunca se encontram isoladas, mas apenas em expressões compostas. Dando razão a essa abordagem limitada, Simpson finaliza o tratamento das operações com uma crítica aos autores que inferem a partir da regra dos sinais de quantidades compostas, que a mesma regra vale se considerarmos quantidades negativas de maneira isolada.

> *"Mas no final das contas deve-se esperar que um cuidado particular deva ser tomado para aqueles casos em que uma quantidade negativa, -b, deve ser multiplicada por uma afirmativa, +c , e quando duas quantidades negativas, como -b e -c, devem ser multiplicadas, quando elas estão sozinhas, independentes de todas outras quantidades: O que alguns podem pensar, deve, de acordo com bom método, ter sido explicado antes pelas regras para quantidades compostas, como é o método seguido para a maioria dos autores no assunto."* (Simpson, 1745, p. 23, tradução nossa)

A razão pela qual ele acha equivocado inferir a regra para o produto com quantidades negativas puras está no fato de que essas em si não são inteligíveis. Não faz sentido para ele tentar argumentar sobre sobre o produto de quantidades "menores do que o nada":

> *"Deve ser considerado que tanto $-b$ quanto $-c$, desse jeito solitárias, são, em um sentido tão impossíveis quanto quantidades como $\sqrt{-b}$ ou $\sqrt{-c}$; uma vez que o sinal $-$, de acordo com as regras estabelecidas de notação, mostra que a quantidade deve ser subtraída, mas subtrair algo de nada é impossível, e a notação ou suposição de uma quantidade de fato menor do que nada, absurda e chocante para a imaginação."* (Simpson, 1745, p. 25,tradução nossa)

Vemos aqui uma clara crítica à concepção das quantidades opostas. Segundo o significado estritamente operacional que foi estabelecido ao sinal-, não faz sentido considerar quantidades negativas isoladas, nem mesmo se elas indicassem uma operação da forma *0-a*, uma vez que a interpretação substancialista das quantidades e a consequente concepção metafísica do zero como "nada" dificulta a consideração plena de algo que seja "menor" do que zero. No contexto operacional, a controvérsia se torna ainda mais forte no momento em que vemos que as regras da multiplicação com quantidades negativas exigem argumentações dificilmente consensuais.

Tendo isso em vista, Simpson tenta abordar a operação de uma maneira diferente. Segundo ele, quando estamos resolvendo um problema algebricamente sem a recorrência a quantidades negativas, cada etapa da manipulação algébrica pode ser intuitivamente compreendida, uma vez que esses procedimentos resumem-se a operações com as quantidades positivas comuns. Contudo, se abstrairmos as premissas do problema por meio do simbolismo, e permitirmos a utilização de quantidades negativas nas manipulações, segundo as regras comumente aceitas para elas, tendemos a obter o resultado correto:

> *"Dada a equação $a-x/b=c-a$. Subtraindo a quantidade a de ambos os lados , obtemos $-x/b=c-a$; que multiplicado por $-b$ (de acordo com a regra geral) resulta em $x=-cb+ab$; ou seja, $-x/b$por $-b$ dá $+x$; c por $-b$; $-cb$, e $-a$ por $-b$; $+ab$."* (Simpson, 1745, p. 25, tradução nossa)

Tal "coincidência", porém, Simpson não considera como um argumento suficiente para demonstrar a regra dos sinais com quantidades negativas, uma vez que o processo realizado não pode ser compreendido intuitivamente, apesar dele levar a resultados corretos.

Rigorosamente, para Simpson, uma quantidade somente pode ser concebida a partir da sua concretude e, consequentemente, o mesmo vale para as operações realizadas com elas. Diante disso, as quantidades imaginárias são igualmente colocadas em xeque. Poderíamos manipulá-las "estrategicamente" para obter resultados verdadeiros, mas que raciocínio evidencia que tal operação é factível?

Com essas críticas, Simpson reconhece que as quantidades impossíveis possuem a função de demarcar a impossibilidade de um problema. Soluções desse tipo, portanto, não são consideradas. Apesar deste discurso mais deliberado de oposição às quantidades negativas e suas operações, Simpson acaba por recuar em sua prática e reconhecê-las como ferramentas para a resolução de problemas. É notável também que, na sua definição de subtração, não se exige que a quantidade a ser subtraída seja menor do que a quantidade diminuída, uma restrição que será salientada posteriormente para que se evitem as quantidades negativas em qualquer expressão algébrica. Simpson não vê problemas em assumir as regras operacionais com quantidades negativas e apresentar equações encabeçadas por elas. Elas podem até mesmo surgir de maneira isolada em uma equação, conforme o terceiro caso das equações quadráticas evidencia.

1. $x^2+2ax=b^2$
2. $x^2-2ax=b$
3. $x^2-2ax=-b^2$

Naturalmente, elas tiveram que ser separadas em três casos e os coeficientes assumem valores estritamente positivos.

Dessa maneira, vemos em Simpson uma tentativa de compreender as quantidades algébricas como estritamente positivas, enquanto as negativas ficam entendidas estritamente como quantidades subtrativas. Apesar de seu discurso contestar a substancialidade e, logo, a realidade das quantidades negativas puras e suas operações, as mesmas acabam por servir normalmente em sua prática como ferramentas para obtenção de soluções positivas.

