Traduções
Edição Especial da Revista Brasileira de História da Matemática – Vol. 21, nº 42 – pp. 206–228
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

"SOBRE AS SOMAS DAS SÉRIES DE RECÍPROCOS", DE L. EULER

Frederico J. A. Lopes
Universidade Federal de Mato Grosso – UFMT – Brasil

(aceito para publicação em maio de 2021)

Resumo

Esta é uma tradução do artigo *De summis serierum reciprocarum* (Sobre a soma das séries de recíprocos), de Leonhard Euler (1707–1783), em que ele resolve o famoso problema de Basileia.

Palavras-chave: problema de Basileia, história, Euler.

[ON THE SUMS OF SERIES OF RECIPROCALS]

Abstract

This is a translation of the paper *De summis serierum reciprocarum* (On the sums of series of reciprocals), by Leonhard Euler (1707–1783), where he solves the famous Basel Problem.

Keywords: Basel problem, history, Euler.

1. Introdução

O artigo *De summis serierum reciprocarum* (Sobre as somas das séries de recíprocos) trata da solução que L. Euler (1707–1783) deu ao problema conhecido como o *problema de Basileia:* encontrar a soma da série $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\text{etc.}$ na forma de uma expressão numérica fechada, envolvendo algumas constantes conhecidas e outras poucas operações aritméticas.

Originalmente proposto por Pietro Mengoli (1625–1686), esse problema se mantinha sem solução no tempo de Euler. O valor aproximado de 1,6449340668482264364..., como Euler nos apresenta com precisão espantosa, era conhecido, mas ninguém sabia ainda como encontrá-lo a não ser pelo processo insatisfatório de somar cada termo. Sua resolução foi tentada pelas gerações anteriores de matemáticos, notadamente por Johann Bernoulli (1667–1748), o mentor de Euler.

Quando Euler entra em cena, o problema acaba resolvido em apenas onze parágrafos, e ele encontra, como solução, o valor exato de $\frac{\pi^2}{6}$. Mas ele continua por mais oito parágrafos derivando consequências do método que o levou à solução. E, como é padrão em seus escritos, Euler se vangloria mais do seu método do que de ter resolvido o próprio problema, e é pelo seu método, a nosso ver, que este artigo merece atenção.

Somos da opinião, compartilhada por muitos, que a leitura das obras originais costuma ser mais instrutiva e formadora do que a leitura de um bom livro didático. É nesse sentido que realizamos essa tradução, aguardando também críticas e alternativas tradutórias que possam engrandecer e facilitar a leitura desse trabalho.

Bibliografia

EULER, Leonhard. *De summis serierum reciprocarum*. Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Vol. 7 (1734/35), 1740, pp. 123-134. Fac-símile em <https://www.biodiversitylibrary.org/item/38582>. Acesso: 26 de maio de 2021.

SANDIFER, Edward. *Estimating the Basel Problem*. MAA Online, dezembro de 2003. Disponível em <http://eulerarchive.maa.org/hedi/>. Acesso: 03 de setembro de 2020.

Frederico José Andries Lopes
Departamento de Matemática – UFMT – *Campus* de Cuiabá – Brasil

E-mail: contato@fredlopes.com.br

2. A tradução

Sobre as somas das séries de recíprocos

§.1.

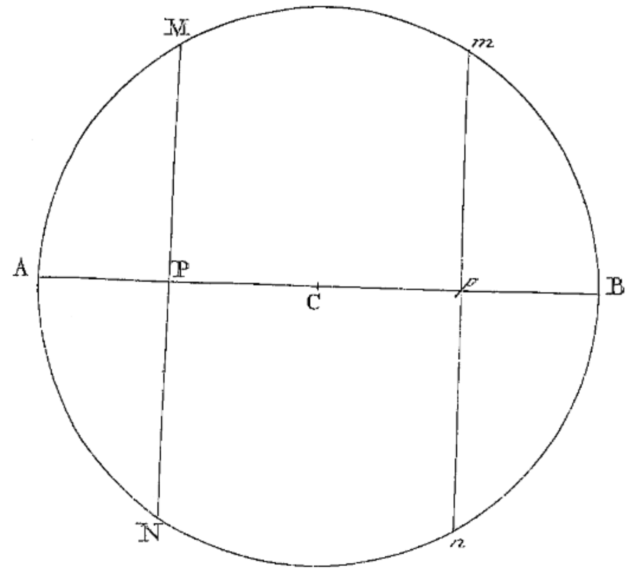
As séries recíprocas de potências de números naturais já foram de tal maneira examinadas e investigadas que parece bem pouco provável que se possa encontrar algo de novo sobre elas. Pois quase todos os que refletiram sobre somas de séries inquiriram também sobre as somas destas séries e, entretanto, não as puderam exprimir satisfatoriamente por nenhum método. Eu também, tendo apresentado vários métodos de somá-las, investiguei frequentemente essas séries com diligência e, no entanto, não consegui nada senão definir aproximadamente suas somas exatas ou reduzi-las a quadraturas de curvas principalmente transcendentes, o que já apresentei em uma dissertação publicada há pouco também na precedente. Falo aqui, no entanto, de séries de frações cujos numeradores são 1 e os denominadores são quadrados, cubos ou outras potências de números naturais, por exemplo $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}$ +etc. ou também $1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{64}$ +etc. e semelhantes de potências superiores cujo termo geral tem a forma $\frac{1}{x^n}$.

§.2. Recentemente fui conduzido, completamente de surpresa, a uma elegante expressão da soma da série $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}$ +etc, que depende da quadratura do círculo de tal maneira que, se a verdadeira soma da série for obtida, daí imediatamente se segue a quadratura do círculo. Pois descobri que o sêxtuplo da soma desta série é igual ao quadrado da periferia[1] do círculo cujo diâmetro é 1; em outras palavras, posta a soma da série = s, então a razão da periferia para o diâmetro será de $\sqrt{6\,s}$ para 1. Mostrei recentemente, porém, que a soma dessa série é aproximadamente 1,6449340668482264364, número que, extraída a raiz quadrada do seu sêxtuplo, dará o número 3,141592653589793238, que exprime a periferia do círculo de diâmetro 1. Em seguida percebi, da mesma maneira como cheguei a essa soma, que a soma da série $1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{256}+\frac{1}{625}$ +etc também depende da quadratura do círculo. De fato, essa soma, multiplicada por 90, dá o biquadrado[2] da periferia do círculo de diâmetro 1. E, da mesma maneira, pude determinar também as somas das séries seguintes nas quais os expoentes das potências são números pares.

