Revista Brasileira de História da Matemática – Vol. 22, nº 43 – pp. 68–101
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

ESTUDO EPISTEMOLÓGICO DAS DESIGUALDADES MATEMÁTICAS

Edgardo Locia Espinoza

Armando Morales Carballo

José Luis Sánchez Santiesteban

José María Sigarreta
Universidad Autónoma de Guerrero – UAGRO – Mexico

(aceito para publicação em janeiro de 2022)

Resumen

Las desigualdades han desmostrado ser unas de las herramientas básicas para enfrentar múltiples problemas teórico-prácticos de la ciencia y la tecnología. En este artículo, guiados por la Teoría Dialéctica del Conocimiento, se realiza un estudio epistemológico de las condiciones de evolución y desarrollo de las desigualdades matemáticas, teniendo en cuenta su origen, sistematización y formalización.

Palabras Clave: Desigualdades, Epistemología, Dialéctica.

Resumo

As desigualdades provaram ser uma das ferramentas básicas para enfrentar vários problemas teóricos e práticos da ciência e da tecnologia. Neste artigo, guiado pela Teoria Dialética do Conhecimento, é realizado um estudo epistemológico das condições de evolução e desenvolvimento das desigualdades matemáticas, levando em consideração sua origem, sistematização e formalização.

Palavras-chave: Desigualdades, Epistemologia, Dialética.

[EPISTEMOLOGICAL STUDY OF MATHEMATICAL INEQUALITIES]

Abstract

Inequalities have proven to be one of the basic tools to solve multiple theoretical and practical problems of science and technology. In this article, guided by the Theory of Dialectical Knowledge, an epistemological study of the conditions of evolution and development of mathematical inequalities is carried out, taking into account their origin, systematization and formalization.

Keywords: Inequalities, Epistemology, Dialectic.

1. Introducción

La matemática ha alcanzado un extraordinario desarrollo, no sólo desde sus posiciones puramente teóricas sino también aplicadas. Sus resultados han favorecido un acelerado desarrollo de la sociedad en todas sus dimensiones y han permitido comprender mejor la naturaleza. La "exactitud" de los resultados y métodos matemáticos, no sólo viene dada por la precisión de sus cálculos, ni por la generalidad o alcances de sus igualdades y/o ecuaciones; sino, en lo fundamental, por su capacidad y poder de decidibilidad en un determinado contexto teórico-práctico. Las desigualdades matemáticas son herramientas básicas con múltiples aplicaciones a diferentes problemas teórico-prácticos de la ciencia y la técnica y han jugado un papel muy importante como elemento integrador, en la evolución de la Ciencia Matemática.

En la vida cotidiana, se recurre de manera frecuente, ya sea consciente o no, al uso de las desigualdades matemáticas. Como veremos en lo que sigue, tanto las desigualdades como las igualdades matemáticas, se desarrollaron de manera conjunta a partir de un proceso básico de comparación y, además, han estado presentes en el desarrollo y consolidación de la Ciencia Matemática. Por otro lado, investigaciones como las realizadas por Linchevski y Sfard (1991) o Bazzini y Tsamir (2004), documentan que los estudiantes encuentran dificultades para manipular o interpretar qué es una desigualdad y qué representa su solución. En este contexto, se han identificado también ciertos conceptos erróneos que utilizan los estudiantes respecto a las desigualdades (TSAMIR, TIROSH ,TIANO, 2004; SACKUR, 2004) y se ha intentado descifrar la naturaleza de tales conceptos (LINCHEVSKI, SFARD, 1991; TALL, 2004; DREYFUS, HOCH, 2004).

Cuando la enseñanza, el aprendizaje o la comprensión de un concepto encuentran problemas, es común, en la investigación en matemática educativa, orientar la búsqueda de la respuesta al problema, hacia el desarrollo histórico-epistemológico del concepto (CORNU, 1991), para indagar, por ejemplo, la existencia de obstáculos epistemológicos (BROUSSEAU, 1998) asociados con los conceptos. Sin embargo, varias investigaciones indican que los estudios epistemológicos, se valoran no solo por detectar obstáculos epistemológicos. En tal dirección, Filloy (1999), al estudiar la génesis histórica se pone de manifiesto que para un mismo concepto matemático se han ido sucediendo una diversidad de puntos de vista sobre el mismo que, en su momento, fueron considerados como correctos y posteriormente han sido rechazados o revisados. Por su parte, la epistemología ayuda a establecer la configuración de los elementos constitutivos de la significación de un determinado concepto, analizando los diferentes sentidos con los que ha podido aparecer y su adaptación a la resolución de los distintos problemas. Además, según Bagni (2005a) se ha observado que muchas veces los obstáculos epistemológicos asociados con un determinado concepto en su desarrollo histórico, se repiten en la práctica educativa en el sentido de que las reacciones de los alumnos en el aula (cuando se da el primer contacto con una noción) son a veces bastante similares a las reacciones observadas en los matemáticos cuando encuentran un nuevo concepto (TALL, VINNER, 1981)

A partir del análisis de la bibliografía consultada, en lo fundamental, podemos aseverar que existen escasos trabajos cuyo objetivo sea estudiar la evolución epistemológica de las Desigualdades Matemáticas. Para nuestro estudio, asumiremos la concepción defendida por la Dialéctica, en particular la asociada con su Teoría del Conocimiento: “de la percepción viva al pensamiento abstracto y de este a la práctica, tal es el camino dialéctico del conocimiento de la verdad... (LENIN, 1979, p. 165)”. Siguiendo a Jungk (1979), asumiremos también que *el concepto* es el reflejo mental de una clase de individuos, procesos, relaciones de la realidad objetiva o subjetiva (o el reflejo de una clase de clases), sobre la base de sus características invariantes. El concepto posee dos cualidades que son: el contenido del concepto y la extensión del concepto. El contenido del concepto abarca todas las características comunes esenciales a los objetos considerados y que han sido tomados para la formación de clases. La extensión comprende a todos los objetos que pertenecen al concepto de acuerdo con su contenido.

La definición del concepto es el reflejo verbal de la clase de individuos, procesos o relaciones, sobre la base de sus características invariantes. Tales asunciones permiten analizar el origen, la sistematización y la formalización de las desigualdades matemáticas en su relación con la realidad objetiva y, además, explicar su conformación mediante la actividad y las leyes de la dialéctica. Así, la validez o el éxito en la utilización de los conceptos matemáticos asociados con las desigualdades matemáticas, se estudiarán indisolublemente ligados a la “exactitud” con que en ellos se reflejen los objetos en su interacción con la realidad objetiva. La relación entre los conceptos matemáticos y la realidad objetiva pone de manifiesto que no hay identidad funcional entre los conceptos matemáticos y los objetos del mundo material que reflejan, pues el conjunto de propiedades y rasgos de cualquier objeto, es mucho más amplio que el de cualquier concepto que se tenga de dicho objeto.

Las desigualdades matemáticas aparecen en la base de los procesos de aproximación, estimación, acotación, interpolación, monotonía, extremos y en general, en los modelos construidos por el hombre para el estudio o acercamiento a una determinada realidad (ya sea objetiva o subjetiva). Tal razón se hace patente en que sólo podemos encontrar valores aproximados y no exactos, de las magnitudes que se determinan en uno u otro problema práctico, por ejemplo, la distancia al sol o la velocidad de la luz. La precisión de estos valores depende del error de la medición. Es decir, tanto menor sea el error de medición mejor se aproximará el valor encontrado al valor exacto (HALMAGHI, LILJEDAHL, 2015).

Desde el punto de vista lógico, "$2+7=9$" es una oración que expresa una proposición con el valor de verdad "verdadero"; "$x+2=5$" no es una oración: no expresa una proposición, sino una condición con respecto a los valores que pueden asignarse a la variable involucrada y asumirá un valor de verdad, ya sea "verdadero" o "falso", dependiendo de qué número se asigna a x como valor. Consideremos ahora la desigualdad "$x+2<5$": aquí afirmamos que $x+2$ es menor que 5 y esto es cierto si y solo si $x<3$ (BAGNI, 2005a).

La base axiomática para las desigualdades algebraicas y los teoremas asociados ellas, es dada por Hardy, Littlewood y Polya (1934) al considerar los axiomas de campo (que rigen a las operaciones de suma y multiplicación entre números) e introducir el término no definido de *número positivo* y los dos axiomas siguientes

I. O a es 0 o $a$es positivo o $-a$ es positivo, y estas posibilidades son exclusivas
II. La suma y el producto de dos números positivos son también números positivos.

Asumir lo anterior permite definir las desigualdades entre números de la siguiente manera: a *es mayor que* b (o en símbolos $a>b$) si y sólo si $a-b$ es positivo y a *es menor que* b (o en símbolos $a<b$) si y sólo si $b-a$ es positivo.

Para analizar, en un primer momento el origen, la sistematización y la formalización de las desigualdades matemáticas, a partir de sus relaciones teórico-prácticas, estudiaremos sus elementos asociados (conceptos, métodos y procedimientos) dentro de las diferentes culturas y civilizaciones. En un segundo momento, estudiaremos las desigualdades matemáticas como herramienta para la evolución y desarrollo de la Matemática y su conformación y estructuración como teoría, entendiendo como teoría al conjunto de reglas, principios, métodos y procedimientos acerca de una determinada área del conocimiento o actividad científica, prescindiendo de sus posibles aplicaciones prácticas. En la base de la Teoría de las Desigualdades Matemáticas, están los conceptos de: Conjunto, relación, medición comparación, aproximación, desigualdad, inecuación, entre otros.

Desde el punto de vista epistemológico, resultaría imposible seguir el rastro de la evolución conceptual de las desigualdades matemáticas, sin analizar las etapas de desarrollo de las igualdades y ecuaciones. Razón por la cual, el camino metodológico será a través de estudiar el origen, sistematización y formalización de los conceptos algebraicos, donde se establecen tres periodos notorios, un tanto rígidos, para el desarrollo del álgebra, enmarcados en la evolución de los conceptos, estos son: el Álgebra Retórica, el Álgebra Sincopada o *Icónica* y el Álgebra Simbólica (BOYER, 1968). No obstante, estas etapas de construcción de los conceptos algebraicos, nebulosas y a veces confusas, con periodos que incluso se traslapan, sólo son una forma de poder estructurar la evolución de los conceptos. Estos periodos evolutivos de los conceptos algebraicos permitirán explorar y sacar a la luz los pasos seguidos por el concepto de *desigualdad*.

A continuación, se evidencia un recorrido epistemológico, en función, de las etapas anteriormente señaladas (origen, sistematización y formalización), en relación con los elementos o conceptos básicos asociados con las desigualdades matemáticas (léase conceptos de relación, relación de orden, comparación, medición, aproximación, desigualdades e inecuaciones) a través de las diferentes etapas considerando sus momentos histórico-concretos y sus alcances más importantes.