A álgebra sintética de Francis Maseres

Enquanto as críticas de Simpson trouxeram grandes consequências em sua apresentação, os escritos de Maseres, que estava inserido no supracitado contexto sintético-filosófico de Cambridge, sugeriam mudanças mais fundamentais. Nascido em Londres, Maseres (1731–1824) teve sua formação no *Clare College* com as mais altas honrarias em matemática. Sua carreira é marcada por interesses políticos, especialmente em questões sobre o Canadá e as colônias americanas. No entanto, Maseres é mais lembrado pelas suas contribuições matemáticas e a relativa influência que ele teve no ensino de álgebra, especialmente por suas publicações em que externa sua aversão a quantidades negativas. Sua dissertação de 1758, intitulada *Dissertation on the Use of the Negative Sign in Algebra,* uma de suas primeiras publicações sobre o tópico, constitui um documento em defesa de uma novo tratamento à álgebra, mais alinhada ao método geométrico dos antigos, os quais, conforme conjectura Maseres:

> *“nos deixaram com ótimos livros excelentes de geometria, escritos com o máximo de elegância e precisão, mas nada sobre álgebra; por meio dos quais, os escritores modernos, tendo sido cuidados para tratar a primeira ciência com perspicuidade e elegância, mas foram informais e imprecisos em suas maneiras de tratar a última.”* (Maseres, 1756, p. ii, tradução nossa)

Como o nome da obra sugere, tal mudança de perspectiva na álgebra toma foco na discussão sobre o papel do sinal de negação e das quantidades negativas na álgebra. Sobre elas, Maseres começa a obra já estabelecendo:

> *"A ideia mais clara que pode, conforme apreendo, ser formada de uma quantidade negativa é aquela de uma quantidade que é subtraída de outra maior do que si mesma."* (Maseres, 1756, p. 1, tradução nossa)

Dessa maneira, quantidades negativas são quantidades subtrativas na verdade. E a quantidade subtraída deve ser menor do que aquela da qual ela subtrai, de modo que o resultado da operação seja sempre "positivo". Com relação a essa nomenclatura, Maseres também apresenta um tom de crítica.

> *"Logo, é evidente uma quantidade simples nunca pode ser marcada com nenhum dos sinais, ou considerada afirmativa ou negativa; pois se qualquer quantidade simples, como b, é marcada com o sinal + ou o sinal - sem designar uma outra quantidade, como a, à qual ela deve ser somada ou da qual ela deve ser subtraída, o símbolo terá sentido nenhum ou significado; dessa forma, se for dito que o quadrado de -5 ou o produto de -5 por -5 é igual a +25, uma afirmação dessas deve significar não mais que 5 vezes 5 é igual a 5, sem qualquer consideração com os sinais, ou deve ser apenas loucura e jargão ininteligível."* (Maseres, 1758, p. 2,tradução nossa)

Sua proposta é então estabelecer os sinais de - e + também, como sinais que indicam exclusivamente uma operação entre quantidades positivas em vez de algum tipo de qualificação para as quantidades.

Maseres então se presta a demonstrar uma série de proposições simples que mostram como as operações algébricas ficam fundadas por uma ideia substancialista de quantidades. Para tanto, ele recorre aos princípios auto evidentes da aritmética e, também a analogias geométricas.

Por exemplo, a "subtração da diferença de quantidades", $c - (a-b) = c - a + b$ *é* provada a partir do princípio que diz que "se a quantidades desiguais duas quantidades iguais forem somadas, suas diferenças não serão dessa maneira alteradas, mas continuarão as mesmas tanto antes como depois da adição. "Afinal, é evidente que se a duas quantidades desiguais c e $a-b$ a quantidade b for somada, o excesso de $c+b$ sobre a, ou a quantidade $c + b- a$, será igual ao excesso de c sobre $a-b$." (Maseres, 1756, p. 3)

Esta ideia intuitiva de excesso Maseres utiliza para demonstrar igualdades que envolvam subtrações, inclusive a "regra dos sinais" de quantidades compostas. Assim como Simpson defende, a multiplicação de quantidades composta não diz nada sobre o produto de quantidades negativas, as quais não existem isoladamente para Maseres. Dessa forma, discutir o resultado de (+5)(-5) não faz sentido uma vez que estes sinais + e - não estão inseridos dentro de operações de soma e subtração de quantidades. A discussão central para mostrar sua diferente concepção de álgebra se encontra na parte onde ele aborda as equações quadráticas. Maseres aponta as três seguintes formas:

1. $xx+px=r$
2. $xx-px=r$
3. $px-xx=r$

Como podemos ver, essa separação não se distancia daquelas que vimos anteriormente. Contudo, a fim de discutir sobre a possível dupla solução nos casos 1 e 2, Maseres apresenta o exemplo de equação $xx+2x=15$.

Para ele, a consideração de que tanto +3 como -5 são soluções para ela decorre da tácita resolução de duas equações em vez de uma: Estamos resolvendo também $xx-2x=15$ .Uma vez que Maseres interpreta -5 como sendo simplesmente 5, e que as soluções negativas da forma 1 são as soluções positivas da forma 2, e vice-versa, a consideração desta dupla solução fica naturalmente interpretada como a consideração das soluções afirmativas das duas formas quando o problema em questão se traduz em apenas uma delas. Seus próximos parágrafos de crítica a essa prática de mesclar equações revelam concepções fundamentalistas contrárias às generalizações subjacentes aos métodos acima:

> *"Esse método de unir duas equações diferentes pode talvez parecer ter seu uso; mas, eu confesso, eu não consigo vê-lo: pelo contrário, deveria parecer que perspicuidade e precisão requeiram que duas equações, ou proposições, que são em suas naturezas diferentes uma da outra, e são resultados de condições e suposições diferentes, deveriam ser cuidadosamente distinguidas uma da outra, e tratadas separadamente, cada uma por si, com vem sob consideração."* (Maseres, 1756, p. 29, tradução nossa)