§.3. Para mostrar, portanto, como cheguei a essa conclusão, farei uma exposição clara do método que utilizei. No círculo descrito AMBNA de centro C e raio AC ou BC = 1, tomei um arco qualquer AM, cujo seno é MP e o cosseno é CP.

[1] Euler quer dizer *circunferência*. Assim também "*semiperiferia*" quer dizer *semicircunferência*.

[2] Biquadrado indica o quadrado do quadrado, ou seja, a quarta potência.



Posto agora que o arco AM = *s*, o seno PM = *y* e o cosseno CP = *x*, por um método já bem conhecido, tanto o seno *y* quanto o cosseno *x* podem ser definidos por séries a partir do arco dado *s*, como se vê em toda parte: $y = s - \frac{s^3}{1.2.3} + \frac{s^5}{1.2.3.4.5} - \frac{s^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc}$ e $x = 1 - \frac{s^2}{1.2} + \frac{s^4}{1.2.3.4} - \frac{s^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc}$. A partir da consideração destas séries, cheguei às somas das séries de recíprocos referidas mais acima; em verdade, ambas equações servem quase ao mesmo propósito, e por isso basta que eu trate de uma só, o que passo a fazer a seguir.

§.4. A primeira equação $y = s - \frac{s^3}{1.2.3} + \frac{s^5}{1.2.3.4.5} - \frac{s^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc}$ exprime uma relação entre o arco e o seno. Com ela, tanto o seno poderá ser determinado a partir de um arco dado, quanto o arco a partir de um seno dado. Vou considerar então o seno *y* como dado e vou investigar como encontrar o arco *s* a partir de *y*. Mas antes de tudo é preciso observar que a cada seno *y* correspondem inumeráveis arcos e, portanto, que a equação proposta deve fornecer esses inumeráveis arcos. De fato, se nessa equação *s* é visto como uma incógnita, ela tem infinitas dimensões, e por isso não é de se espantar que esta equação contenha inúmeros fatores simples, qualquer um dos quais, se feito igual a zero, deve dar um valor conveniente para *s*.

§.5. Se todos os fatores dessa equação fossem conhecidos, também todas as raízes ou valores de *s* seriam conhecidos; por sua vez, se todos os valores de *s* pudessem ser atribuídos, então todos os fatores dessa equação também seriam encontrados. Mas para que eu possa tratar melhor tanto das raízes quanto dos fatores, transformo a equação proposta nesta forma $0 = 1 - \frac{s}{y} + \frac{s^3}{1.2.3.y} - \frac{s^5}{1.2.3.4.5.y}$ +etc. Agora, se todas as raízes desta equação ou todos os arcos que têm o mesmo seno y forem A, B, C, D, E etc., então os fatores também serão todas essas quantidades $1 - \frac{s}{A}$, $1 - \frac{s}{B}$, $1 - \frac{s}{C}$, $1 - \frac{s}{D}$ etc. Daí será $1 - \frac{s}{y} + \frac{s^3}{1.2.3.y} - \frac{s^5}{1.2.3.4.5.y} + \text{etc.} = \left(1 - \frac{s}{A}\right)\left(1 - \frac{s}{B}\right)\left(1 - \frac{s}{C}\right)\left(1 - \frac{s}{D}\right)$ etc.

§.6. Da natureza e da resolução das equações, o coeficiente $\frac{1}{y}$ do termo no qual se encontra s é igual à soma de todos os coeficientes de s nos fatores, ou seja, $\frac{1}{y} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D}$ +etc. E também o coeficiente de s^2, que é = 0, e por isso esse termo está ausente na equação, é igual à multiplicação de fatores da série $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{C}$, $\frac{1}{D}$ etc. tomados dois a dois. E daí que $\frac{1}{1.2.3.y}$ será igual à multiplicação dos fatores da série $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{C}$, $\frac{1}{D}$ etc. tomados três a três[3]. De maneira semelhante, será = 0 a multiplicação de fatores da mesma série tomados quatro a quatro, e $\frac{1}{1.2.3.4.5.y}$ = à multiplicação de fatores da mesma série tomados cinco a cinco, e assim por diante.

§.7. Posto agora o arco mínimo AM = A, cujo seno é PM = y, e a semiperiferia do círculo = p, serão A, p – A, 2p + A, 3p – A, 4p + A, 5p – A, 6p + A etc., e também –p – A, –2p + A, –3p – A, –4p + A, –5p – A , etc. todos os arcos cujo seno é também y. Portanto, tomada a série anterior $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{C}$, $\frac{1}{D}$, etc, ela se transforma em $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{p - A}$, $\frac{1}{-p - A}$, $\frac{1}{2\text{p+A}}$, $\frac{1}{-2\text{p+A}}$, $\frac{1}{3p - A}$, $\frac{1}{-3p - A}$, $\frac{1}{4\text{p+A}}$, $\frac{1}{-4\text{p+A}}$, etc. Daí que a soma de todos estes termos é = $\frac{1}{y}$, mas a soma dos fatores desta série [multiplicados] dois a dois é igual a 0; a soma dos fatores [multiplicados] três a três é $\frac{-1}{1.2.3.y}$; a soma de todos os fatores [multiplicados] quatro a quatro é = 0; a soma dos fatores [multiplicados] cinco a cinco = $\frac{+1}{1.2.3.4.5.y}$; a soma dos fatores [multiplicados] seis a seis = 0. E assim por diante.

§.8. Mas se é tomada uma série qualquer a + b + c + d + e + f + etc. cuja soma seja α, a soma dos fatores [multiplicados] dois a dois = β; a soma dos fatores [multiplicados] três a três = γ; a soma dos fatores [multiplicados] quatro a quatro = δ etc., a soma dos quadrados

[3] No original, Euler se engana e escreve “*ex quaternis*”, “tomados quatro a quatro”.

de cada termo, isto é, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ + etc. será = $\alpha^2 - 2\beta$, e a soma dos cubos $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ + etc. = $\alpha^3 - 3\alpha\beta + 3\gamma$; a soma dos biquadrados = $\alpha^4 - 4\alpha^2\beta + 4\alpha\gamma + 2\beta^2 - 4\delta$. Mas para que fique mais claro como estas fórmulas progridem, façamos a soma dos próprios termos a, b, c, d, etc. ser = P, a soma dos quadrados = Q, a soma dos cubos = R, a soma dos biquadrados = S, a soma das quintas potências = T, a soma das sextas = V, etc. Feito isso, será $P = \alpha$; $Q = P\alpha - 2\beta$; $R = Q\alpha - P\beta + 3\gamma$; $S = R\alpha - Q\beta + P\gamma + 4\delta$; $T = S\alpha - R\beta + Q\gamma - P\delta + 5\varepsilon$; etc.