2. Origen de las desigualdades matemáticas.

Para analizar el origen de las desigualdades matemáticas, se puede partir de las investigaciones de la Dra. Brannon, experta en el desarrollo de la Cognición Cuantitativa; misma que ha realizado estudios sistemáticos sobre el comportamiento de los animales en relación a las desigualdades. Su trabajo se centra en estudiar e investigar cómo los humanos, ya sean adultos o niños, incluyendo bebés, así como animales mamíferos, y otros, representan el número y hacen uso de sus propiedades. Uno de sus experimentos más importante lo realizó con lémures y monos Rhesus y estableció que estos animales reconocen cuáles cantidades son menores que otras y que muchos de los animales, en particular los monos, parecen responder a la esencia abstracta de lo que es un número (JORDAN, BRANNON, LOGOTHETIS, GHAZANFAR, 2005).

Por otro lado, Collette (1986), afirma que "Nada, en los hechos actuales, nos impide establecer el nacimiento de ciertas relaciones matemáticas en los primeros tiempos de la humanidad". Por lo que, a partir de lo descrito anteriormente, podemos inferir que, hace cinco millones de años (cuando ya había homínidos que podían relacionar la variabilidad de las cantidades), el hombre manifestó una primera relación con los conceptos básicos asociados con las desigualdades matemáticas.

En el primer periodo de evolución del Álgebra, conocida como Álgebra Retórica, las desigualdades se debieron establecer como frases que describían una determinada situación, quizás como relaciones de comparación entre las partes de una representación, entre una cuerda y el diámetro de una circunferencia, entre determinados periodos de tiempo, etc. Esta etapa del Álgebra es muy extensa, quizás podamos considerar su origen desde el inicio de la actividad del Hombre de Neanderthal, que involucró la fabricación de herramientas, pinturas rupestres y el desarrollo de agrupaciones nómadas de mayor auge, como con los hombres de Cro-Magnon (es decir, cuando se inició el periodo Paleolítico, que duró hasta el fin de la última glaciación, en el inicio del periodo Holocénico).

En la edad de piedra (paleolítico, mesolítico y neolítico, periodo que comprende desde que los humanos empezaron a crear y elaborar las diferentes herramientas hechas, fundamentalmente, de piedra hasta la creación de herramientas elaboradas a base de metales), antes de la invención de la escritura, los hombres fabricaban sus propios objetos y herramientas de trabajo. En relación con la cantidad de herramientas producidas para realizar una determinada actividad, debieron establecer algún tipo de correspondencia o comparación. Nótese que contar no es más que comparar conjuntos. Según investigadores y arqueólogos el hombre podía contar hace más de 20.000 años como lo muestra el Hueso de Ishango, y un hueso de lobo con incisiones encontrado en Checoslovaquia y que data de hace aproximadamente 30,000 años (BOYER, 1968). La comparación siempre se hace en relación a un conjunto que previamente se ha designado como base (GONZÁLEZ, MARTÍN-LOECHES, SILVÁN, 2010). Las primeras mediciones, realizadas por el hombre, comparaban ciertas partes de sus propios cuerpos: el pie, el largo del brazo y quizás lo extenso de sus pasos.

Cabe señalar que las civilizaciones antiguas sólo consideraron las mediciones bajo el aspecto de los números enteros positivos y de su razón. Ya en el periodo del Mesolítico y Neolítico, con los Homo Sapiens (periodo en el que sólo se utilizaban símbolos ideográficos para comunicar una información) las nociones de desigualdades sólo debieron establecerse mediante símbolos muy confusos, con la comparación de conjuntos, por parte de los hombres prehistóricos. Por ejemplo, dónde hay un rebaño con mayor número de animales, dónde hay más frutas, dónde hay más miembros de una tribu, entre otras. Así, las primeras nociones de desigualdades, pueden ser entendidas, en lo fundamental, como un desequilibrio.

Resulta atinado plantear el importante papel de la invención de la escritura (4.000 años a. C.) para la historia, no sólo analizada como producto natural para darle sentido semiótico e ideográfico a las representaciones; mismas que pasan de ser básicas y concretas a transmitir ideas generales; sino que con la escritura se alcanza un nivel cualitativo superior de desarrollo del hombre y además, los estudios históricos adquieren un carácter científico-concreto, dejando de ser relatos que, en el mejor de los casos, sólo pueden ser contrastados con herramientas y/o representaciones pictóricas.

La llamada Matemática Babilónica fue desarrollada por los pueblos mesopotámicos, desde los antiguos sumerios (3.000 a. C.) hasta la caída de Babilonia (539 a. C.). Las primeras huellas de los elementos básicos sobre las desigualdades matemáticas en dicha etapa se encuentran en un sistema de metrología (asociado a medidas comunes en sus prácticas de intercambio) desarrollado por los antiguos sumerios de Mesopotamia hacia el año 4000 a. C. Los sumerios ya poseían el conocimiento de las reglas usuales para medir volúmenes y áreas y del teorema de Pitágoras. Los pueblos mesopotámicos representaban los números con marcas en forma de cuña de acuerdo con su tipo de escritura.

Las tablillas cuneiformes contienen la contribución de dicha cultura a la matemática (COLLETTE, 1986). Dichas tabillas muestran que ya conocían el teorema atribuido a Pitágoras (569–475 a. C) (la tablilla Plimpton 322 de la colección George Arthur Plimpton de la Universidad de Columbia); operaciones algebraicas con ecuaciones de segundo grado; tablas de potencias de segundo y tercer grado; tablillas de raíces cuadradas (tablilla CBS 08266, Museo de Antropología de la Universidad de Pennsylvania); uso de las fracciones, (usaban como único denominador el 60). Los sumerios, cultura importante dentro de la antigua Mesopotamia, alcanzaron un dominio de la aritmética tal que les permitió elaborar un procedimiento para calcular la raíz cuadrada de un número, este procedimiento era muy similar al conocido como Regula Falsa o de Falsa posición (FOWLER, ROBSON, 1998) y puede formularse, en términos modernos, como sigue:

Sea a_1 *una primera aproximación de* $\sqrt{a}$. *Hallamos* $\frac{a}{a_1}=b_1$. *Supongamos que*

$a_1^2 < a$ *(si es mayor se razona de forma semejante) entonces* $b_1^2 = \frac{a^2}{a_1^2} > a$*, es decir,* $a_1 < \sqrt{a} < b_1$ *por lo que si hallamos la media aritmética de* a_1 y b_1 *será mejor aproximación. No es difícil demostrar que el cuadrado de esta media aritmética es mayor que* a*. Así que calculemos* $b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ *que será una nueva y mejor aproximación de* $\sqrt{a}$*. Sea* $a_2 = \frac{a}{b_2}$*, cuyo cuadrado será menor que* a*. Calculemos* $b_3 = \frac{a_2 + b_2}{2}$ *que aproximará mejor aún por el mismo motivo de antes. Sólo es cuestión de seguir este método y* $\sqrt{a}$ *quedará cada vez más encajado entre los* a_i *y los* b_i*.*

$$a_1 < a_2 < a_3 \ldots < \sqrt{a} \cdots < b_3 < b_2 < b_1.$$ (PÉREZ, 2009)

Cabe aclarar que la presentación aquí hecha del método para el cálculo de raíces cuadradas es una interpretación en términos modernos, recuérdese que los sumerios utilizaban una escritura cuneiforme y un sistema de numeración sexagesimal. Esta interpretación nos permite establecer analogías entre este método y el método actual de Newton o Newton–Raphson para resolver la ecuación de tipo $x^2 - a = 0$.

El desarrollo de la Matemática Hindú, puede ser analizado a partir de los aportes realizados dentro de la llamada época védica (1500 a 1000 a. C.) y en la brahmánica (siglo V a.C). En particular, Pingala (300–100 a.C.) en su Libro Chanda-Shastra muestra el primer uso del número cero (GHEVERGHESE, 2008), elemento fundamental en el proceso de comparación de magnitudes y más tarde de cantidades constantes y variables, de esta manera se constituye en un elemento esencial para la actual teoría de las desigualdades.

La Matemática desarrollada en Egipto durante el periodo (1800–500 a. C.), puede ser considerada como una ciencia con un marcado carácter empírico-práctico (BOYER, 1968). Esta etapa es muy incipiente en el desarrollo de las desigualdades matemáticas. Está caracterizada por la comparación de cantidades y magnitudes, la estimación de áreas de figuras a partir de otras ya conocidas (problema 48 del papiro Rhind) el cálculo aproximado de raíces cuadradas y la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones en los que se aplica el método de “regula falsi” o de falsa posición (problemas 24-27 del papiro Rhind), método que se basa en la búsqueda de valores aproximados a partir de un valor supuesto (COLLETTE, 1986). Por otro lado, los cambios económicos, así como el desarrollo de las ciudades y el comercio, van a favorecer la aplicación de métodos matemáticos a la solución de problemas prácticos. Los intercambios comerciales cada vez más complejos exigían técnicas idóneas de cálculo y contabilidad. Existían en esos momentos, tratados donde se exponían reglas para la solución de problemas específicos relacionados principalmente con las tasas de interés, los cambios, la circulación y el peso de las monedas, o la repartición de los beneficios. En los tratados estos métodos solían presentarse en forma de casos concretos, integrándose en un contexto totalmente práctico.

Sin embargo, el desarrollo del Algebra va de la mano con el desarrollo de la escritura y los *Sistemas básicos de Numeración*. Estos facilitan los cálculos y por ello la búsqueda de cantidades desconocidas (STEWART, 2008). Quizá por ello, el álgebra egipcia y babilónica no rebasaron las meras aspiraciones intelectuales, si es que algún sabio pensó en sistematizar las operaciones para simplificar un problema que involucrara incógnitas lo que dificultó el desarrollo del álgebra y por ello, de las desigualdades.

Resulta atinado plantear que no obstante a todo el desarrollo cultural de los mesopotámicos y egipcios no hay nada trascendental en el Álgebra Retórica que no sean nuevas frases y maneras de escribir los enunciados en los problemas que involucran procesos numéricos comparativos asociados actualmente a las desigualdades. Sin embargo, en los últimos 1000 años del periodo del Álgebra Retórica, se establecen las bases de la Matemática con la civilización griega y con ello, el primer periodo epistemológico termina en el siglo III.

3. Sistematización de las desigualdades matemáticas.

En el periodo conocido como Álgebra Retórica el concepto de *desigualdad* no evolucionó más allá de expresar las soluciones de las *desigualdades* como frases o discursos para argumentar algún problema concreto. No obstante, y después de mucho tiempo, en el orden de los 6,000 años, no hubo avances significativos, hasta el siglo III, en el que Diofanto de Alejandría (214–298), dio el primer paso trascendental en el desarrollo del Algebra y comenzó el segundo periodo, el *Algebra Sincopada*, que se extiende hasta los siglos XVI y XVII, en el que los matemáticos franceses Francisco Vieta, (1540–1603) y René Descartes, (1596–1650) dieron el siguiente paso en su desarrollo (Boyer, 1968).