Segundo ele, práticas como essa faz equações algébricas trazerem resultados além daquelas que resolviam o problema em questão. É como se houvesse um erro na transmissão da proposição por meio do simbolismo algébrico:

> *"O número de respostas que respondem a problemas que produzem uma quadrática, ou a qualquer outra equação, irá admitir será sempre igual ao número de raízes pertencentes à equação produzida por ela, exceto os casos em que algumas das condições do problema não estão expressos na equação.* [...] *se, na resolução de uma equação produzida por um problema duas equações são unidas e consideradas como uma, não é surpresa que uma das raízes não possui conexão com o problema proposto, mas pertence a outro bem diferente desse."* (Maseres, 1758, p. 29, tradução nossa)

Essas falas transmitem uma suposta fidelidade que a linguagem algébrica precisa ter ao problema específico ao qual ela se propõe a expressar. A ideia fica então mais evidenciada na seguinte passagem:

> *"Essa conexão entre o problema e a equação produzida por eles é, como foi observado antes, quase auto-evidente, ou pode ser deduzida ao considerarmos o que significa um problema e a equação produzida por ele; pois uma equação produzida por um problema (se ele expressa todas as condições do problema), é uma proposição expressando em símbolos, ou a linguagem da álgebra, exatamente as mesmas ideias, suposições, e questões que estão expressas no problema em palavras, ou linguagem comum."* (Maseres, 1758, p. 33,34, tradução nossa)

A ideia de que equações devem transmitir ideias de proposições específicas, e que não devem trazer qualquer informação que não esteja nela contida mostram uma concepção claramente distinta daquela álgebra reconhecida pelo seu poder generalizante. Especificamente sobre o caso das equações quadráticas, ele demonstra mais claramente seu fundamentalismo:

> *"Esse método de unir duas equações diferentes pode talvez parecer ter seu uso; mas, eu confesso, eu não consigo vê-lo: pelo contrário, deveria parecer que perspicuidade e precisão requeiram que duas equações, ou proposições, que são em suas naturezas diferentes uma da outra, e são resultados de condições e suposições diferentes, deveriam ser cuidadosamente distinguidas uma da outra, e tratadas separadamente, cada uma por si, com vem sob consideração."* (Maseres, 1756, p. 29, tradução nossa)

Tal "foco no específico" constitui algo que Hankel associou explicitamente ao método sintético dos gregos, no contexto de seus problemas geométricos:

> *"Para cada caso diferente possível em relação à posição das linhas dadas e procuradas em um problema, haverá um problema ou teorema específico para o geômetra grego; e os maiores matemáticos da antiguidade consideravam necessário, em seus escritos, investigar todos os casos concebíveis, muitas vezes bastante numerosos de forma independente uns dos outros, e com igual detalhe e precisão. Por exemplo, o famoso livro de Apolônio περί λόγου ἀποτομῆ (de sectione rationis), investiga um problema idêntico em cerca de 80 casos diferentes apenas pela situação."* (Hankel, 1875, p. 2, tradução nossa)

É por conta disto que podemos entender a concepção de Maseres como uma "álgebra sintética", onde o alinhamento em que ele objetivava entre a álgebra e a geometria não se dava apenas na evidência da demonstração mas também no método. A álgebra que até então estava intimamente associada ao método analítico e seu poder generalizante de solução de problemas, agora, é associada ao método sintético. O simbolismo concorda então com a geometria por representar proposições específicas, o que por si também explica por que uma concepção dessas nunca poderia estabelecer uma equação quadrática ou cúbica geral. Afinal, isto configuraria uma generalização exagerada, e "as soluções do problema seriam maiores em número do que deveriam ser." O estudo das equações deve estar pautado na ideia concreta que elas podem representar, e não em generalizar. E a consideração de quantidades negativas, como pudemos ver, está intimamente associada a essa prática de generalizar e mesclar proposições.

> *"Era pra ser desejado, dessa forma, que raízes negativas nunca tivessem sido admitidas na álgebra, ou fossem novamente descartadas dela: pois se isso fosse feito, há uma boa razão de imaginar, que as objeções que muitos homens cultos e engenhosos fazem às computações algébricas, como sendo obscuras e complexas com noções quase ininteligíveis, seria dessa forma removidas; tornando-se certo que a álgebra, ou aritmética universal é, em sua própria natureza, uma ciência não menos simples, clara e capaz de demonstração do que a geometria."* (Maseres, 1758, p. 34, tradução nossa)

Todo problema da álgebra é, em última instância, atrelada à consideração das quantidades negativas, as quais não podem ser compreendidas como um ente legítimo. Na geometria,onde os entes considerados independentes de representantes intermediários, não há espaço para tais obscuridades.

William Frend e o suporte à álgebra de Maseres

As considerações reformistas de Maseres atraíram outro matemático que se tornou um propagador desta concepção limitada da ciência algébrica. William Frend (1757–1841) foi mais um associado de Cambridge, graduado pelo *Christ's College*. Após sua graduação, Frend iniciou uma carreira clerical que acabou após seu distanciamento da igreja anglicana o que, por sua vez, resultou na sua expulsão de Cambridge. Dissidente tanto por questões religiosas como matemáticas, Frend lançou seus *Princípios da Álgebra* alguns anos após sua expulsão, em 1796, onde reconhece seu colega Maseres como o "restaurador da álgebra".