§.9. Como, portanto, em nosso caso, a soma de todos os termos da série $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{p-A}$, $\frac{1}{-p-A}$, $\frac{1}{2\,\mathrm{p+A}}$, $\frac{1}{-2\,\mathrm{p+A}}$, $\frac{1}{3\,p-A}$, $\frac{1}{-3\,p-A}$, etc. é $\alpha = \frac{1}{y}$; a soma dos fatores [multiplicados] dois a dois é $\beta = 0$ e os seguintes $\gamma = \frac{-1}{1.2\,.3\,.\,y}$, $\delta = 0$, $\varepsilon = \frac{+1}{1.2\,.3\,.4\,.5\,.\,y}$, $\zeta = 0$, etc., a soma dos próprios termos será $P = \frac{1}{y}$; a soma dos quadrados dos termos $Q = \frac{P}{y} = \frac{1}{y^2}$; a soma dos cubos dos termos $R = \frac{Q}{y} - \frac{1}{1.2\,y}$; a soma dos biquadrados $S = \frac{R}{y} - \frac{P}{1.2\,.3\,y}$. E ainda $T = \frac{S}{y} - \frac{Q}{1.2\,.3\,y} + \frac{1}{1.2\,.3\,.4\,y}$; $V = \frac{T}{y} - \frac{R}{1.2\,.3\,y} + \frac{P}{1.2\,.3\,.4\,.5\,y}$; $W = \frac{V}{y} - \frac{S}{1.2\,.3\,y} + \frac{Q}{1.2\,.3\,.4\,.5\,y} - \frac{1}{1.2\,.3\,.4\,.5\,.6\,y}$. A partir desta lei, as somas das potências mais altas restantes são determinadas facilmente.

§.10. Façamos agora o seno PM = *y* igual ao raio, tal que *y* = 1, e será o arco mínimo A, cujo seno é 1, a quarta parte da periferia, $=\frac{1}{2}\,p$, ou, denotando por *q* a quarta parte da periferia, será A = *q* e *p* = *2q*. E daí que a série anterior se transforma nesta $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{q}$, $-\frac{1}{3\,q}$, $-\frac{1}{3\,q}$, $\frac{+1}{5\,q}$, $\frac{+1}{5\,q}$, $-\frac{1}{7\,q}$, $-\frac{1}{7\,q}$, $\frac{+1}{9\,q}$, $\frac{+1}{9\,q}$, etc. com termos iguais dois a dois. Daí que a soma destes termos, que é $\frac{2}{q}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+etc.\right)$ é igual a P = 1. Daqui vem, portanto, que $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+etc.$ é $= \frac{q}{2} = \frac{p}{4}$. Então o quádruplo desta série é igual à semiperiferia do círculo cujo raio é 1, ou a toda a periferia do círculo, cujo diâmetro é 1. Esta é a série já tratada por Leibniz, com a qual ele encontrou a quadratura do círculo. Com isso, fica claro o fundamento sólido deste método, se a alguém ele talvez não pareça certo; assim também não se pode em absoluto duvidar das outras coisas que se derivam desse método.

§.11. Somemos agora o quadrado dos termos encontrados para o caso y = 1, e vem esta série $\frac{+1}{q^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{9\,q^2}+\frac{1}{9\,q^2}+\frac{1}{25\,q^2}+\frac{1}{25\,q^2}+etc.$ cuja soma é $\frac{1}{q^2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+etc.\right)$ que, portanto, deve ser igual a Q = P = 1. Daí segue que a soma da série $1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+etc.$ é $=\frac{q}{2}=\frac{p^2}{4}$ denotando como p toda a periferia do círculo cujo diâmetro é 1. Mas a soma desta série $1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+etc.$ depende da soma da série $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+etc.$ porque esta diminuída de uma quarta parte sua dá aquela. E a soma desta série é igual à soma daquela com seu terço. Por isso, será $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+etc.=\frac{p^2}{6}$ e, portanto, a soma desta série multiplicada por 6 é igual ao quadrado da periferia do círculo cujo diâmetro é 1; esta é a proposição que mencionei o início.

§.12. Como no caso em que y = 1 temos que P = 1 e Q = 1, os [valores] das letras restantes R, S, T, V etc. serão como a seguir: R = $\frac{1}{2}$; S = $\frac{1}{3}$; T = $\frac{5}{24}$; V = $\frac{2}{15}$; W = $\frac{61}{720}$; X = $\frac{17}{325}$; etc. Como a soma dos cubos é igual a R = $\frac{1}{2}$, será $\frac{2}{q^3}\left(1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-etc.\right)=\frac{1}{2}$. Por isso, será $1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-etc.=\frac{q^3}{4}=\frac{p^3}{32}$. Assim, a soma dessa série multiplicada por 32 dá o cubo da periferia do círculo cujo diâmetro é 1. De maneira semelhante, a soma dos biquadrados, que é $\frac{2}{p^4}\left(1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+etc.\right)$ deve ser igual a $\frac{1}{2}$, e por isso será $1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+etc.=\frac{q^4}{6}=\frac{p^4}{96}$. E esta série multiplicada por $\frac{16}{15}$ é igual a $1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+etc.$, e por isso essa série é igual a $\frac{p^4}{90}$; ou soma da série $1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+etc.$ multiplicada por 90 dá o biquadrado da periferia do círculo cujo diâmetro é 1.

§.13. De maneira semelhante, serão encontradas as somas das potências superiores, mostradas como a seguir: $1-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7^5}+\frac{1}{9^5}-etc.=\frac{5\,q^5}{48}=\frac{5\,p^5}{1536}$; e $1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\frac{1}{9^6}+etc.=\frac{q^6}{15}=\frac{p^6}{960}$. Encontrada a soma desta série, será conhecida ao mesmo tempo a soma da série $1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}+etc.$ que será $\frac{p^6}{945}$. Em seguida, para a sétima potência, será $1-\frac{1}{3^7}+\frac{1}{5^7}-\frac{1}{7^7}+\frac{1}{9^7}-etc.=\frac{61\,q^7}{1440}=\frac{61\,p^7}{184320}$ e para a oitava, $1+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{7^8}+\frac{1}{9^8}+etc.=\frac{17\,q^8}{630}=\frac{17\,p^8}{161280}$; de onde se deduz que $1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{6^8}+etc.=\frac{p^8}{9450}$. Devemos observar que os sinais dos termos das séries de potências de expoentes ímpares se alternam e, para as potências pares, são iguais; e esta é a causa por que a soma da série geral $1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+etc.$ só pode ser dada naqueles casos em que *n* é um número par. Além disso, devemos notar também que se pode ser encontrado o termo geral da série 1, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{24}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{61}{720}$, $\frac{17}{325}$ etc., valores que encontramos para as letras P, Q, R, S etc., então a quadratura do círculo será encontrada.