La manipulación y el tratamiento dado por los pitagóricos, cuyo representante más conocido fue Pitágoras de Samos (569–475 a. C.), a las relaciones entre los números, sirvió de base a conceptos más generales tales como: *media aritmética*, *media geométrica* y *media armónica*, las relaciones entre ellas y sus aplicaciones a la música (COLLETTE, 1986). La media geométrica aparece, por ejemplo, al hallar el lado x de un cuadrado cuya área es igual a la de un rectángulo de lados a , b pues sería $x^2 = a \bullet b$ (x es la media geométrica de a y b). Actualmente, sabemos que las medias satisfacen las siguientes desigualdades: Si $a > b$ entonces a > media aritmética (a, b) > media geométrica (a, b) > media armónica (a, b) > b. Es decir $a > \frac{a+b}{2} > \sqrt{a \bullet b} > \frac{2\,ab}{a+b} > b$. (PÉREZ, 2009).

Aunque las desigualdades matemáticas como objeto matemático de estudio son muy recientes, sin embargo, sus conceptos básicos asociados, no eran desconocidos por los filósofos griegos de la antigüedad. Estos ya usaban las desigualdades como herramientas y/o recursos en sus cálculos y demostraciones. Comenzando un proceso lento de sistematización de las mismas, los griegos eran conscientes de desigualdades asociadas al triángulo, la más conocida, sin dudas, es la “desigualdad triangular”; también trabajaron con las desigualdades de la media aritmética–geométrica y con la desigualdad isoperimétrica. En los “Elementos” de Euclides (325–265 a. C) se presentan proposiciones que expresan relaciones de desigualdad entre ángulos, lados, perímetros o áreas. Sin embargo, no se tiene en cuenta el uso de desigualdades en la aritmética o en la manipulación de números (FINK, 2000).

A título de ejemplo, del proceso de sistematización de las desigualdades matemáticas presentaremos algunas proposiciones clásicas tomadas de los Elementos de Euclides, cuya formulación puede interpretarse en términos de desigualdades que, además, constituyen extensiones naturales del conocido Teorema de Pitágoras (VERA, 1970).

Proposición 12 del Libro II**.** En los triángulos obtusángulos, el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso, es mayor que los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo obtuso, en dos veces el rectángulo comprendido por un lado de los del ángulo obtuso, sobre el que cae la perpendicular y la recta exterior cortada por la perpendicular, hasta el ángulo obtuso.

Proposición 13 del Libro II**.** En los triángulos acutángulos, el cuadrado del lado opuesto al ángulo agudo, es menor que los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo agudo, en dos veces el rectángulo comprendido por uno de los lados del ángulo agudo, sobre el que cae la perpendicular y la recta interior cortada por la perpendicular hasta el ángulo agudo.

En el Libro I de los Elementos aparecen las **Proposiciones 18, 19 y 20**, que tratan sobre desigualdades en el triángulo. La **Proposición 26** del Libro I se demuestra utilizando el método de reducción al absurdo. Dentro de la prueba se trabaja con las desigualdades respecto a las amplitudes de ángulos y luego con las longitudes de los lados. En ambos casos se obtienen contradicciones con resultados ya conocidos. La **Proposición 27** del Libro VI es uno de los primeros resultados sobre problemas de optimización (también la 7, 8, 15 y 16 Libro III). Esta proposición será utilizada con posterioridad por Euclides en la demostración del problema de inscribir el rectángulo de mayor área en un triángulo dado.

Una reformulación interesante de la situación planteada en la **Proposición 27** del Libro VI de los Elementos es la siguiente: "De todos los rectángulos con el mismo perímetro, ¿cuál es el de área máxima?" (RUIZ, 2015). En este problema se trata de buscar el rectángulo de mayor área. Esencialmente, estamos en presencia de un problema de optimización (problema isoperimétrico), lo cual muestra que los griegos se interesaban por determinar de todos los elementos de un conjunto con ciertas características invariables aquellos que poseían determinada cualidad (mínimo, máximo, minimal y maximal).

Posible resolución (sobre bases actuales): Consideremos un rectángulo cualquiera de perímetro P y sea x un lado del rectángulo, entonces el otro sería $\frac{P}{2}-x$, de manera que el área de este rectángulo la podremos expresar como $x\left(\frac{P}{2}-x\right)$, que sería la expresión que tendríamos que maximizar, pero $x\left(\frac{P}{2}-x\right) \leq \left[\frac{x+\left(\frac{P}{2}-x\right)}{2}\right]^2 \leq \frac{P^2}{16}$. Es decir, esta expresión está acotada superiormente por $\frac{P^2}{16}$. Pero observamos que si $x=\frac{p}{4}$, se tiene que $\frac{p}{2}-x=\frac{p}{4}$, por lo que el rectángulo se transforma en un cuadrado de área $\frac{p^2}{16}$. En conclusión, el rectángulo de área máxima y perímetro constante P es el cuadrado de lado

$\frac{P}{4}$ (RUIZ, 2015)..

Euclides utilizó los términos "iguales exceden", "iguales faltan" o "iguales están en exceso que" para comparar magnitudes (KLINE, 1972, p. 69). La definición, "El mayor es un múltiplo del menor cuando se mide por el menor" (KATZ, 2009, p. 74) muestra que los matemáticos de la antigüedad eran expertos en la comparación de magnitudes y en expresar la relación entre ellas. Hay que señalar que el objeto matemático "inecuación" no aparece hasta el siglo XIX y cuyo papel es expresar las condiciones que debían cumplir las soluciones de un problema que se resolvía mediante ecuaciones lineales (Bagni, 2005b).

Euclides enuncia el Quinto Postulado de la siguiente manera: Si una recta, al incidir sobre otras dos, forma del mismo lado ángulos internos menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en que estén los ángulos menores que dos rectos. Nótese que nuevamente Euclides recurre a la idea de la desigualdad para establecer su problemático "Quinto Postulado" que, tras innumerables y fallidos intentos de demostración, por los más prominentes matemáticos de las diferentes épocas, dieron origen a las llamadas Geometrías no Euclidianas (Sánchez & Sigarreta, 2011).

Eudoxo, nació en Cnido (actual Turquía), aproximadamente en el 390 a.C. y falleció alrededor del 337 a.C. Fue discípulo de grandes filósofos de la época tales como: Platón (427–347 a. C.) cuyo nombre era Aristocles, el Platón, apodo que significa el de anchas espaldas y Arquitas de Tarento (430–360 a. C.). En el tratamiento de las proporciones, Eudoxo pone de manifiesto una amplia comprensión de las operaciones de cálculo y de los métodos de aproximación-comparación; permitiendo visualizar las cantidades continuas. Eudoxo asignó y/o relacionó los valores numéricos con segmentos, dando el paso básico para la geometrización de la aritmética. Dicho tratamiento sirvió de base a numerosos trabajos científicos hasta la aparición del conocido método cartesiano en el siglo XV (EDWARDS, 1979).

El *método de exhaución*, considerado como una anticipación del Cálculo Integral, se debe a Eudoxo y de manera intuitiva consiste en hallar el área aproximada de una figura dividiéndola en figuras más pequeñas de área conocida. Eudoxo, pretendía dar un sustento matemático, en términos de desigualdades, a la idea de exhaustar una circunferencia de los pitagóricos (Edwards, 1979), es decir, haciendo ver que si k es muy grande entonces la diferencia entre las áreas del polígono P_k (inscrito o circunscrito) y la circunferencia , se puede hacer tan pequeña como se quiera, incluso más pequeña que cualquier número prefijado de antemano, tratando de dar un sentido más formal al concepto de "*Situación Límite*" y "*Proceso Infinito"* (a pesar de lo empantanado de su sistema de numeración y representación).

El método, basado estrictamente en conceptos básicos asociados con desigualdades matemáticas, se puede entender de la siguiente manera (GONZÁLEZ, MORALES, SIGARRETA, 2013, p.5) : Si y A son ciertas cantidades positivas fijadas inicialmente y si restamos de A la cantidad $B = A - \frac{A}{2+h} \geq \frac{1}{2} A$, $h\, 0$, no menor a la mitad de A, entonces, tenemos que $A-B=A-\left(A-\frac{A}{2+h}\right)=\frac{A}{2+h}=x_1$. Y si de nuevo a $A\,B\,x_1$ le restamos una cantidad no menor a su mitad entonces se obtiene $x_1-\left(x_1-\frac{x_1}{2+h}\right)=\frac{x_1}{2+h}=x_2$. Pero sabemos que: $\frac{A}{2+h}=x_1$ y, por ello, tenemos que: $x_2=\frac{A/(2+h)}{2+h}=\frac{A}{(2+h)^2}$. Luego, si a x_2 le restamos nuevamente una cantidad no menor a su mitad tenemos que: $x_3=x_2-\left(x_2-\frac{x_2}{2+h}\right)=\frac{A}{(2+h)^3}$. Y, en general se tiene que: $x_n=\frac{A}{(2+h)^n}$; y de ahí que $\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{A}{(2+h)^n}=A\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2+h)^n}=0$, es decir, x_n es menor que cualquier cantidad 0 prefijada inicialmente.

De esto se deduce que el Principio de Exhaución de Eudoxo es equivalente a afirmar que: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2+h)^n}=0$, que es otra forma de enunciar el Principio de Arquímedes o la Propiedad Arquimediana, que establece fuertes propiedades de las desigualdades. Esto se puede entender diciendo que: Si y son dos números no negativos cualesquiera distintos de cero, tales que entonces existe un número natural n tal que $n>¿$. Lo que se traduce simplemente en: ¡No hay distancia que no pueda ser superada con el múltiplo de otra!

El sistema de numeración del antiguo mundo griego no era muy funcional, complicaba los cálculos y no existían métodos generales para ellos. Un verdadero problema, pues alrededor del siglo VI a. C. la confusión persistía y no era para menos, pues la civilización griega estaba constituida por numerosas ciudades e islas que se enorgullecían de su independencia y por ello, cada una quería imponer sus ideas y costumbres en el cálculo numérico y más al estar asociado con el comercio (STEWART, 2008).

Hubo intentos de mejorar los sistemas de numeración anteriores. Arquímedes de Siracusa (287–212 a. C.) desarrolló uno muy eficiente para representar números muy grandes y Apolonio de Perga (262–190 a. C.) otro, igualmente eficiente, pero no tuvieron trascendencia entre la generalidad de la población griega ni entre la comunidad de sabios y geómetras empeñados en utilizar el sistema griego tradicional. En el libro *El Arenario*, Arquímedes se planteó determinar un número cuyo orden fuese suficiente para numerar todos los granos de arena del mundo (PARRA, 2009); ideó un *Sistema de Numeración* basado en las miríadas.