Nos princípios de Frend conseguimos ver críticas ainda mais deliberadas sobre as práticas comuns de algebristas. Conceitos como quantidades menores do que nada e as operações realizadas com elas são recusadas e Frend faz alusão específica à álgebra de MacLaurin:

> "*quando uma pessoa não consegue explicar os princípios de uma ciência sem referência a metáforas, a probabilidade é que ele nunca tenha pensado com precisão sobre o assunto.* [...] *tentar tirar um número de um menor do que ele mesmo é ridículo. Mas isso é tentado por alguns*

> *algebristas, que falam de números menores do que nada, de multiplicar negativos com negativos, assim produzindo um número positivo, de números imaginários."* (Frend, 1796, p. x, tradução nossa)

A passagem acima demonstra uma crítica ao uso de analogias para legitimar quantidades negativas e suas operações. Sua crítica concerne todo fundamento da ciência algébrica, a começar pela natureza dos entes que os símbolos representam. Para William Frend, o conceito de número é a base para a álgebra. Diferente das quantidades negativas e imaginárias, o número natural é um conceito absoluto e claro. E a álgebra, para se tornar uma ciência dotada de certeza, deve ser baseada nesse conceito.

> *"A conversa com esses aprendizes me levou a refletir sobre a natureza de uma ciência que agora me parece construída nos princípios mais claros. As ideias de número são a mais simples e mais distintas na mente humana; as ações da mente sobre elas são igualmente simples e fáceis."* (Frend, 1796, p. ix, tradução nossa)

> *"Ainda que o mundo seja destruído, um será um, e três será três, e arte nenhuma pode mudar suas naturezas."* (Frend, 1796, p. x, tradução nossa)

Diante disto, fica claro que quantidades negativas são renegadas e passam a ser simplesmente entendidas como quantidades subtrativas. Além disso, o que Maseres havia dito sobre o significado exclusivamente operacional dos sinais + e - fica ainda mais desenvolvido em Frend. Sua teoria sobre o simbolismo algébrico fica pautada na ideia de que cada símbolo deve possuir uma leitura específica, de modo que cada equação possa ser lida de maneira clara. Dessa maneira, tendo estabelecido que quantidades negativas não podem existir na matemática, elas sequer poderiam surgir em equações intermediárias como Simpson permitia,uma vez que isso geraria equações destituídas de um significado:

> *"Novamente, escrever* $-b\times c-a=-f$ *não é apenas impróprio mas também absurdo, como se vê ao tentar lê-la."* (Frend, 1796, p. 5, tradução nossa)

Por conta dessa exigência, Friend chega a reconhecer um novo símbolo para representar uma diferença entre dois números *a* e *b* na hipótese de não sabermos qual número é maior. Com essa subtração "indefinida", Frend assegura que operações impossíveis não serão escritas mesmo na ausência de algum dado na hipótese.

> *"$\backsim$ é o sinal da diferença: $a \backsim b$ significa a diferença dos dois números a e b, que serão a - b ou b - a, respectivamente se a é maior ou menor do que b."* (Frend, 1796, p. 5, tradução nossa)

Dada que sua álgebra fica limitada por uma concepção onde as letras representam números naturais, as operações ficam explicadas a partir de raciocínios similares aos de Maseres. Assim, explicar regras de sinais para quantidades compostas é o que toma mais parte do texto. Por exemplo, para generalizar a subtração de duas quantidades compostas que possuam um sinal de -, Frend se utiliza o exemplo de subtrair *(2a - 2b)* de *(3a – 4b)*:

> *"Ao tirarmos* $2a-2b$*de* $3a$*, obtemos o resultado* $a+2b$*; mas o número do qual o outro deveria ter sido retirado não era* $3a$*, mas sim* $3a-4b$*; dessa forma,* $4b$ *ainda deve ser retirado do resto de* $3a$*, após a primeira retirada, para dar o resultado verdadeiro."* (Frend, 1796, p. 12, tradução nossa)

Suas equações quadráticas ficam divididas em formas similares às de Maseres, mas sem fazer comentários parecidos. No entanto, a maneira como Frend associa equações à transmissão de ideias concretas nos ajuda a relacionar o porquê de elas terem sido também divididas em três casos em seus *Princípios*. Isto nos permite novamente fazer alusão àquilo que Hankel disse sobre o foco no específico que caracteriza o sintetismo dos geômetras gregos. Os dois autores, assim, ficam associados não simplesmente pelo fato de rejeitarem as quantidades negativas, como também pelo fato de essa rejeição ser explicada por uma caracterização sintética da álgebra. Comentários que nos fazem entender mais sua abordagem contrária à generalidade da álgebra se encontram em sua teoria de equações. Ao nos preocuparmos apenas em fabricar generalizações, admitimos objetos sem significado na álgebra e deixamos de nos preocupar com a verdadeira questão que é resolver o problema apresentado.