§.14. Para isso, façamos o seno PM ser igual ao raio e vejamos então quais séries surgem quando são atribuídos outros valores a *y*. Seja, portanto, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$, a cujo seno o arco mínimo correspondente é $\frac{1}{4}$p. Posto então A = $\frac{1}{4}$p, a série de termos simples ou de primeira potência será $\frac{4}{p}+\frac{4}{3\,p}-\frac{4}{5\,p}-\frac{4}{7\,p}+\frac{4}{9\,p}+\frac{4}{11\,p}-etc.$ da qual s soma P é igual a $\frac{1}{y}=\sqrt{2}$. Portanto, se terá $\frac{p}{2\sqrt{2}}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{9}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}-etc.$, série que difere da de Leibniz só na disposição dos sinais, e que já foi há muito tratada por Newton. E a soma dos quadrados daqueles termos, a saber, $\frac{16}{p^2}\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+etc.\right)$ é igual a Q = 2. Portanto, será $1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+etc.=\frac{p^2}{8}$, como foi encontrado antes.

§.15. Se é feito $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$, o arco mínimo correspondente a esse seno será 60º e, por isso, $A=\frac{1}{3}\,p$. Neste caso, vem a seguinte série de termos $\frac{3}{p}+\frac{3}{2\,p}-\frac{3}{4\,p}-\frac{3}{5\,p}+\frac{3}{7\,p}+\frac{3}{8\,p}-etc.$, cuja soma dos termos é igual a $\frac{1}{y}=\frac{2}{\sqrt{3}}$. Então será $\frac{2\,p}{3\sqrt{3}}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}+etc.$ A soma dos quadrados desses termos é = $\frac{1}{y^2}=\frac{4}{3}$; de onde vem que $\frac{4\,p^2}{27}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}+etc.$, série da qual falta cada terceiro termo. Mas esta série depende também desta $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+etc.$ cuja soma havia sido encontrada = $\frac{p^2}{6}$; pois se desta série se diminui uma nona parte sua vem a série anterior, cuja soma, por isso, deve ser = $\frac{p^2}{6}\left(1-\frac{1}{9}\right)$ = $\frac{4\,pp}{27}$. De modo semelhante, se são tomados outros senos, outras séries surgirão, tanto de termos simples quanto de termos quadrados e de potências mais altas cujas somas envolvem a quadratura do círculo.

§.16. Mas se é posto $y = 0$, as séries não poderão mais ter somas por causa do y no denominador, ou a equação inicial dividida por y. Mas séries poderão ser deduzidas daí de outro modo se n é um número par na série $1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+etc.$; assim, encontradas as somas destas séries, deduzirei depois o caso em que $y = 0$. Então, posto $y = 0$, a mesma equação fundamental se torna $0=s-\frac{s^3}{1.2.3.}+\frac{s^5}{1.2.3.4.5}-\frac{s^7}{1.2.3.4.5.6.7}+etc.$, equação cujas raízes dão todos os arcos dos quais o seno é = 0. Mas há uma só raiz mínima $s = 0$ e, por isso, a equação, dividida por s, mostrará todos os arcos restantes cujo seno é = 0; esses arcos serão as raízes desta equação $0=1-\frac{s^2}{1.2.3.}+\frac{s^4}{1.2.3.4.5}-\frac{s^6}{1.2.3.4.5.6.7}+etc.$ E os arcos dos quais o seno é = 0 são p, –p, +2p, –2p, +3p, –3p etc., em que um elemento a cada dois é o negativo do outro, e isso porque a mesma equação, por causa das dimensões de s, só mostra os pares. Por isso, os divisores daquela equação serão $1-\frac{s}{p}$, $1+\frac{s}{p}$, $1-\frac{s}{2p}$, $1+\frac{s}{2p}$, etc., e com esses divisores conjugados dois a dois teremos $1-\frac{s^2}{1.2.3}+\frac{s^4}{1.2.3.4.5}-\frac{s^6}{1.2.3.4.5.6.7}+etc.=\left(1-\frac{s^2}{p^2}\right)\left(1-\frac{s^2}{4p^2}\right)\left(1-\frac{s^2}{9p^2}\right)\left(1-\frac{s^2}{16p^2}\right)etc.$

§.17. Já está manifesto, pela natureza das equações, que o coeficiente $\frac{1}{1.2.3}$ de ss será igual a $\frac{1}{p^2}+\frac{1}{4p^2}+\frac{1}{9p^2}+\frac{1}{16p^2}+etc.$ E a soma dos fatores desta série [multiplicados] dois a dois será = $\frac{1}{1.2.3.4.5}$; e a soma dos fatores [multiplicados] três a três etc. Por essa razão, será, como no §.8, α = $\frac{1}{1.2.3}$; β = $\frac{1}{1.2.3.4.5}$; γ = $\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}$, etc., e também que, posta a soma dos termos $\frac{1}{p^2}+\frac{1}{4p^2}+\frac{1}{9p^2}+\frac{1}{16p^2}+etc.$ = P, e a soma dos quadrados daqueles termos = Q; a soma dos cubos = R; a soma dos biquadrados = S; etc., será, pelo §.8, P = α = $\frac{1}{1.2.3}$ = $\frac{1}{6}$; Q = Pα – 2β = $\frac{1}{90}$; R = Qα – Pβ + 3γ = $\frac{1}{945}$; S = Rα – Qβ + Pγ –

$4\delta = \frac{1}{9450}$; $T = S\alpha - R\beta + Q\gamma - P\delta + 5\varepsilon = \frac{1}{93555}$; $V = T\alpha - S\beta + R\gamma - Q\delta + P\varepsilon - 6\zeta = \frac{691}{6825.93555}$ etc.

§.18. Daí, portanto, as seguintes somas são derivadas:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+etc.=\frac{p^2}{6}=P$$
$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+etc.=\frac{p^4}{90}=Q$$
$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}+etc.=\frac{p^6}{945}=R$$
$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}+etc.=\frac{p^8}{9450}=S$$
$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\frac{1}{5^{10}}+etc.=\frac{p^{10}}{93555}=T$$
$$1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{4^{12}}+\frac{1}{5^{12}}+etc.=\frac{691\,p^{12}}{6825.93555}=V.$$

Com a lei dada, porém, só com muito trabalho essas séries podem ser estendidas para potências mais altas. Mas, dividindo cada série pela precedente, surgem as seguintes equações: $p^2 = 6P = \frac{15\,Q}{P} = \frac{21\,R}{2\,Q} = \frac{10\,S}{R} = \frac{99\,T}{10\,S} = \frac{6825\,V}{691\,T}$ etc., e cada uma dessas expressões é igual ao quadrado da periferia do círculo cujo diâmetro é 1.