Arquímedes, al tratar de dar un sentido más amplio al concepto de número determinó las bases para las desigualdades, que aquí jugaron un papel central. En su libro *Sobre la Medida del Círculo*, calculó una sorprendente aproximación a ـا mediante aproximaciones sucesivas y utilizando *desigualdades* involucradas en un extraordinario *Proceso Infinito*.

El procedimiento que siguió puede expresarse en términos actuales, de la siguiente manera (EDWARDS, 1979): Sean p_n y P_n los polígonos inscrito y circunscrito a una circunferencia C de radio r, y designemos por l_n y L_n sus perímetros respectivos.

Arquímedes determinó que las sucesiones $(l_{2^k n})$y $(L_{2^k n})$ se acercan cada vez mejor a la longitud S de la circunferencia, una inferiormente y la otra superiormente y que pueden utilizarse para determinar, en cada duplicación de los lados de los polígonos, una aproximación cada vez más fina del número π. Qué mejor prueba del pensamiento cualitativo que surge como instalación de polígonos inscritos y circunscritos y que dan una perspectiva profunda sobre las *desigualdades*.

Primero, utilizando semejanza de triángulos (Figura 1), Arquímedes encontró que: $L_{2^n} = \frac{2\,L_n\,l_n}{L_n + l_n}$ y $l_{2^n} = \sqrt{L_n\,l_n}$, expresiones que le ayudaron a encontrar aproximaciones a los lados de los polígonos mediante la duplicación de sus números de lados. Sin embargo, ante todo debe ser claro que la longitud S de la circunferencia de radio r y los perímetros $L_n\,y\,l_n$ de los polígonos $P_n\,y\,p_n$ guardan la relación: $0\,l_n\,S\,L_n$ y si se duplica el número de lados en los polígonos entonces se tiene que: $0\,l_n\,l_{2\,n}\,S\,L_{2\,n}<$¿ L_n . Y en general, en la duplicación k-ésima, si $n$es fijada de antemano, se tiene:

$$0\,l_n\,l_{2\,n}\,l_{4\,n}\cdots l_{2^k\,n}\,S\;L_{2^k\,n}<\cdots<L_{2\,n}<L_{4\,n}<L_{2\,n}<L_n$$

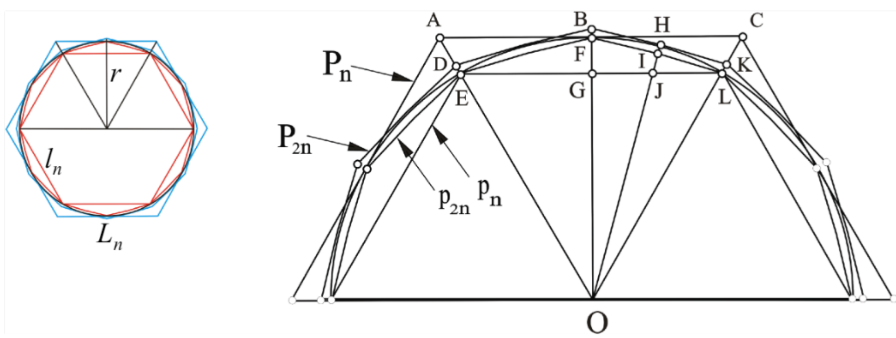

Figura 1. Aproximación del área de una circunferencia por medio de polígonos.

Para el caso en que $n\,6$, es decir el hexágono regular inscrito, su perímetro es $l_6\,6\,r$, y para el hexágono regular circunscrito su perímetro es $L_6\,4\,r\sqrt{3}$. En efecto, $(OG)^2+(GL)^2\,(OL)^2\,r^2$, (Fig. 1), y $12\,GL\,6\,EL\,6\,r$, es decir: $GL\,r/2$, por lo que: $OG=r\,\frac{\sqrt{3}}{2}$. Y ya que los triángulos OGL y OFC son semejantes entonces se tiene que: $\frac{FC}{GL}=\frac{FC}{r/2}=\frac{FO}{OG}=\frac{r}{OG}$, de donde se obtiene que: $FC=r\,\frac{\sqrt{3}}{3}$ y por eso: $12\,FC=6\,AC=L_6=4\,r\sqrt{3}$. Con ello se llega a que:$6\,r<2\,\pi r<4\,r\sqrt{3}\Rightarrow 3<\pi<2\sqrt{3}$. Pero claro, ahora se tiene otra dificultad, ¿cómo calculamos $\sqrt{3}$? Arquímedes conocía el método babilónico para la aproximación de $\sqrt{a}$. En esa forma y haciendo un alarde del cálculo numérico, Arquímedes encontró $\sqrt{3}$ con una extraordinaria precisión, al determinar que $\sqrt{3}$ se encuentra entre $\frac{265}{153}$ y $\frac{1351}{780}$ es decir (en notación actual): $1.73202641 < \sqrt{3} = 1.73200580 < 1.73205120$, con ello se llega a que: $3 < 3.4641$ (GÓNZALEZ, 2016, p. 421).

Luego, Arquímedes duplicó sucesivamente el número de lados de los polígonos a 12 a 24 a 48 y a 96, y con ello obtuvo cada vez mejores aproximaciones por exceso y por defecto de π, las cuales pueden escribirse respectivamente como $3.105 < < 3.215$; $3.132 < < 3.159$;$3.139 < < 3.146$ y finalmente: $3.141298 < < 3.142826$. Trabajando sobre los cálculos para aproximar las raíces cuadradas de los números, Arquímedes estaba de hecho manipulando las desigualdades aritméticamente (FINK, 2000). Mediante estas ideas y valiéndose del *Principio de Exhaución*, Arquímedes pudo probar también, que el área de una circunferencia C puede aproximarse, tanto como se quiera, por una sucesión de áreas de polígonos inscritos y circunscritos.

En “La Eneida”, obra escrita por Virgilio en el siglo I a. C. se cuenta, en el libro IV, la historia de la princesa fenicia Dido, hija de Ahiram el rey de Tiro (VIRGILIO, 1890). Por problemas críticos con el hermano Pigmalión, se vio obligada a abandonar Tiro con sus fieles seguidores y llegaron a las costas del norte de África, donde Dido intentó comprar tierras para establecerse. Después de negociar con el jefe de la región, cerraron el siguiente acuerdo: Dido ocuparía sólo aquel trozo de tierra que pudiera abarcar con la piel de un buey. Dido se aprovechó de la formulación ambigua del trato. Así, cortó la piel en tiras muy finas y las unió, formando una cuerda cerrada de gran longitud. Finalmente, extendió la cuerda sobre el suelo de forma que abarcara, en su interior, la mayor superficie posible. Superficie que permitió la edificación de la Ciudad de Qart Hadast, que significa Ciudad Nueva (Birsa).

Aunque este famoso problema isoperimétrico, ha permanecido latente durante 2000 años en su versión clásica, un buen número de matemáticos han dedicado esfuerzos a su resolución (BOYER, 1968), desde el griego Zenodoro que vivió en torno al 200 a.C. y que desarrolló la llamada Teoría de los Isoperimétricos (mediante el tratamiento de polígonos), hasta entrado el siglo XIX; donde Weierstrass, usando argumentos del cálculo de variaciones plantea una solución completa (ASHBAUGH, BENGURIA, 2010). La extensión de dicho problema es conocida como Desigualdad Isoperimétrica: **La longitud L del contorno de un dominio plano de área A verifica $L \geq 2\sqrt{\pi A}$, dándose la igualdad precisamente cuando el dominio es un círculo.**

Problemas, en esencia similares al problema isoperimétrico, son tratados desde la antigüedad. Basta mirar las Proposiciones 35-38 del Libro I, los Elementos de Euclides (VERA, 1970), donde se plantea y demuestra que los triángulos con la misma base y cuyo vértice opuesto está situado en una recta paralela a la base, tienen igual área, pero un perímetro diferente (Figura 2).

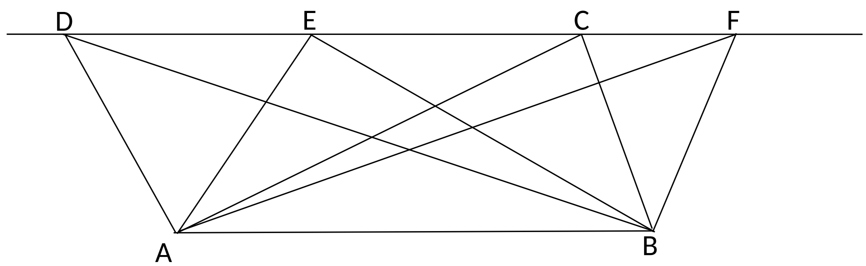

Figura 2. Triángulos con áreas constantes y perímetro diferente.

Zenodoro aborda el problema de forma elegante y demuestra que un círculo tiene mayor área que cualquier polígono que le sea isoperimétrico (PÉREZ et al, 2000). Los resultados fundamentales de su teoría son los siguientes:

Teorema 1. Entre dos polígonos regulares con el mismo perímetro, el que tiene mayor área es el que posee más ángulos.

Teorema 2. Un círculo tiene mayor área que cualquier polígono regular con idéntico Perímetro.

Teorema 3. Entre los polígonos con el mismo número de lados y con el mismo perímetro, el polígono regular es el que posee área mayor.

Aunque no existe registro preciso sobre el año de nacimiento de Claudio Ptolomeo o Tolomeo, este se enmarca entre los años 90 y 100 d. C. Fallece en el año 170 d. C. Vivió y trabajó en Egipto y realizó aportes en diferentes áreas de la ciencia. Por ejemplo, en astronomía fue autor del tratado conocido como *Almagesto* y el modelo de universo geocéntrico (BOYER, 1968). En óptica, exploró las propiedades de la Luz, su obra *Óptica* es un tratado sobre la teoría matemática de las propiedades de la luz. Otra gran obra suya es la *Geographia*, en la que describe el mundo de su época, donde utiliza un sistema de latitud y longitud. Además, es autor de un tratado de teoría musical llamado *Harmónicos*.

En la literatura matemática aparece el siguiente teorema, llamado Desigualdad de Ptolomeo (KAZARINOFF, 1961): Sean A, B, C y D cuatro puntos en el plano y a, b, c y d, las longitudes de los lados AB, BC, CD y DA, respectivamente. Sean también p y q las medidas de las diagonales AC y BD, respectivamente. Entonces se cumple la desigualdad $pq \leq ac+bd$. La igualdad se alcanza cuando los cuatro puntos son cíclicos o todos son colineales. Nótese que el conocido Teorema de Ptolomeo que establece que, en todo cuadrilátero convexo inscribible en una circunferencia, la suma de los productos de los pares de lados opuestos es igual al producto de sus diagonales, es el caso óptimo de la desigualdad anterior (BOYER 1968).