> *"Dessa maneira, do desejo natural do homem em chegar o mais rápido possível à conclusão geral, o pensamento se sugeriu por si, que todas as equações poderiam ser produzidas por uma multiplicação de termos complexos similares, e que a analogia que havia sido observada entre copartes*[2] *e raízes de certas equações deveria ser estendida em geral a todas as equações."* (Frend, 1796, p. viii [parte II], tradução nossa)

> *"Apesar de ser correto que, na instância acima, onde (x + a)(x +a + b) produz a equação dada, a+b é somado a x, mas por uma ficção estranha, foi suposto que a+b é tomado de x, e que a + b é igual a um número c, a ser chamado ou de negativo ou de um número impossível. A natureza desses números fictícios agora se tornaram objeto de questionamento, e, em vez de buscar as raízes da equação, mesmo homens importantes, imitando os filósofos de uma região bem conhecida que estavam extraindo raios de sol de pepinos, desperdiçaram o óleo da meia-noite de maneira igualmente lucrativa, ao estabelecerem os direitos e privilégios de quantidades impossíveis."* (Frend, 1796, p. x [parte II], tradução nossa)

2 Nomenclatura usada por Frend para se referir aos coeficientes de uma incógnita.

III. A virada para uma "álgebra simbólica"

As críticas fundamentais trazidas por Maseres e Frend marcam uma tentativa de estabelecer a álgebra como um conhecimento científico comparável à geometria e à aritmética. Diante da limitação que suas críticas implicam, alguns matemáticos como William Greenfield lançaram opiniões na virada para o século XIX em defesa das quantidades negativas, tendo em vista principalmente sua aplicabilidade, apesar das dificuldades conceituais que elas impunham. No ano de 1800, Robert Woodhouse lançou uma crítica ainda mais elaborada numa resenha sobre os *Princípios* de Frend, argumentando que as críticas dos sintéticos eram insuficiente para eliminar as quantidades negativas, visto que elas não comprovam a inutilidade delas, nem demonstram que são objetos destituídos de valor científico. Para ele, as críticas se aplicam apenas a definições equivocadas, como aquelas que se referiam a "quantidade menor do que nada", o que significa que pode haver ainda uma concepção correta a ser descoberta.

A álgebra simbólica de Robert Woodhouse

Robert Woodhouse (1773–1827) foi um aluno bem-sucedido na *Caius College* de Cambridge. Seus esforços, contudo, concentravam-se na difusão dos avanços da análise realizadas no exterior, em contraste com o sintetismo impregnado na universidade britânica que se refletia nas concepções de Maseres. Nos anos de 1801, por meio de seu comunicado *Da verdade necessária de certas conclusões obtidas por meio de quantidades imaginárias* e em 1803, com seu grande livro sobre o cálculo, *Princípios do Cálculo Analítico,* Woodhouse elabora mais a sua crítica, trazendo uma nova base epistemológica para a álgebra, de modo que conceito de quantidade negativa fique rigidamente assentado para ele.

A maneira que Woodhouse legítima quantidades negativas e suas operações reside na ideia de que a álgebra trata-se de uma ciência de símbolos e operações arbitrárias sobre eles. Criam-se regras arbitrárias que são consideradas verdades por convenção em vez de refletirem alguma verdade objetiva.

> *"Mas ela [o princípio da transposição] anunciaria mais, se ela ordenasse que as quantidades fossem transferidas de um lado da equação para o outro, mudando os sinais + -, pois então por esta regra, poder-se-ia deduzir - c - b = -a, uma proposição ininteligível, e que de princípios evidentes e inferência estrita, nunca poderia ter sido obtida: Se então, pelo bem da comodidade no cálculo, tal regra for estabelecida, ela é parcialmente arbitrária, e supõe alguma convenção prévia, e as equações como -c - b= -a devem ser entendidas por meio de suas equações equivalentes c + b = a para os quais pela operação da mesma regra eles podem sempre ser reduzidas."* (Woodhouse, 1803, p. 2, tradução nossa)

Como podemos ver, a quantidade negativa "nasce" a partir da generalização da transposição, uma regra simbólica que era demonstrável na aritmética, tendo em vista ideia clara que a equação e as quantidades representavam, isto é, operações sobre "conjuntos de unidades". Aqui, essas amarras conceituais não existem mais. Podemos transferir as quantidades para os outros lados da equação com sinal trocado, e fazer $c + b = a$ se transformar em $- c - b = -a$ sem nos importarmos com qual princípio evidente nos permitiria fazer isso. A regra é puramente simbólica e fundamentada pela sua pressuposição.

> *"Se quantidades negativas forem o objeto de demonstração, deve ser em consequência de alguma regra arbitrária. A regra para transposição introduz quantidades negativas, e leva a equações sem significado direto."* (Woodhouse, 1803, p. 7)

Além disso, podemos ver como o autor repetidas vezes tenta "interpretar" as equações contendo as quantidades negativas ao compará-las com equações equivalentes que possuam sentido concreto. Apesar disso, o que ele defende é uma nova maneira de estabelecer verdades na álgebra, sem a recorrência a analogias ou a interpretações.

> *"Deve ser observado que a prova comum é defeituosa, cuja prova é assim declarada; É requerido subtrair -b de a; a = a + b -b, subtraia -b e sobra a +b; mas essa subtração é de fato um apagamento , e não é uma operação, que segue necessariamente do significado da palavra subtração e da noção que temos de -b; subtrair uma quantidade negativa pode ser usada como uma frase para significar a adição de uma quantidade positiva, mas não significa necessariamente isto: ou seja, essa equivalência das duas expressões não é uma consequência certa e necessária, a partir das noções que temos de subtração e quantidade negativa."* (Woodhouse, 1803, p. 3, tradução nossa)

Dessa maneira, vemos uma crítica direta ao método usado por algebristas do século anterior. Para Woodhouse, analogias e interpretações semânticas da palavra "subtrair" acabam por inserir premissas que não estão estabelecidas no sistema algébrico desses autores e, por não se tratarem de definições necessárias, constituem um equívoco. As operações com quantidades negativas, desta forma, são estabelecidas unicamente a partir de pressupostos claramente declarados pelo autor, e qualquer interpretação que possa ser dada a isso deve agora encaixar-se em vez de fundamentar tal regra. É a partir dessa ideia de que as quantidades e as operações não tentam ser introduzidas a partir de uma interpretação concreta que a álgebra de Woodhouse fica entendida como uma "álgebra simbólica."