§.19. Ainda que as somas dessas séries possam ser exibidas facilmente, elas não são de muita utilidade para exprimir aproximadamente a periferia do círculo por causa da raiz quadrada que deverá ser extraída. Das séries anteriores, vamos derivar expressões que sejam iguais à própria periferia *p*. E elas são como se segue:

$$p=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+etc.\right)$$
$$p=2\left(\frac{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}+etc.}{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+etc.}\right)$$

$$p=4\left(\frac{1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\frac{1}{11^2}+etc.}{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}+etc.}\right)$$

$$p=3\left(\frac{1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\frac{1}{11^4}+etc.}{1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\frac{1}{11^3}+etc.}\right)$$

$$p=\frac{16}{5}\left(\frac{1-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7^5}+\frac{1}{9^5}-\frac{1}{11^5}+etc.}{1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\frac{1}{11^4}+etc.}\right)$$

$$p=\frac{25}{8}\left(\frac{1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\frac{1}{9^6}+\frac{1}{11^6}+etc.}{1-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7^5}+\frac{1}{9^5}-\frac{1}{11^5}+etc.}\right)$$

$$p=\frac{192}{61}\left(\frac{1-\frac{1}{3^7}+\frac{1}{5^7}-\frac{1}{7^7}+\frac{1}{9^7}-\frac{1}{11^7}+etc.}{1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\frac{1}{9^6}+\frac{1}{11^6}+etc.}\right)$$

3. Texto original

DE

SVMMIS SERIERVM RECIPROCARVM.

AVCTORE

Leonh. Eulero.

§. 1.

TAntopere iam pertractatae et inueſtigatae ſunt ſeries reciprocae poteſtatum numerorum naturalium, vt vix probabile videatur de iis noui quicquam inueniri poſſe. Quicunque enim de ſummis ſerierum meditati ſunt, ii fere omnes quoque in ſummas huiusmodi ſerierum inquiſiuerunt, neque tamen vlla methodo eas idoneo modo exprimere potuerunt. Ego etiam iam ſaepius, cum varias ſummandi methodos tradidiſſem, has ſeries diligenter ſum perſecutus, neque tamen quicquam aliud ſum aſſecutus, niſi vt earum ſummam vel proxime veram definiuerim vel ad quadraturas curuarum maxime tranſcendentium reduxerim; quorum illud in diſſertatione proxime praelecta, hoc vero in praecedentibus praeſtiti. Loquor hic autem de ſeriebus fractionum, quarum numeratores ſunt 1, denominatores vero vel quadrata, vel cubi, vel aliae dignitates numerorum naturalium; cuius modi ſunt $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+$ etc., item $1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{64}+$ etc. atque ſimiles ſuperiorum poteſtatum, quarum termini generales continentur in hac forma $\frac{1}{x^n}$. Tabula VII.

Q 2 §. 2.

§. 2. Deductus ſum autem nuper omnino inopinato ad elegantem ſummae huius ſeriei $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} +$ etc. expreſſionem, quae a circuli quadratura pendet, ita, vt ſi huius ſeriei vera ſumma haberetur, inde ſimul circuli quadratura ſequeretur. Inueni enim ſummae huius ſeriei ſextuplum aequale eſſe quadrato peripheriae circuli, cuius diameter eſt 1; ſeu poſita iſtius ſeriei ſumma $= s$, tenebit $\sqrt{6s}$ ad 1 rationem peripheriae ad diametrum. Huius autem ſeriei ſummam nuper oſtendi proxime eſſe 1, 644934066848226436, ex cuius numeri ſextuplo, ſi extrahatur radix quadrata, reipſa prodit numerus 3, 14159265358979323 8 exprimens circuli peripheriam, cuius diameter eſt 1. Iisdam porro veſtigiis, quibus hanc ſummam ſum conſecutus, incedens huius ſeriei $1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \frac{1}{256} + \frac{1}{625} +$ etc. ſummam quoque a quadratura circuli pendere deprehendi. Summa nempe eius per 90 multiplicata dat biquadratum peripheriae circuli, cuius diameter eſt 1. Atque ſimili ratione etiam ſequentium ſerierum, in quibus exponentes dignitatum ſunt numeri pares, ſummas determinare potui.

§. 3. Quo igitur, quemadmodum haec ſum adeptus, commodiſſime oſtendam, totam rem, quo ipſe vſus ſum, ordine exponam. In circulo AMBNA centro C

Figura 1. radio AC vel $BC = 1$ deſcripto contemplatus ſum arcum quemcunque AM, cuius ſinus eſt MP, coſinus vero CP. Poſito nunc arcu $AM = s$, ſinu $PM = y$, et coſinu $CP = x$, per methodum iam ſatis cognitam tam ſinus y quam coſinus x ex dato arcu s per ſeries poſſunt

ſunt definiri, eſt enim, vti paſſim videre licet $y = s - \frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{s^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{s^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} +$ etc. atque $x = 1 - \frac{s^2}{1\cdot 2} + \frac{s^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{s^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} +$ etc. Ex harum ſcilicet aequationum conſideratione ad ſummas ſupra memoratarum ſerierum reciprocarum perueni; quarum aequationum quidem vtraque ad eundem fere ſcopum dirigitur, et hanc ob rem ſufficiet alteram tantum eo, quem ſum expoſiturus, modo tractaſſe.

§. 4. Aequatio ergo prior $y = s - \frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{s^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{s^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} +$ etc. exprimit relationem inter arcum et ſinum. Quare ex ea tam ex dato arcu eius ſinus, quam ex dato ſinu eius arcus determinari poterit. Conſidero autem ſinum y tanquam datum, et inueſtigo, quemadmodum arcum s ex y erui oporteat. Hic vero ante omnia animaduertendum eſt, eidem ſinui y innumerabiles arcus reſpondere, quos ergo innumerabiles arcus aequatio propoſita praebere debebit. Si quidem in iſta aequatione s tanquam incognita ſpectetur, ea infinitas habet dimenſiones, ideoque mirum non eſt, ſi iſta aequatio innumeros contineat factores ſimplices, quorum quisque nihilo aequalis poſitus, idoneum pro s valorem dare debet.