En la misma dirección, en el libro III de la Colección Matemática de Pappus (EVES, 1997), quien vivió entre los siglos III-IV, se muestra el siguiente problema (ver Figura 3):

> "*Tome B en el segmento AC, con B distinto del punto medio O de AC. Trace una perpendicular a AC por B, cortando la semicircunferencia en D y sea F el pie de la perpendicular sacada de B sobre OD. Demuestre que OD, BD y FD representan respectivamente, las medias aritmética, geométrica y armónica de los segmentos AB y BC y muestre que, si $AB \neq BC$, entonces la media aritmética es mayor que la media geométrica y esta es mayor que la media armónica*". (EVES, 1997, p. 226),

Esto refuerza el conocimiento de los matemáticos griegos sobre desigualdades.

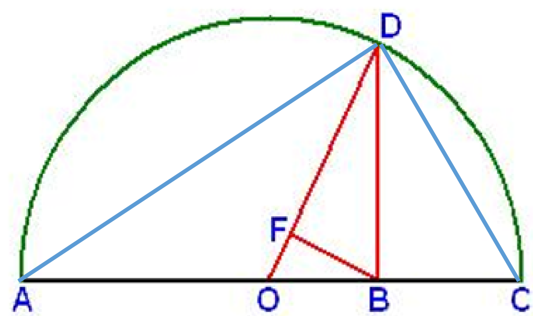

Figura 3. Relación entre las medias aritmética, geométrica y armónica.

Observese que en el caso extremo en que O y B coincidan, es decir, $AB = BC$ se tiene que las medias aritmética, geométrica y armónica coinciden. En la actualidad la generalización de las relaciones entre las medias armónica, geométrica y aritmética, se expresa de la siguiente manera:

$$\frac{1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \bullet a_2 \bullet \cdots \bullet a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}, \forall\, a_i \in R_+,\, i=1,2,\cdots,n.$$

Demostremos, geométricamente, la desigualdad entre la media aritmética, la media geométrica y la media armónica de dos números no negativos (ver Figura 3).

$$\frac{2}{\frac{1}{AB}+\frac{1}{BC}} \leq \sqrt{AB \bullet BC} \leq \frac{AB+BC}{2}.$$

En la semicircunferencia de diámetro ACy centro O, tomamos B en AC y tracemos la perpendicular a AC por B y esta determina con el arco AC el punto D.

Tracemos OD y BD, nótese que el triángulo OBD es rectángulo en B. F, es el pie de la perpendicular trazada a OD desde B. Ahora tenemos que $OD=\frac{AB+BC}{2}$, por ser ODradio. Por otro lado el triángulo ADC es rectángulo en D y BD es altura relativa a la hipotenusa AC por lo que se tiene $BD=\sqrt{AB\bullet BC}$. Observe que OD es hipotenusa en el triángulo ODB y BD cateto por lo que $OD>BD$.

Analicemos los casos especiales.

1. Si B coincide con O, entonces $BD=OD=FD$.
2. Si B coincide con A o con C entonces $AB=0$ o $BC=0$, respectivamente y se tiene que $OD>0$.

Con lo que concluimos que $\frac{AB+BC}{2}\geq\sqrt{AB\bullet BC}$.

Como los triángulos OBD y BFD son semejantes se cumple $\frac{FD}{DB}=\frac{DB}{OD}$, por lo que $FD=\frac{AB\bullet BC}{\frac{AB+BC}{2}}=\frac{2}{\frac{1}{AB}+\frac{1}{BC}}$. Ahora bien, en el triángulo rectángulo BFD, FD es cateto y BD es hipotenusa por lo que $FD<BD$ y tendríamos $\frac{2}{\frac{1}{AB}+\frac{1}{BC}}\leq\sqrt{AB\bullet BC}$.

Diofanto de Alejandría es considerado el iniciador del Álgebra como tal (BOYER, 1968). Su libro *Arithmetica*, escrito alrededor del año 250 a. C., constaba de 13 libros de los cuales hoy sólo se conocen 6. En él se exponen las ideas fundamentales de las ecuaciones, aunque no con coeficientes generales, sino enteros y cuyas soluciones también se buscaban en este conjunto (ecuaciones diofánticas o diofantinas). Mientras se desarrollaba la Teoría de las Ecuaciones, las desigualdades tenían un lugar utilitario. Diofanto conocía las técnicas de resolución de ecuaciones de segundo grado y las aplicaba a modelos de inecuaciones (EECKE, 1959, citado en KOUKI, 2008)). Por ejemplo, cuando quiere resolver la inecuación (expresada en lenguaje actual) $2x^2>6x+18$, comienza por la resolución de la ecuación $2x^2=6x+18$ y luego se interesa en determinar soluciones racionales apoyándose sobe aproximaciones en números enteros de $\sqrt{45}$. Diofanto encuentra que $6<\sqrt{45}<7$. Toma entonces el entero 7, como el límite superior, que satisface a las condiciones del problema y enseguida explota técnicas de resolución griegas que lo conducen a probar que existen al menos tres números que deben satisfacer el problema. La resolución de las inecuaciones no se limita al libro VI de Diofanto, sino que continúa presente en el libro VII.

Durante el periodo de desarrollo del *Álgebra Sincópada* se comenzaron a utilizar abreviaturas para las operaciones algebraicas, iconos que abrevian los cálculos y uno que otro símbolo para una variable aquí y otra allá. Los símbolos y las variables elementales comienzan a trabajar por sí solos, es decir, hacen ver, al que desarrolla el Álgebra, las estructuras que comienzan a surgir en distintas partes de la disciplina algebraica y por ello, las *desigualdades* se empiezan a hacer notorias como una herramienta básica para la actividad matemática (STEWART, 2008).

En la India, entre los siglos V-VII, las matemáticas alcanzan un gran esplendor y su desarrollo estuvo íntimamente ligado con matemáticos de relieve como Aryabhata, Brahmagupta y Bháskara. Los principales aportes de estos notables científicos se pueden exponer en la resolución completa de la ecuación de segundo grado y la resolución de las ecuaciones indeterminadas (ecuaciones para las cuales hay un conjunto infinito de soluciones), elemento básico para el tratamiento de las desigualdades. Además, los conocimientos de esta etapa fueron recogidos por Bháskara en el siglo VII en su obra capital titulada *Siddhanta Siromani* (BOYER, 1968).

La aparición inesperada y la rápida propagación de las doctrinas religiosas de Mahoma en el año 637 (el islam), dio como resultado la rotura de las barreras intelectuales y del lenguaje que tenían a las culturas confinadas a su propio territorio. En tal sentido, los islámicos, dieron una gran importancia a la ciencia griega, tan es así que toda la administración económica del Califa Ommíadas en Damasco, se efectuaba en griego y por oficiales griegos. La influencia matemática griega sobre los árabes fue enorme y, sin embargo, los pueblos musulmanes del siglo VIII casi no agregaron nada a la Geometría, pero continuaron el trabajo astronómico y algebraico, introdujeron la numeración Indo-Arábiga y perfeccionaron la Trigonometría (EDWARDS, 1979).

Así las ideas proliferaron y dieron lugar a dos importantes resultados en el siglo VII, el papel y los libros. El centro traductor fundado por Al-Mamun pronto se convirtió en una escuela, (Bayt al-Hikma o casa del saber) donde se estudiaba a los grandes autores de la matemática griega, que según Al-Mamun, eran fundamentales para la educación y sabiduría musulmana. En esta institución de traductores y estudiosos se concentraron astrónomos y matemáticos como el algebrista Abu Jafar Muhammad Ibn Musa Al-Khowarizmi (780–850) quien en el año 825 escribió un libro Al-jabr wa’l muqabalah (BOYER, 1968).

El Álgebra de Al-Khowarizmi parece no superar los trabajos de Diofanto; sin embargo, su método de transponer, restaurar y reducir se extendió rápidamente haciendo honor al nombre de su libro que significa esencialmente “restauración y reducción”. Así pues, este libro trasciende ya que Al-Khowarizmi rompió con la tradición en el empleo de la numeración griega utilizada por Arquímedes o Apolonio, e impuso una nueva manera de ver la aritmética al introducir el sistema decimal (EDWARDS, 1979).

Para el siglo XI el matemático y poeta persa Ghiyath al-Din Abu´l Fath Umar Ibn Ibrahim al-Nisaburi a-Khayyami, más comúnmente conocido en la historia de las matemáticas por Omar Khayyam, contribuyó a la rápida propagación e introducción de los números Indo-Arábigos, haciendo el Álgebra más general (SOLAECHE, 2002). En su libro *Álgebra*, estudió la solución de ecuaciones de segundo y tercer grado, pero no logró separarlas totalmente de la Geometría, ya que utilizó para su solución los puntos de intersección de dos secciones cónicas; método ya utilizado por Apolonio. Aun así, empezó a independizar el Álgebra, resolvió los problemas siguiendo la perspectiva geométrica y a la par, Khayyam, manejaba los términos algebraicos como separados e independientes, el Álgebra comenzó a hacerse sin ayuda de la Geometría (KASIR, 1931). Khayyam, nació el 18 de mayo del año 1048 en Nishapur, donde también murió en 1131. En particular, los resultados fundamentales sobre comparación y desigualdad aparecen en su tesis titulada *demostraciones de álgebra y comparación*, escrita en árabe (traducida por Woepecke en 1851).

Otro matemático importante de la época representante de la escuela de Bagdad, fue Al Batani (858–929), quien elaboró métodos prácticos e indicaciones para la resolución de problemas (ABDULLATIF, 2011); muchos de estos resultados aparecen en el tratado de Álgebra de Omar Khayyam en el siglo XII. Ante esta nueva perspectiva, los matemáticos árabes del siglo X al XI comenzaron, paulatinamente a vislumbrar la posibilidad de separar el Álgebra de la Geometría y delimitar sus técnicas. Algunos comenzaron a trabajar más en lo algebraico que en lo geométrico como Al-Karaji (953–1029) quien instituyó una escuela de Álgebra que trascendió los círculos socio–políticos de Bagdad (ARGUEDAS, 2010); utilizó potencias de grado superior al tercero y cuarto y desarrolló reglas, sin tener en cuenta su significado geométrico, para su manejo, utilizando por primera vez, un desarrollo del binomio bajo la perspectiva de los coeficientes del triángulo de Pascal. Dando inicio al periodo de transición del Álgebra, de lo retórico a lo simbólico, necesario para el entendimiento y comprensión de las *desigualdades* que comenzaron a aparecer como una parte integral del Álgebra y más adelante, del Análisis.

Leonardo Pisano Bigollo (1175–1240), más conocido como Fibonacci estudió con los matemáticos árabes más destacados de ese tiempo. A los 32 años de edad, publicó lo que se conoce como *Liber abaci* («abaci» dando peso fundamental a los elementos teóricos de la aritmética y quitándole fuerza el ábaco). Dicho trabajo, fue un elemento importante dentro del proceso de sistematización de la comparación, medición y aproximación matemática (STEWART, 2008).