Dessa maneira, subtrair uma quantidade negativa é o mesmo que somá-la, não porque podemos prová-lo, mas porque assim ficou estabelecido por convenção. Igualmente, a criticada regra dos sinais da multiplicação se estabelece da mesma maneira. Apesar disto, por trás do estabelecimento de regras "arbitrárias", subjaz um princípio importante que guia essa escolha de regras.

> *"Agora, toda demonstração por sinais, deve em última instância permanecer nas observações feitas em objetos individuais; e todas as*

> *variedades da transformação e combinação de sinais, com exceção das que são arbitrárias e convencionais, devem ser reguladas por propriedades observadas como pertencentes às coisas das quais os sinais são representantes. Demonstrações por sinais são mostradas verdadeiras por referência a coisas individuais que os sinais representam; e é mostrada como sendo geral, pelo comentário de que a operação é a mesma, qualquer que seja a coisa significada, ou, em outras palavras, que a operação é independente das coisas significadas.*" (Woodhouse, 1801, p. 90, tradução nossa)

Dessa maneira, podemos entender melhor o porquê de a regra da transposição ter sido generalizada assim como a regra da multiplicação terem sido assim estabelecidas: Elas são feitas de modo a reter as igualdades simbólicas demonstráveis na aritmética. Os símbolos da álgebra são "gerais", enquanto os da aritmética são específicos. Portanto, demonstrando o caso concreto específico e assumindo que a equação é geral, temos estabelecida a regra para símbolos insignificantes da álgebra. O motivo pelo qual se procede dessa maneira é uma "comodidade de cálculo", a qual pode ser entendida pela aritmética se tornando um caso específico da álgebra simbólica, uma vez que todas suas equivalências são retidas. Além disso, é claro, as regras para quantidades negativas ficam concordando com as regras já conhecidas pelos algebristas, de modo que sua utilidade é preservada. O mesmo valerá também para quantidades imaginárias ou outras quaisquer

> "[...] *nada pode ser afirmado com relação ao produto de* $(a+b\sqrt{-1})$ *e* $(c+d\sqrt{-1})$*, ou com relação à forma* $na=b\sqrt{-1}$*; e tudo que se pode transmitir pela forma* $(a+b\sqrt{-1})\times(c+d\sqrt{-1})$ *é, que os caracteres devem ser combinados da mesma maneira que os sinais das quantidades reais; de modo que* $(a+b\sqrt{-1})\times(c+d\sqrt{-1})$ *é equivalente a* $ac+ad\sqrt{-1}+cb\sqrt{-1}-bd$ *não assim demonstradas mas assim colocadas, por extensão da regra demonstrada por sinais reais para caracteres que são insignificantes.*" (Woodhouse, 1801, p. 93, tradução nossa)

Mais uma vez comparando com Hankel, que estabeleceu o seu princípio da permanência generalizando as regras estabelecidas para um primeiro domínio básico de números, podemos ver como esta concepção torna-se mais um jogo simbólico, onde o conceito de número torna-se imaterial. e as operações ficam "estendidas" para símbolos sem concretude, e não para objetos considerados pertencentes de domínios de números maiores. Quantidades imaginárias e negativas, portanto, poderiam ser entendidas apenas como conjuntos de símbolos aos quais podemos associar uma interpretação, e não como integrantes de domínios de números maiores.

O novo modelo de álgebra simbólica de George Peacock

Woodhouse não teve sucesso em converter Cambridge a favor da análise estrangeira, mas seus ideais não desapareceram por completo. Em 1812, formou-se a *Analytical Society* na universidade, um grupo composto principalmente de alunos graduandos que haviam estudado a análise estrangeira de maneira independente e seguiam ideias de reformulação do cálculo similares às de Woodhouse. O objetivo não era fomentar uma reforma institucional do ensino, mas apenas promover o avanço da matemática através da análise. Charles Babbage e Herschel, os membros mais ativos, chegaram a escrever e publicar uma memória, mas o grupo também não conseguiu atrair muita atenção no contexto sintético dominante em Cambridge. Apesar disto, o seu surgimento é um indicativo da antecipada influência que a análise exterior começava a exercer sobre os ingleses. Entre seus membros, a maioria passou a exercer carreiras clericais ou de direito ao fim da década, mas Charles Babbage e George Peacock desenvolveram textos posteriores que se assemelham bastante com a proposta feita por Woodhouse no início do século. Focaremos na publicação mais desenvolvida e popular de Peacock.

George Peacock (1791–1858) graduou-se no *Trinity College* com altas honrarias em matemática e, posteriormente, em 1815 tornou-se instrutor nesse mesmo *college*. Logo depois, em 1819, Peacock iniciou sua carreira clerical, mas sem largar seu interesse pela matemática. Lembrado como um reformador, Peacock chegou a incluir questões escritas na notação continental enquanto moderador do exame do *senate-house*, e formou parte de uma comissão que conseguiu extinguir a exigência de exames religiosos para ingressantes em Cambridge. Seu *Tratado de Álgebra*, lançado em 1830, está em linha com esse caráter reformador: nele podemos ver uma extensa exposição de uma nova concepção puramente simbólica da álgebra bastante alinhada com a proposta de Woodhouse.