§. 5. Quemadmodum autem, ſi omnes factores huius aequationis cogniti eſſent, omnes quoque radices illius ſeu valores ipſius s innoteſcerent, ita viciſſim ſi omnes valores ipſius s aſſignari poterunt, tum quoque ipſi factores omnes habebuntur. Quo autem eo melius tam de radicibus quam de factoribus iudicare queam, trans-

Q 3 muto

226 DE SVMMIS

muto aequationem propoſitam in hanc formam: $0 = 1 - \frac{s}{y} + \frac{s^3}{1.2.3.y} - \frac{s^5}{1.2.3.4.5.y} +$ etc. Si nunc omnes radices huius aequationis ſeu omnes arcus, quorum idem eſt ſinus y, fuerint A, B, C, D, E etc. tum factores quoque erunt omnes iſtae quantitates, $1 - \frac{s}{A}$, $1 - \frac{s}{B}$, $1 - \frac{s}{C}$, $1 - \frac{s}{D}$ etc. Quamobrem erit $1 - \frac{s}{y} + \frac{s^3}{1.2.3.y} - \frac{s^5}{1.2.3.4.5.y} +$ etc. $= (1 - \frac{s}{A})(1 - \frac{s}{B})(1 - \frac{s}{C})(1 - \frac{s}{D})$ etc.

§. 6. Ex natura autem et reſolutione aequationum conſtat, eſſe coëfficientem termini, in quo ineſt s, ſeu $\frac{1}{y}$ aequalem ſummae omnium coëfficientium ipſius s in factoribus ſeu $\frac{1}{y} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D} +$ etc. Deinde eſt coëfficiens ipſius s^2, qui eſt $= 0$, ob hunc terminum in aequatione deficientem, aequalis aggregato factorum ex binis terminis ſeriei, $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{C}$, $\frac{1}{D}$ etc. Porro erit $-\frac{1}{1.2.3.y}$ aequale aggregato factorum ex quaternis terminis eiusdem ſeriei $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{C}$, $\frac{1}{D}$ etc. Similique modo erit $0 =$ aggregato factorum ex quaternis terminis eiusdem ſeriei, et $+\frac{1}{1.2.3.4.5.y} =$ aggregato factorum ex quinis terminis iſtius ſeriei, et ita porro.

§. 7. Poſito autem minimo arcu $AM = A$, cuius ſinus eſt $PM = y$, et ſemiperipheria circuli $= p$, erunt A, $p - A$, $2p + A$, $3p - A$, $4p + A$, $5p - A$, $6p + A$ etc. item $-p - A$, $-2p + A$, $-3p - A$, $-4p + A$, $-5p - A$, etc. omnes arcus, quorum ſinus eſt idem y. Quam igitur ante aſſumſimus ſeriem $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{C}$, $\frac{1}{D}$, etc. ea transmutatur in hanc $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{p-A}$, $\frac{1}{-p-A}$, $\frac{1}{2p+A}$, $\frac{1}{-2p+A}$, $\frac{1}{3p-A}$, $\frac{1}{-3p-A}$, $\frac{1}{4p+A}$, $\frac{1}{-4p+A}$ etc. Horum ergo omnium termi-

terminorum ſumma eſt $= \frac{1}{y}$; ſumma autem factorum ex binis terminis huius ſeriei eſt aequalis 0; ſumma factorum ex ternis $= \frac{-1}{1.2.3.y}$, ſumma factorum ex quaternis $= 0$; ſumma factorum ex quinis $= \frac{+1}{1.2.3.4.5.y}$; ſumma factorum ex ſenis $= 0$. Atque ita porro.

§. 8. Si autem habeatur ſeries quaecunque $a + b + c + d + e + f +$ etc. cuius ſumma ſit α, ſumma factorum ex binis terminis $= \beta$; ſumma factorum ex ternis $= \gamma$; ſumma factorum ex quaternis $= \delta$, etc. erit ſumma quadratorum ſingulorum terminorum, hoc eſt $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 +$ etc. $= \alpha^2 - 2\beta$; ſumma vero cuborum $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ etc. $= \alpha^3 - 3\alpha\beta + 3\gamma$; ſumma biquadratorum $= \alpha^4 - 4\alpha^2\beta + 4\alpha\gamma + 2\beta^2 - 4\delta$. Quo autem clarius appareat, quomodo hae formulae progrediantur, ponamus ipſorum terminorum a, b, c, d, etc. ſummam eſſe $= P$, ſummam quadratorum $= Q$, ſummam cuborum $= R$, ſummam biquadratorum $= S$, ſummam poteſtatum quintarum $= T$, ſummam ſextarum $= V$ etc. His poſitis erit $P = \alpha$; $Q = P\alpha - 2\beta$; $R = Q\alpha - P\beta + 3\gamma$; $S = R\alpha - Q\beta + P\gamma + 4\delta$; $T = S\alpha - R\beta + Q\gamma - P\delta + 5\varepsilon$; etc.

§. 9. Cum igitur in noſtro caſu ſeriei $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{p-A}$, $\frac{1}{-p-A}$, $\frac{1}{2p+A}$, $\frac{1}{-2p+A}$, $\frac{1}{3p-A}$, $\frac{1}{-3p-A}$ etc. ſumma omnium terminorum ſeu α ſit $= \frac{1}{y}$; ſumma factorum ex binis ſeu $\beta = 0$, atque vlterius $\gamma = \frac{-1}{1.2.3.y}$; $\delta = 0$; $\varepsilon = \frac{+1}{1.2.3.4.5.y}$, $\zeta = 0$; etc. erit ſumma ipſorum illorum terminorum $P = \frac{1}{y}$; ſumma quadratorum illorum terminorum $Q = \frac{P}{y} = \frac{1}{y^2}$;

ſumma

ſumma cuborum illorum terminorum $R = \frac{Q}{y} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot y}$; ſumma biquadratorum $S = \frac{R}{y} - \frac{P}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot y}$. Atque porro $T = \frac{S}{y} - \frac{Q}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot y} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot y}$; $V = \frac{T}{y} - \frac{R}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot y} + \frac{P}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot y}$; $W = \frac{V}{y} - \frac{S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot y} + \frac{Q}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot y} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot y}$. Ex qua lege facile reliquarum altiorum poteſtatum ſummae determinantur.