Entre los siglos XI y XII, muchas obras griegas, árabes e hindús fueron traducidas a los idiomas más conocidos en Europa (latín, español, hebreo). Traductores como Adelardo de Bath (1075–1160) y Gerardo de Cremona (1114–1187), tradujeron no menos de 90 obras entre las que se encontraban *Los Elementos* de Euclides, el *álgebra* de Al-Khowarizmi y el *Almagesto* de Ptolomeo. En 1448 Johann Gutenberg (1400–1468), desarrolló la primera imprenta de tipos móviles, con la que los libros se hicieron más baratos y accesibles dando así la posibilidad de su distribución a gran escala.

En Europa, a mediados del siglo XVI el Álgebra Simbólica se hizo más extensa y se perfeccionaron las técnicas para resolver ecuaciones. En 1557 el inglés, profesor de matemáticas en Cambridge, Robert Recorde, (1510–1558), introdujo los signos de mas, +, y menos, [illegible] , así como el de igual, =.

Otro importante matemático representativo del Álgebra Simbólica es Tomas Harriot (1560–1621). Se sabe que Thomas Harriot estudió en la Universidad de Oxford en 1577 y que trabajó como ingeniero de barcos. Veía a las matemáticas como algo práctico en el sentido de elaborar métodos, técnicas y simbolismos que la hicieran más fácil de entender y trabajar. Después de la muerte de Harriot, poco más de 10 años, se publicó uno de sus libros *Artis Analyticae Praxis ad Aequationes Algebraicas Resolvendas*. En él, Harriot introdujo, por primera vez, los símbolos para representar desigualdades, tanto el >, como el <; quizás fueron refinamientos de las ideas y símbolos establecidos por el matemático francés Vieta (CAJORI, 1928). También se le atribuye la invención del punto para la multiplicación de cantidades algebraicas, ampliamente utilizado por Gottfried Wilhelm Leibniz, (1646–1716) en el desarrollo del Cálculo.

Otros matemáticos asociados al desarrollo de las desigualdades son los matemáticos británicos, Oughtred y Barrow (BOYER, 1968). En 1647, Oughtred usó el símbolo a la izquierda para representar "menor que" (Figura 4) y el símbolo de la derecha para "mayor que" (CAJORI, 1928, p. 192) (Figura. 4).

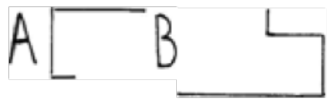

Figura 4: Símbolos de desigualdad (Oughtred)

Luego, en 1674, Isaac Barrow usó la notación de la figura 5 en su *Lectiones Opticae & Geometricae* que significa "A major est quam B" (símbolos tomados de la edición de Weaver y Smith, p. 25).

Figura 5. Símbolo de desigualdad (Barrow)

Casi cien años después de la muerte de Harriot, en 1734, el matemático francés Pierre Bouguer, puso una línea debajo de los signos de desigualdades estrictas para formar los símbolos que representan menor o igual que ≤ o mayor o igual que ≥. La notación de Bouguer, al igual que las variaciones de los signos de desigualdad británicos, todavía está en uso hoy en día (HALMAGHI & LILJEDAHL, 2015). En este siglo, las desigualdades matemáticas juegan un papel de suma importancia en la resolución de problemas tanto puramente matemáticos como aplicados. Además, la introducción del concepto de magnitud variable y los conceptos de límite y función, básicos para el Cálculo Infinitesimal, pone a la Ciencia Matemática y en particular, a la Teoría de las Desigualdades Matemáticas en una situación de privilegio para estudiar los procesos y/o fenómenos de la naturaleza, la sociedad y el pensamiento.

Antes de los trabajos de Newton y Leibniz en el Cálculo Infinitesimal, se desarrollaron métodos heurísticos y empíricos, que generaron prolíficos resultados, en lo fundamental, en el cálculo y la aproximación (EDWARDS, 1979). Por ejemplo, Bonaventura Cavalieri (1598–1647) establece una técnica conocida como la de los "indivisibles" que a *grosso modo*, consiste en lo siguiente:

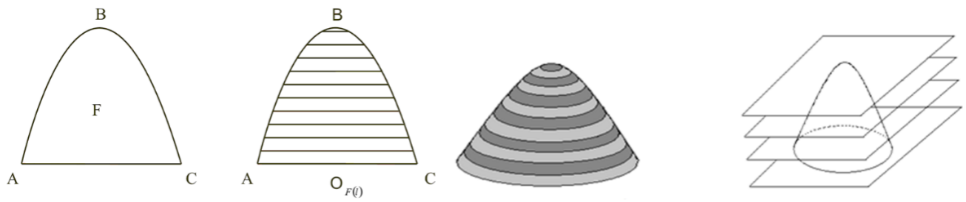

Figura 6. Indivisibles de Cavalieri.

Un indivisible es un objeto geométrico de una dimensión inmediatamente inferior a la del objeto geométrico estudiado. Por ejemplo, los indivisibles de una línea, son puntos; los indivisibles de una región, son líneas; los indivisibles de un volumen (3D) son planos (2D) y así sucesivamente (Figura 6). En otras palabras, una región puede ser obtenida por "suma de líneas" de una manera conveniente. Cavalieri llamó "ominus" a este tipo de suma. "Ominus linae" significa "suma de todas las líneas" (EDWARDS, 1979). El símbolo que usó fue Omn. Cavalieri, mediante la geometría de Descartes, calculó:

$$Omn\left(x^n\right) = \frac{a^{n+1}}{n+1}\,.$$

Así, se puede constatar cómo, usando métodos básicos de aproximación, Cavalieri (intuyendo la noción de límite) encontró una generalización para lo que posteriormente fue la integral de una potencia:

$$\int_0^a x^n = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

En esta época comienzan a aparecer resultados matemáticos respecto a desigualdades nombradas, poniéndolos en un lugar importante dentro de la teoría matemática a la altura de las igualdades nombradas (léase por ejemplo Teorema de Pitágoras o Teorema de Ptolomeo). A título de ejemplo cabe mencionar, la desigualdad de Newton (BLUM-SMITH, COSKEY, 2017): Supongamos que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales y $\sigma_k$denota la k -ésima función simétrica elemental en $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Entonces el **medio simétrico elemental**, dado por $S_k = \frac{\sigma_k}{\binom{n}{k}}$ satisface la desigualdad $S_{k-1}S_{k+1} \leq S^2_k$. Si todos los números a_i son distintos de cero, entonces la igualdad se cumple si y solo si todos los números a_i son iguales. S_1 es la media aritmética, y S_n es la enésima potencia de la media geométrica.

También se pone de relieve el papel determinante de la representación semiótica en relación con el desarrollo del álgebra, en lo fundamental, el empleo de los símbolos y signos que permitieron expresar las ideas de manera más sintética, precisa y con mayor claridad que en la etapa de origen. Se aprecia, además, una utilización más amplia de las desigualdades, es decir, estas han ido penetrando en todas las ramas de la matemática. Por otro lado, aparece una buena cantidad de documentos que revelan que las desigualdades se van convirtiendo en herramientas para resolver una amplia gama de problemas tanto prácticos como de la propia ciencia matemática, lo que permite afirmar que estamos en presencia de una etapa de consolidación en el proceso evolutivo de las desigualdades matemáticas.

En la Época Moderna, con el desarrollo del capitalismo, impera el espíritu utilitario y desde ese punto de vista fue puesta en práctica toda la enseñanza. Este proceso se inicia con el humanismo renacentista, incluyéndose en esta denominación aquellos que se apasionaron por las letras y las artes clásicas.

4. Formalización de las desigualdades matemáticas.

Con la aparición de las universidades en Europa comenzó una revolución intelectual en el viejo continente. El aprecio al sabio aumentaba, dígase matemático, astrónomo, médico e incluso arquitecto, que ahora sí podía recibir un pago por sus conocimientos y por educar, no a uno o dos alumnos privilegiados, sino a un grupo de interesados en el tema. Incluso podía pensarse en la profesión de profesor, dedicado a la enseñanza de la Matemática, Medicina o teología. Así comenzaba el periodo conocido como el “Renacimiento Europeo”.

La formalización de las Desigualdades Matemáticas comienza, en lo fundamental, en el siglo XVIII, esencialmente, con los trabajos del llamado “Principe de las Matemáticas” Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855); pasando por las investigaciones y aplicaciones de las desigualdades al Análisis Matemático desarrolladas por Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) y Pafnuti Lvóvich Chebyshov (1821–1894).

Según Dieudonné (1996), las características de los libros de Análisis del siglo XVIII, son muy diferentes a las de los libros de nuestra época: en aquellos se trataba casi siempre de *igualdades*, mientras que, después de Weierstrass, el Análisis consiste, ante todo, en demostrar *desigualdades*, mayoraciones y minoraciones. Como excepción casi única, es la evaluación, por Lagrange del resto de la fórmula de Taylor $\frac{m}{n!}(x-a)^n \leq R_n \leq \frac{M}{n!}(x-a)^n$, donde m y M son las cotas de la n-ésima derivada en el intervalo $[a, x]$. El aporte más significativo de J. L. Lagrange (1736–1813) al tratamiento de las Desigualdades Matemáticas, aparece en las memorias que escribió en Berlín en 1767, sobre la resolución de las ecuaciones numéricas, donde los métodos de aproximación y las desigualdades juegan un papel preponderante (LAGRANGE, 1769). La base de dicha teoría está relacionada con el famoso problema de los tres cuerpos, en este caso la Tierra, el Sol y la Luna, que recíprocamente se atraen entre sí siguiendo la ley de la razón inversa al cuadrado de la distancia entre sus centros de gravedad. Por su solución, Lagrange obtuvo el Gran Premio de la Academia Francesa de Ciencias, en 1764. Cabe mencionar que el mismo I. Newton intentó estudiar la perturbación que ocasionaba la Luna a la Tierra en su movimiento alrededor del Sol. Planteó una solución considerando las fuerzas de atracción entre el Sol, la Tierra y la Luna.