Segundo Peacock, alcançamos a álgebra após duas transições: primeiramente, lidamos com a aritmética dos números determinados, que pode ser entendida como a prática de realizar operações específicas como $1+1 = 2$ ou $10-7=3$. Transitamos então pára a álgebra aritmética, na qual letras substituem os números para representar números indeterminadas, e assim somos capazes de obter relações gerais que valem para todos os números : $a(b+c) = ab + ac$ seja qual for o valor numérico de a, b e c. Finalmente, somos capazes de realizar uma nova generalização ao assumirmos que as letras não mais representam números: “a álgebra é a ciência geral do raciocínio por meio de linguagem simbólica” (Peacock, 1830, p. 1).

Peacock encontra-se portanto livre para desenvolver suas próprias regras de combinação simbólica. E seu primeiro pressuposto é a “independência dos sinais + e -”. Na prática, isto significa a admissão de quantidades do tipo $-a$ e $-b$. Como destaca Peacock, tal independência trata-se de um pressuposto que não pode ser demonstrado, mostrando que o autor segue uma concepção parecida com a de Woodhouse para legitimar proposições que não poderiam ser demonstradas por meio do significado concreto dos símbolos. Alternativamente, Peacock também sugere que a generalização de subtração por si só força a consideração de quantidades negativas isoladas: podemos subtrair a de $a+b$ *agora e*, generalizando as regras simbólicas da aritmética de troca de sinais de quantidades compostas, obtemos $a - (a+b) = a - a - b = -b$.

A passagem a seguir mostra o caráter formal e não demonstrável das regras operacionais na álgebra:

> "[…] *devemos necessariamente omitir toda condição que é em alguma maneira conectada a seus valores específicos ou representação: em outras palavras, a definição dessas operações deve dizer respeito à lei de suas combinações apenas."* (Peacock, 1830, p. x, tradução nossa)

Apesar da suposta liberdade que uma linguagem geral dos símbolos permite, Peacock admite que suas regras são arbitrárias apenas no sentido de não serem demonstráveis, mas a escolha dessas regras segue uma estratégia muito clara: a preservação das equivalências obtidas na aritmética simbólica. O "princípio da permanência" abaixo lhe permite assumir equivalências na álgebra simbólica a partir daquelas que foram descobertas na álgebra aritmética.

> *"Qualquer forma que seja algebricamente equivalente a outra, quando expressa em símbolos gerais, deve ser verdadeira, qualquer que seja aquilo que os símbolos denotam.*
>
> *De modo inverso, se descobrimos uma forma equivalente na álgebra aritmética ou qualquer outra ciência subordinada, quando os símbolos são gerais em forma mas específicos em suas naturezas, o mesmo deve ser uma forma equivalente, quando os símbolos são gerais em suas naturezas assim como em suas formas."* (Peacock, 1830, p. 104, tradução nossa)

Peacock chega a demonstrar esse princípio que ele considera como sendo primordial na álgebra. O que o princípio nos permite, em prática, é assumir que uma igualdade exista para símbolos gerais e, tendo-a demonstrado no caso onde os símbolos representam quantidades de natureza específica, no caso, quantidades concretas positivas, podemos concluí-la para quantidades de natureza qualquer. Diretamente por meio desta, o autor consegue estabelecer que $a^n \times a^m = a^{n+m}$, uma igualdade que pode ser demonstrada na aritmética, também vale quando *n* e *m* são quantidades quaisquer, inclusive as que possuem o sinal independente -. A origem da regra dos sinais, conforme Peacock explica, é *assumida* tendo em vista a consideração da multiplicação de quantidades compostas na aritmética. Conforme ele diz, podemos simplesmente assumir que ela também vale quando as quantidades são simples na álgebra (Peacock, 1830, p. 73).

É por conta das leis sobre quantidades gerais serem assumidas tendo em vista as leis demonstráveis da aritmética que a segunda fica sendo conhecida como a "ciência de sugestão" da primeira. A aritmética não fundamenta a álgebra em um sentido lógico, mas serve como uma fonte por meio da qual descobrimos equivalências simbólicas que podem então ser assumidas como valendo para quantidades gerais.

Conclusão:

As abordagens de Woodhouse e Peacock podem ser vistas como contemplando uma tentativa de responder ao problema de conceber quantidades negativas bem como o significado de realizar operações com elas. A solução consiste em aceitar a liberdade dos fundamentos da álgebra e, assim, permitir que quantidades negativas e suas operações sejam simplesmente assumidas segundo certos critérios. O problema em compreender a essência desses objetos e operações passa a ser um problema das aplicações exclusivamente. E em algumas delas, a consideração de quantidades negativas surge sem maiores discussões.

Podemos contrastar esse caminho seguido por analistas ingleses com algumas ideias que se desenvolveram na Alemanha no mesmo século. A saber, desde J.F.Fries (1773–1843) e, mais notavelmente, Förstemann (1791–1836), houve uma clara busca em tentar resolver o problema separando-se os conceitos de número e de quantidade. As restrições que permeiam certos tipos de quantidades não afetam o conceito abstrato de número. Como pudemos ver, uma tal separação ainda não havia sido contemplada nos algebristas ingleses.