§. 10. Ponamus nunc ſinum $PM = y$ aequalem radio, vt ſit $y = 1$, erit minimus arcus A cuius ſinus eſt 1 quarta peripheriae pars, $= \frac{1}{4}p$, ſeu denotante q quartam peripheriae partem erit $A = q$ et $p = 2q$. Superior ergo ſeries abibit in iſtam $\frac{1}{q}, \frac{1}{q}, \frac{-1}{3q}, -\frac{1}{3q}, \frac{+1}{5q}, +\frac{1}{5q}, -\frac{1}{7q}, -\frac{1}{7q}, +\frac{1}{9q}, +\frac{1}{9q}$, etc. binis terminis exiſtentibus aequalibus. Horum ergo terminorum ſumma, quae eſt $\frac{2}{q}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.})$ aequalis eſt ipſi $P = 1$. Hinc igitur oritur $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.} = \frac{q}{2} = \frac{p}{4}$. Huius ergo ſeriei quadruplum aequatur ſemiperipheriae circuli, cuius radius eſt 1, ſeu toti peripheriae circuli, cuius diameter eſt 1. Atque haec eſt ipſa ſeries a *Leibnitio* iam pridem prolata, qua circuli quadraturam definiuit. Ex quo magnum huius methodi, ſi cui forte ea non ſatis certa videatur, firmamentum elucet; ita vt de reliquis, quae ex hac methodo deriuabantur, omnino non liceat dubitari.

§. 11. Sumamus nunc inuentorum terminorum pro caſu quo $y = 1$, quadrata, prodibitque haec ſeries $+\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{9q^2} + \frac{1}{9q^2} + \frac{1}{25q^2} + \frac{1}{25q^2} + \text{etc.}$ cuius ſumma eſt $\frac{2}{q^2}(\frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \text{etc.})$, quae ergo aequalis eſſe debet ipſi $Q = P = 1$. Ex quo ſequitur huius ſeriei $1 + \frac{1}{9}$

+

$+ \frac{1}{25} + \frac{1}{49} +$ etc. ſummam eſſe $= \frac{q^2}{2} = \frac{p^2}{8}$; denotante p totam circuli peripheriam, cuius diameter eſt $= 1$. Summa autem huius ſeriei $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} +$ etc. pendet a ſumma ſeriei $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} +$ etc. quia haec quarta ſui parte minuta illam dat. Eſt ergo ſumma huius ſeriei aequalis ſummae illius cum ſui triente. Quamobrem erit $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} +$ etc. $= \frac{p^2}{6}$, ideoque huius ſeriei ſumma per 6 multiplicata aequalis eſt quadrato peripheriae circuli cuius diameter eſt 1; quae eſt ipſa propoſitio cuius initio mentionem feci.

§. 12. Cum igitur caſu quo $y = 1$, ſit $P = 1$ et $Q = 1$, erunt reliquarum litterarum R, S, T, V etc. vt ſequitur: $R = \frac{1}{2}$; $S = \frac{1}{3}$; $T = \frac{5}{24}$; $V = \frac{2}{15}$; $W = \frac{61}{720}$; $X = \frac{17}{315}$ etc. Cum autem ſumma cuborum ipſi $R = \frac{1}{2}$ ſit aequalis, erit $\frac{8}{q^3}(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} -$ etc.$) = \frac{1}{2}$. Quare erit $1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} -$ etc. $= \frac{q^3}{16} = \frac{p^3}{32}$. Huius ideo ſeriei ſumma per 32 multiplicata dat cubum peripheriae circuli cuius diameter eſt 1. Simili modo ſumma biquadratorum, quae eſt $\frac{2}{p^4}(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} +$ etc.$)$ aequalis eſſe debet $\frac{1}{3}$, ideoque erit $1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} +$ etc. $= \frac{q^4}{6} = \frac{p^4}{96}$. Eſt vero haec ſeries per $\frac{16}{15}$ multiplicata aequalis huic $1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} +$ etc. quare iſta ſeries aequalis eſt $\frac{p^4}{90}$; ſeu ſeriei $1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} +$ etc. ſumma per 90 multiplicata dat biquadratum peripheriae circuli cuius diameter eſt 1.

§. 13. Simili modo inuenientur ſummae ſuperiorum poteſtatum; prodibit autem vt ſequitur $1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} -$ etc. $= \frac{5q^5}{48} = \frac{5p^5}{1536}$; atque $1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6}$

Tom. VII. R $+$ etc

130 *DE SVMMIS*

$+$ etc. $= \frac{q^6}{15} = \frac{p^6}{960}$. Inuenta vero huius ſeriei ſumma, cognoſcetur ſimul ſumma huius ſeriei $1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} +$ etc. quae erit $= \frac{p^6}{945}$. Porro pro poteſtatibus ſeptimis erit $1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9^7} -$ etc. $= \frac{61 q^7}{1440} = \frac{61 p^7}{184320}$ ac pro octauis $1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} +$ etc. $= \frac{17 q^8}{630} = \frac{17 p^8}{161280}$; vnde deducitur $1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{6^8} +$ etc. $= \frac{p^8}{9450}$. Obſeruandum autem eſt de his ſeriebus in potentiis exponentium imparium ſigna terminorum alternari, pro poteſtatibus paribus vero eſſe aequalia; hocque in cauſa eſt, quod huius generalis ſeriei $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} +$ etc. iis tantum caſibus ſumma poſſit exhiberi, quibus n eſt numerus par. Praeterea quoque notandum eſt, ſi ſeriei $1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{5}{24}, \frac{2}{15}, \frac{61}{720}, \frac{17}{315}$ etc. quos valores pro litteris P, Q, R, S etc. inuenimus, terminus generalis poſſet aſſignari, tum eo ipſo quadraturam circuli exhibitum iri.

§. 14. In his poſuimus ſinum PM aequalem radio, videamus ergo quales ſeries prodeant, ſi ipſi y alii valores tribuantur. Sit igitur $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, cui ſinui minimus arcus reſpondens eſt $\frac{1}{4} p$. Poſito ergo $A = \frac{1}{4} p$ erit ſeries terminorum ſimplicium ſeu primae poteſtatis iſta $\frac{4}{p} + \frac{4}{3p} - \frac{4}{5p} - \frac{4}{7p} + \frac{4}{9p} + \frac{4}{11p} -$ etc. cuius ſeriei ſumma P aequalis eſt $\frac{1}{y} = \sqrt{2}$. Habebitur ergo $\frac{p}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15}$ etc. quae ſeries tantum ratione ſignorum a *Leibnitiana* differt, et a *Newtono* iam dudum eſt prolata. Summa vero quadratorum illorum terminorum nempe $\frac{16}{p^2}(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} +$ etc.$)$ aequalis eſt ipſi $Q = 2$. Erit

ergo

ergo $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} +$ etc. $= \frac{p^2}{8}$, vti ante est inuentum.