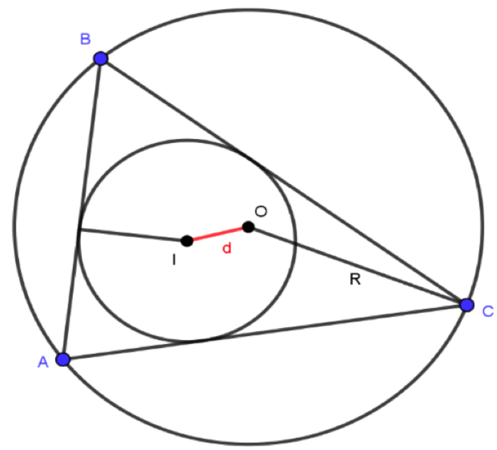

Figura 7. Teorema de Euler

L. Euler (1707–1783), el más prolífero de los matemáticos de todas las épocas, aportó resultados en casi todas las áreas de la Matemática. Razón por la cual, no es de sorprender que trabajara en las Desigualdades Matemáticas. En particular, aporta la útil relación geométrica que lleva el nombre de Teorema de Euler (EULER, 1767), misma que establece que la distancia d entre el circuncentro y el incentro de un triángulo, cumple la relación: $d^2 = R(R-2r)$, donde R y r representan el radio de la circunferencia circunscrita y el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo, respectivamente o de forma equivalente $\frac{1}{R-d} + \frac{1}{R+d} = \frac{1}{r}$. Como consecuencia de este bello resultado se obtiene la denominada Desigualdad de Euler: $R \geq 2r$(Figura 7). La igualdad se alcanza cuando el triángulo es equilátero (DEBNATH, LOKENATH, 2010).

Sería injusto no mencionar dentro de los formalizadores de las desigualdades matemáticas a Viktor Yakovlevich Bunyakovsky (1804–1889). Este notable matemático ruso recibió toda la influencia matemática posible, del director de sus tres tesis doctorales, Augustin-Louis Cauchy. Bunyakovsky llegó a ser vicepresidente de uno de los centros científicos, más importantes del mundo, en su época, la Academia de Ciencia de St. Petersburgo. Este científico tiene el crédito de haber probado en 1859, muchos años antes que Hermann Schwarz, la conocida Desigualdad de Cauchy-Schwarz para el caso de infinitas dimensiones. Cabe destacar que en muchos textos la famosa desigualdad es conocida como: Cauchy-Bunyakovsky (STEEL, 2004). Esta etapa de formalización de las Desigualdades Matemáticas sirve de base para los actuales y poderosos métodos de aproximación.

El siglo XVIII está marcado, además de un nuevo símbolo de desigualdades, por la emergencia de desigualdades nombradas. Un nuevo significado se adjunta al nombre de una desigualdad: los nombres no son una descripción de lo que abarcan las desigualdades, como la "desigualdad de las medias, aritmética y geométrica". Por el contrario, a las desigualdades se les asignan los nombres de los matemáticos que las descubren o demuestran por primera vez (por ejemplo, 'Desigualdad de Cauchy-Schwarz'). El nombre de Newton está unido a una desigualdad. El nombre de Cauchy también está asociado a una desigualdad, así como a diferentes demostraciones de otras desigualdades famosas, debido a su amplio uso de las desigualdades en su trabajo en límites y series

El conocido matemático de origen húngaro Farkas Bolyai (1802–1860) complementó, en 1833, el método de descomposición de Euclides y demostró que un polígono se puede descomponer en un número finito de triángulos y a su vez recomponerse para formar un cuadrado de área igual a la del polígono dado (Boltianski, 1981). Como hemos analizado, este método es muy antiguo, utilizado por Eudoxo (siglo IV a.C.), cuatro siglos después Arquímedes lo aplica para obtener el área del círculo y de la superficie esférica. Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866), en 1854 utiliza el método para introducir su conocida integral mediante aproximaciones con rectángulos y después, vuelve el método a figurar en la obra de Giuseppe Peano (1887) y de Camille Jordan (1893), para la formalización de la medida conocida como Peano-Jordan, misma que puede ser analizada, desde el punto de vista conceptual, como generalización de la integral de Riemann (Sánchez & Sigarreta 2011)

Jean Dieudonné, en el prefacio del Libro *Cálculo Infinitesimal* aseveraba (citado por Bagni (2005a)): "En otras palabras, el cálculo infinitesimal, tal como se presenta en este libro, es el aprendizaje en el manejo de las desigualdades mucho más que las igualdades y podría resumirse en tres palabras: mayorar, minorar, aproximar".

Esto enfatiza aún más el papel preponderante de las desigualdades para el Cálculo infinitesimal y para la Matemática que se edifica sobre este, ya que ellas se encuentran en los cimientos de los conceptos sobre los cuales se sustenta dicha teoría. Y las tres palabras en las que Dieudonné resume este, son los procesos matemáticos de comparar, estimar y aproximar, todos ellos básicos para el tratamiento de las Desigualdades Matemáticas. Bagni (2005a) afirma que una contribución de von Neumann fue la solución en 1937 de un problema propuesto por L. Walras en 1874: la existencia de situaciones de equilibrio en modelos matemáticos de desarrollo de mercado, basado en la demanda y la oferta (a través de costos). Primero vio que un modelo se expresaba a través de desigualdades (como se hace hoy) y no como ecuaciones (como hasta entonces). Este hecho evidencia el poder y alcance de las desigualdades no sólo para la solución de problemas tomando como base y ajustando su aparato conceptual, sino también procedimental

Como hemos analizado, el Axioma de Arquímedes es una propiedad utilizada desde la Antigüedad. Se aplica a magnitudes que guardan una proporción entre ellas. Del Libro V de los Elementos de Euclides: Las magnitudes se dice que guardan una razón entre ellas si, multiplicadas, estas magnitudes pueden excederse mutuamente. Arquímedes atribuye el conocido axioma a Eudoxo, quien es presumiblemente el autor de los Libros V y XII de los Elementos. El matemático alemán David Hilbert (1862–1943), expone, en sus Fundamentos de la Geometría (1899), una formulación moderna del axioma de Arquímedes, que es el primer axioma de continuidad (GIOVANNINI, 2015): Sean dos segmentos AB y CD tales que C es diferente de D. Entonces existe un entero n, y n puntos $A_1,\dots, A_n$ de la recta que contiene al segmento AB, tales que A_j se sitúa entre A_{j-1} y A_{j+1} si $2 \leq j < n-1$, $A_j A_{j+1}$ es congruente a CD si $1 \leq j < n-1$, A se confunde con A_1 y B se sitúa entre A y A_n.

Una propiedad importante fue planteada por Hilbert, en relación a los polígonos regulares (GIOVANNINI, 2017). Todo polígono regular P_k puede ser dividido o cortado en un número finito de polígonos menores mediante los cuales se puede armar un cuadrado. Hay que especificar cómo se deben utilizar las partes que se obtienen del polígono P_k.

1.- Sean los n polígonos, P_k^i, $i=1,2,\dots,n$, de área más pequeña que la de P_k tales que:

$$\sum_{1}^{n} A\,P_k^j = A\,P_k.$$

2.- $P_k^i \bigcap P_k^j = \phi$, $i \neq j$, $i, j \{1,2,\dots,n\}$. Es decir, la intersección de cualquier pareja de conjuntos es vacía, es decir, son ajenos y, por ello, no se traslapan.

3.- $\bigcup_{i=1}^{n} P_k^i = P_k$. Es decir, la unión de todas las partes debe ser igual al polígono P_k.

Nótese que los tres puntos enumerados anteriormente contienen el Principio de Equidescomponibilidad: Si de un figura geométrica rectilínea, F_1, se obtiene otra F_2, mediante un rearreglo o reacomodo de las partes de F_1, sin que se traslapen, entonces, se dice que las figuras F_1 y F_2 son Equidescomponibles. Bajo esta perspectiva la Propiedad de Hilbert afirma que: Todo polígono regular, P_k, es equidescomponible con un cuadrado P_4. Un buen ejemplo de la equidescomponibilidad de los polígonos regulares es la cuadratura del Dodecágono, $(k=12)$, que satisface la Propiedad de Hilbert (Figura 8) dada por Lindgren en 1964 (HANS, MUÑOZ., FERNÁNDEZ, 2011). Así, el rearreglo de las piezas en la equidescomponibilidad de los polígonos nos conducen a los conceptos de igualdad y *desigualdad*.

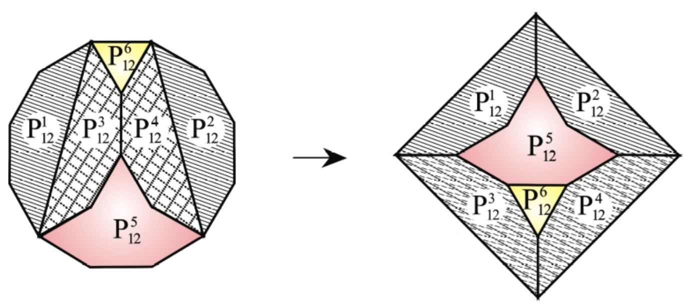

Figura 8. Equidescomponibilidad del Dodecágono.

La famosa desigualdad de Hardy en su forma discreta y continua involucró a un grupo importante de destacados matemáticos de la época (1906–1928) tales como Edmund Hermann Landau (matemático alemán que vivió entre los años 1887–1938), George Pólya (matemático húngaro que vivió entre los años 1887–1985), Issai Schur (matemático alemán que vivió entre los años 1875–1941) y Marcel Riesz (matemático húngaro que vivió entre los años 1886–1969), entre otros. Es digno destacar el papel de coordinador que desempeñó Godfrey Harold Hardy (matemático inglés 1887–1947) en torno a la problemática de las desigualdades que llevan su nombre. Hardy, según lo recoge la historia (ver por ejemplo, Landau (1921, 1924), Riesz (1919–1920), Schur(1918–1919) sostuvo un intercambio de correspondencia fluido, en lo fundamental, con los matemáticos antes mencionados y que se interesaron en el tema y le proporcionaron información muy valiosa. Esta historia es detalladamente descrita por Kufner, Maligranda y Persson (2006) la cual sintetizamos en las siguientes líneas.

La desigualdad discreta de Hardy plantea que es, s$i\ p>1\ y\ (a_n)_1^{\infty}$, es una sucesión de números reales no negativos, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^p\leq\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p. \tag{1}$$

La desigualdad continua de Hardy plantea que si f es una función no negativa, $p-$ integrable en $(0,+\infty)$ entonces$f$ es integrable sobre el intervalo $(0,x)$ para cada x positivo y

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^{x}f(t)\,dt\right)^p\leq\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_0^{x}f(x)^p\,dx. \tag{2}$$

Estas serían el comienzo de una empresa tal que culminaría con el nacimiento de una teoría, la teoría de las desigualdades.