Contrastando a concepção de Peacock com a do alemão Hermann Hankel, podemos enxergar algumas diferenças. Em Hankel, o conceito de número é previamente separado do conceito de quantidade e eles são discutidos em duas teorias distintas. Surpreendentemente, um "princípio da permanência" também é enunciado, mas ambos prestam papéis diferentes, ainda que aparentemente parecidos. Com o seu auxílio, Hankel preserva as equivalências obtidas no domínio dos números naturais ao realizar a extensão das operações. A subtração generalizada a-b fica entendida pela igualdade $(a-b)+b = a$, que, naturalmente, traz a consideração de novos entes, os números negativos, que passam então a compor o seu sistema dos números juntamente com os números "naturais" precedentes. Um mesmo processo permite que o autor estabeleça as regras dos sinais considerando-se a preservação da distributividade e de uma maneira distinta do salto realizado por Peacock em 1830: $(a+ (-a))c =0$ *então* $ac + (-a)c = 0$. Logo, $(-a)c=0$.

Um mesmo processo de extensão é realizado em seguida para introduzir ainda as frações e os números complexos, chamados por ele de "imaginários", além de suas respectivas operações. Essas sucessivas etapas que levam a uma extensão do seu "sistema de números" considerando-se a generalização de equações e operações antes impossíveis ficou conhecida como "*Zahlbereichserweiterung*", ou "extensão do domínio dos números".

Com Peacock e Woodhouse, vemos algo diferente. O termo $-b$ não é concebido a partir da solução de uma equação antes impossível, como ocorre em Hankel, mas a partir de uma generalização da transposição que acarreta uma ressignificação do símbolo -. O surgimento da quantidade negativa depende dessa ressignificação curiosa do que antes era um sinal operacional com quantidades concretas. Em outras palavras, ela é sobre uma generalização da manipulação de arranjos simbólicos e não de um novo ente que é definido pela equação $(a-b)+b=a$. Com isso, tanto Woodhouse como Peacock não desenvolvem claramente um sistema de números com seu próprio princípio da permanência, mas apenas postulam regras sem necessitar realizar o processo de extensão através de generalizações de operações e equações.

Diante do que foi colocado, podemos dizer que, apesar da proximidade da análise inglesa com a “análise continental” que ocorreu no século XIX, a concepção de quantidade negativa na álgebra permaneceu fortemente distinta da álgebra que se desenvolvia na Alemanha.

Bibliografia

Anon. [Isaac Newton] *“Universal Arithmetick: or, a Treatise of Arithmetical Composition and Resolution”*. London: Senex, 1720.
Becher, Harvey. Woodhouse, Babbage, Peacock and Modern Algebra. *Historia Mathematica* 7, págs. 389–400. 1980.
Cajori, Florian. *William Oughtred, a Great Seventeenth Century Teacher of Mathematics*. Chicago: Open Court, 1916.
Enros, Philip. The Analytical Society (1812–1813): Precursor of the Renewal of Cambridge Mathematics. *Historia Mathematica* 10, págs. 24–47. 1983.
Fontenelle, Bernard. *Éléments de la géométrie de l'Infini*, Paris: Imprimerie Royale, 1727.
Frend, William. *The Principles of Algebra*. London: J. Davis para G.G. e J. Robinson 1796.
Hankel, Hermann. *Die Elemente der projectivischen Geometrie in synthetischer Behandlung.* Leipzig: B.G. Teubner, 1875.
Kersey, John. *The Elements of that Mathematical Art Commonly Called Algebra.* London: W. Godbid, 1673.
MacLaurin, Colin. *A Treatise of Algebra.* London: Millar e Nourse, 1748.
Maseres, Francis. *A Dissertation on the Use of the Negative Sign in Algebra*. London: Payne, 1758
Oughtred, William. *Arithmeticae in numeris et speciebus instituto...quasi clavis mathematicae*, London: Harper, 1648.
Peacock, George. *A Treatise on Algebra*. London: J. & J.J. Deighton, 1830.
Pycior, Helena. *Symbols, Impossible Numbers and Geometric Entanglements.* 1ª edição, Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
Pycior, Helena. George Peacock and the British Origins of Symbolical Algebra. *Historia Mathematica* 8, págs. 23–45. 1981.
Rouse Ball, Walter. *A History of the Study of Mathematics at Cambridge*. Cambridge: Cambridge University Press, 1889.
Rouse Ball, Walter W. *A Short Account of the History of Mathematics*. New York: Courier Corporation, 1960.
Saunderson, Nicholas. *The Elements of Algebra.* Cambridge: University Pr., 1740.
Schubring, Gert. *Conflicts between generalization, rigor and intuition: number concepts underlying the development of analysis in 17–19th century, France and Germany.*, New York: Springer, 2005.
Simpson, Thomas. *A Treatise on Algebra.* Primeira ed. London: Nourse, 1745.
Stedall, Jacqueline. A Discourse Concerning Algebra: ENglish Algebra to 1685. New York: Oxford University Press, 2002.
Stedall, Jacqueline. *The Greate Invention of Algebra: Thomas Harriot’s Treatise on Equations*. Oxford: Oxford University Press, 2003.

Wallis, *John. A Treatise of Álgebra Both Historical and Practical: shewing The Original, Progress, and Advancement thereof, from time to time, and by what Steps it hath attained to the height at which now it is*. Oxford: John Playford, 1685.
Woodhouse, Robert. *The Principles of Analytical Calculation*. Cambridge: Cambridge University Press, 1803.
Woodhouse, Robert. On the necessary truth of certain conclusions obtained by means of imaginary expressions. Págs. 89–119, *Philosophical Transactions of the Royal Society of Londres:* 1801.

Michel Santos Salazar
Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ – Brasil
E-mail: michel.93.salazar@gmail.com

Gert Schubring
Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ – Brasil
E-mail: gert.schubring@uni-bielefeld.de