§. 3. Si fiat $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ erit minimus arcus huic sinui respondens $60°$, ideoque $A = \frac{1}{3}p$. Hoc ergo casu sequens prodibit series terminorum $\frac{3}{p} + \frac{3}{2p} - \frac{3}{4p} - \frac{3}{5p} + \frac{3}{7p} + \frac{3}{8p}$ etc. quorum terminorum summa aequalis est ipsi $\frac{s}{y} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Habebitur ergo $\frac{2p}{3\sqrt{3}} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} +$ etc. Summa vero quadratorum illorum terminorum est $= \frac{s}{y^2} = \frac{4}{3}$; vnde sequitur fore $\frac{4p^2}{27} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} +$ etc. in qua serie desunt termini ternario constantes. Pendet autem haec series quoque ab ista $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$ etc. cuius summa erat inuenta $= \frac{p^2}{6}$; nam si haec series sui parte nona minuatur prodit ipsa superior series, cuius ideo summa debet esse $= \frac{p^2}{6}(1 - \frac{1}{9}) = \frac{4pp}{27}$. Simili modo si alii assumantur sinus, aliae prodibunt series, tam simplicium, quam terminorum quadratorum altiorumque potestatum, quarum summae quadraturam circuli inuoluent.

§. 16. At si ponatur $y = 0$, huiusmodi series non amplius assignari poterunt, propter y in denominatorem positum, seu aequationem initialem per y diuisam. Alio autem modo series inde deduci poterunt, quae cum sint ipsae series $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} +$ etc. si n est numerus par: quemadmodum harum serierum summae sint inueniendae, seorsum ex hoc casu quo $y = 0$ deducam. Posito vero $y = 0$ ipsa aequatio fundamentalis abit in hanc $0 = s - \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{s^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{s^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} +$ etc. cuius aequationis radices dant omnes arcus, quorum sinus est $= 0$.

R 2 Est

Eſt autem vna minimaque radix $s = 0$, quare aequat per s diuiſa exhibebit reliquos arcus omnes, quorum ſinus eſt $= 0$, qui arcus proinde erunt radices huius aequationis $0 = 1 - \frac{s^2}{1.2.3} + \frac{s^4}{1.2.3.4.5} - \frac{s^6}{1.2.3.4.5.6.7} +$ etc. Ipſi vero arcus quorum ſinus eſt $= 0$ ſunt $p, -p, +2p, -2p, 3p, -3p$ etc. quorum binorum alter alterius eſt negatiuus, id quod quoque ipſa aequatio propter dimenſiones ipſius s tantum pares indicat. Quare diuiſores illius aequationis erunt $1 - \frac{s}{p}$, $1 + \frac{s}{p}$, $1 - \frac{s}{2p}$, $1 + \frac{s}{2p}$, etc. atque coniungendis binis horum diuiſorum erit $1 - \frac{s^2}{1.2.3} + \frac{s^4}{1.2.3.4.5} - \frac{s^6}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc.} = (1 - \frac{s^2}{p^2})(1 - \frac{s^2}{4p^2})(1 - \frac{s^2}{9p^2})(1 - \frac{s^2}{16p^2})$ etc.

§. 17. Manifeſtum iam eſt ex natura aequationum, fore coefficientem ipſius ss ſeu $\frac{1}{1.2.3}$ aequalem $\frac{1}{p^2} + \frac{1}{4p^2} + \frac{1}{9p^2} + \frac{1}{16p^2} +$ etc. Summa vero factorum ex binis terminis huius ſeriei erit $= \frac{1}{1.2.3.4.5}$; ſummaque factorum ex ternis $= \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}$ etc. Hanc ob rem erit iuxta §. 8. $\alpha = \frac{1}{1.2.3}$; $\beta = \frac{1}{1.2.3.4.5}$; $\gamma = \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}$; etc. atque poſita quoque ſumma terminorum $\frac{1}{p^2} + \frac{1}{4p^2} + \frac{1}{9p^2} + \frac{1}{16p^2} +$ etc. $= P$, et ſumma quadratorum eorundem terminorum $= Q$; ſumma cuborum $= R$; ſumma biquadratorum $= S$; etc. erit per §. 8. $P = \alpha = \frac{1}{1.2.3} = \frac{1}{6}$; $Q = P\alpha - 2\beta = \frac{1}{90}$; $R = Q\alpha - P\beta + 3\gamma = \frac{1}{945}$; $S = R\alpha - Q\beta + P\gamma - 4\delta = \frac{1}{9450}$; $T = S\alpha - R\beta + Q\gamma - P\delta + 5\varepsilon = \frac{1}{93555}$; $V = T\alpha - S\beta + R\gamma - Q\delta + P\varepsilon - 6\zeta = \frac{691}{6825.93555}$ etc.

§. 18.

§. 18. Ex his ergo deriuantur ſummae ſequentes:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} \text{ etc.} = \frac{p^2}{6} = P$$
$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} \text{ etc.} = \frac{p^4}{90} = Q$$
$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} \text{ etc.} = \frac{p^6}{945} = R$$
$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} \text{ etc.} = \frac{p^8}{9450} = S$$
$$1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \frac{1}{5^{10}} \text{ etc.} = \frac{p^{10}}{93555} = T$$
$$1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{4^{12}} + \frac{1}{5^{12}} \text{ etc.} = \frac{691 p^{12}}{6825 \cdot 93555} = V.$$

quae ſeries ex data lege attamen multo labore ad altiores poteſtates produci poſſunt. Diuidendis autem ſingulis ſeriebus per praecedentes orientur ſequentes aequationes: $p^2 = 6P = \frac{15Q}{P} = \frac{21R}{2Q} = \frac{10S}{R} = \frac{99T}{10S} = \frac{6825V}{691T}$ etc. quibus expreſſionibus ſingulis quadratum peripheriae cuius diameter eſt 1, aequatur.

§. 19. Cum autem harum ſerierum ſummae etiamſi vero proxime facile exhiberi poſſent, tamen non multum adiumenti afferre queant ad peripheriam circuli vero proxime exprimendam propter radicem quadratam, quae extrahi deberet; ex prioribus ſeriebus eliciemus expreſſiones, quae ipſi peripheriae p ſint aequales. Prodibit autem vt ſequitur:

R 3 $p = 4$

$$p = 4\left(1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \text{etc.}\right)$$

$$p = 2\left(\frac{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.}}\right)$$

$$p = 4\left(\frac{1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} + \text{etc.}}{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \text{etc.}}\right)$$

$$p = 3\left(\frac{1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{11^4} + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} + \text{etc}}\right)$$

$$p = \tfrac{16}{5}\left(\frac{1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \frac{1}{11^5} + \text{etc.}}{1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{11^4} + \text{etc.}}\right)$$

$$p = \tfrac{25}{8}\left(\frac{1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \frac{1}{11^6} + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \frac{1}{11^5} + \text{etc.}}\right)$$

$$p = \tfrac{192}{61}\left(\frac{1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9^7} - \frac{1}{11^7} + \text{etc.}}{1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \frac{1}{11^6} + \text{etc.}}\right)$$

DE