A principios del siglo XX David Hilbert (1862-1943) descubre la desigualdad que lleva su nombre (véase su artículo de 1906), esta es esencialmente la fuerza motivadora para Hardy cuando comienza la investigación relacionada con las desigualdades (1) y (2), dicha desigualdad guarda relación con la desigualdad (1). Básicamente la desigualdad de Hilbert afirma que: si $\sum_{m=1}^{\infty}a_m^{\ 2}<\infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^{\ 2}<\infty$, donde $a_m\geq 0$ y $b_n\geq 0$ entonces la serie doble

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n},$$

converge (la forma débil). Más precisamente, se cumple la desigualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n}\leq\pi\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_m^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2\right)^{\frac{1}{2}}(3).$$

La determinación de la constante π, al igual que la integral análoga de (3), se deben a Schur (1911) (la versión presentada por Hilbert de (3) en lugar de π toma 2π. Hilbert no pudo considerar para su estudio los espacios l_p ya que los mismos aparecen en 1910. Riesz y Hardy dieron los primeros pasos hacia una prueba de la generalización de (3). Cabe señalar que Hardy también afirmó y probó las versiones continuas de sus propios resultados. De cualquier manera, en el documento de 1925 formuló su resultado de forma general y también explicitó la conexión con las formulaciones anteriores.

La carta de Landau a Hardy fechada el 21 de junio de 1921 (Landau, 1921), que fue publicada oficialmente en (Landau, Shur, & Hardy, 1926) cinco años después de la carta de Landau a Schur. El contenido de la carta de Schur (1919) es de interés porque se da una prueba de (1) con la constante $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$, hecho que no se había publicado hasta ese momento. En esta misma carta Landau hace mención a que la desigualdad discreta de Hardy (1) se cumple si y solo si $a_n = 0$ para todo n. El principal resultado de esta carta asevera: Sea $p > 1$, $a_n \geq 0$, y $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Entonces la desigualdad

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{A_n}{n}\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{N} a_n^p .$$

Se satisface para todo N en No $N = \infty$. Además, la constante es óptima para $N = \infty$. A esta desigualdad se le llama desigualdad de Hardy – Landau (MAKAROV, 1992).

Hardy podría ser considerado “el Padre de la Teoría de las Desigualdades” su trabajo ha sido muy significativo, en lo fundamental, para la formalización de la desigualdades matemáticas y va más allá del estudio de desigualdades particulares. Hardy fue el fundador de la revista Journal of the London Mathematical Society, una publicación adecuada para muchos artículos sobre desigualdades. Además, junto con Littlewood y Polya, Hardy fue el editor del volumen *Inequalities* (HARDY, LITTLEWOOD, POLYA, 1934) y del libro, que constituyó la primera monografía, sobre desigualdades, inmediatamente utilizada como base para el posterior desarrollo de las desigualdades matemáticas.

Los trabajos sobre dicho libro comenzaron en 1929 y se publicó en 1934. Los autores confesaron que los relatos históricos y bibliográficos son difíciles "en un tema como este, que tiene aplicaciones en todas las partes de las matemáticas, pero nunca se ha desarrollado sistemáticamente". Guardando las proporciones, esta obra maestra logró, al igual que *Los Elementos* en Geometría, estructurar, sistematizar y formalizar un conjunto de resultados “aparentemente” aislados para convertirlos en teoría.

Los métodos matemáticos con restricciones de desigualdad, tienen una historia mucho más reciente: aparecen o se empiezan a dar a conocer en la primera mitad del siglo XX. Periodo donde la optimización juega un papel preponderante, en lo fundamental, debido al avance del Capitalismo y/o a grandes planes estatales en la extinta Unión

Soviética. Dicho momento histórico-concreto requirió de resolver importantes problemas de distribución y racionalización de recursos, sustentados en grandes bases de datos e información no precisa, lo que exigió aparejado a los métodos matemáticos contar con el apoyo de las máquinas de cálculo.

La formulación matemática de los problemas planteados, en principio, fueron atacados mediante la programación lineal, con restricciones expresadas mediante desigualdades lineales. No obstante, de manera inmediata se trabajó, en las condiciones necesarias que deben satisfacer los problemas de optimización no lineal con restricciones de desigualdad y fueron publicadas por primera vez (1939) en la tesis de William Karush (1917–1997) (en aquel entonces estudiante de matemáticas de la Universidad de Chicago), aunque fueron renombradas tras un trabajo de Harold W. Kuhn y Albert W. Tucker en 1951. Las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) son una generalización del método de los multiplicadores de Lagrange para restricciones con desigualdad (Cottle, 2012).

5. Conclusión

En concordancia con la concepción Dialéctica asumida al principio, el análisis de los métodos de resolución de problemas en las diferentes civilizaciones desde la antigüedad hasta nuestros días realizado en este estudio epistemológico, nos permite tener una idea más clara y más precisa sobre la formación de los conceptos relativos a las desigualdades matemáticas, que esperamos sean de utilidad para la Matemática Educativa. Las relaciones y propiedades de las desigualdades numéricas y algebraicas, que hemos dado en llamar *desigualdades matemáticas*, como hemos visto, han pasado por un largo proceso de desarrollo. Muchos de sus conceptos asociados son muy antiguos y están presentes, en esencia, desde el momento mismo en que los humanos pudieron establecer una determinada comparación, con el fin de determinar cuáles conjuntos tenían más o menos elementos, hace aproximadamente 8.500 años a.C., al inicio del Neolítico (analizado, como se explicó, en relación con la actividad agrícola y del pastoreo). De la misma forma, como elemento natural de comparación, aparece la igualdad entre conjuntos de elementos.

En la antigüedad, las desigualdades están presentes en los procesos básicos de medición de cualquier magnitud, ya que, en el desarrollo e intercambio de los pueblos y civilizaciones, fue esencial el proceso de medir; siendo necesario e imprescindible, al menos determinar entre qué valores se encontraba una determinada magnitud. Posteriormente, las desigualdades eran básicas en la estimación de áreas de figuras a partir de otras ya conocidas, el cálculo aproximado de raíces cuadradas, la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones (en los que se aplica el método de falsa posición, método que se basa en la búsqueda de valores aproximados a partir de un valor supuesto) y en el condicionamiento de las raíces de las ecuaciones (donde las mismas podían resultar mayores o menores de lo esperado). Así, fueron adquiriendo cada vez más notoriedad en el quehacer matemático y cuando las circunstancias se volvieron favorables (desarrollo de la escritura, sistemas de numeración y simbolismo algebraico), florecieron en una teoría matemática.

Incrustadas las desigualdades, en principio en la aritmética y en la Geometría;

migraron al Álgebra para obtener el poder de los símbolos que permitieron expresar las ideas de manera más sintética, precisa y con mayor claridad que en la etapa de origen. Se aprecia, además, una utilización más amplia de las desigualdades, es decir, estas fueron penetrando gradualmente en todas las ramas de la matemática. Se establecieron, para el bien de la matemática, en la Teoría de Funciones donde se enriquecieron con nuevas estructuras y de su filosofía. Poco a poco, aparece una buena cantidad de documentos que revelan que las desigualdades se van convirtiendo en herramientas para resolver una amplia gama de problemas tanto prácticos como de la propia ciencia matemática, dando lugar a una etapa de consolidación en su proceso evolutivo. En particular, dentro de la Teoría de Funciones, crecieron omnipresentes en muchas áreas matemáticas, desde el cálculo hasta el álgebra, desde la estadística, al análisis numérico, a la teoría de Gráficas.

Por todo lo anterior, las desigualdades no pueden considerarse como parte exclusiva o intrínseca de la geometría, el álgebra o el análisis sino que han jugado un papel muy importante como elemento integrador, en la evolución de la Ciencia Matemática, hasta desarrollarse como una teoría matemática independiente. La salida a la luz del famoso libro *Desigualdades* de Hardy, Littlewood y Pólya marca el nacimiento formal de la Teoría de las Desigualdades, teoría que ha ido ganando espacio, por sus métodos y técnicas, tanto en matemáticas puras como en aplicadas.

Blibliografía

ABDULLATIF, M. (2011). Al-Battani contributions in Astronomy and Mathematics. En A. O. Shuriye & W. F. Faris (Eds.), *Contributions of Early Muslim Scientist to Engineering Studies and Related Sciences* (pp. 45–48). Malaysia: IIUM PRESS.

ARGUEDAS, V. (2010). La influencia de la matemática persa en el medioevo. *Revista digital Matemática, Educación e Internet, 11*(1).

ASHBAUGH, M., BENGURIA, F. (2010). From Carthage to the World: The Isoperimetric Problem of Queen Dido and its Mathematical Ramifications. *Queen Dido Conference*. Conferencia realizada en Cártago, Tunez, 24–29 de mayo 2010.

BAGNI, G. T. (2005a). Inequalities and Equations: History and Didactics. En M. Bosch, (Ed.). *Proceedings of CERME-4* (652–662). Sant Feliu de Guíxols, España: Fundemi IQS-Universitat Ramon Llull.

BAGNI, G. T. (2005b). Equazioni e disequazioni. Riferimenti storici e proprietàinternazionali. *La matematica e la sua didattica, 3,* 285–296.

BAZZINI, L., TSAMIR, P. (2004). Algebraic equations and inequalities: Issues for research and teaching. Proceedings of the 28th Conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education, Bergen, Norway, 1, 137–139.

BLUM-SMIT, B., COSKEY, S. (2017). The Fundamental Theorem on Symmetric Polynomials: History's First Whiff of Galois Theory. *The College Mathematics Journal*, *48*(1),18–29.

BOLTIANSKI, V. G. (1981). *Lecciones Populares de Matemáticas: Figuras equivalentes y equicompuestas.* Moscú, Rusia: Editorial Mir.

BOYER, C. (1968). A history of Mathematics. Nueva York: John Wiley & Sons.

BROUSSEAU, G. (1998). Théorie des situations didactiques. Grenoble: La Pensée Sauvage.

CAJORI, F. (1928). A history of Mathematical Notations, Vol. 1. London. The Open Court Company Publishers.

COLLETTE, J. P. (1986). Historia de las Matemáticas Tomo I. Madrid, España: Siglo XXI España Editores.

CORNU, B. (1991). Limits. In Tall, D. (Ed.). Advanced Mathematical Thinking, 65–81. Dordrecht, the Nederlands: Kluwer Academic Publishers.

COTTLE, R. (2012). William Karush and the KKT Theorem. Documenta Mathematica, Volumen Extra (20012), 255–269.

DEBNATH, LOKENATH (2010), *The Legacy of Leonhard Euler: A Tricentennial Tribute*, World Scientific,

DIEUDONNÉ, J. (1996). L'Analyse mathématique aux dix-huitième siècle. En Autor (Ed.), Abregé d'Histoire des Mathématiques (pp. 19– 53). París, Francia: Hermann Editeurs des Sciences et des Arts.

DREYFUS, T., HOCH, M. (2004) Equations – a structural approach. Proceedings of the 28th Conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education, Bergen, Norway, 1, 152–155.

EDWARDS, C. (1979). The historical development of the calculus. New York: Springer-Verlag.

EULER, L. (1767). Solutio facilis problematum quorumdam geometricorum difficillimorum. Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 11, 103–123.

EVES, H. (1997). Introduçao à História da Matemática. UNICAMP.

FILLOY, E. (1999). Aspectos teóricos del álgebra educativa. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

FINK, A. M. (2000). An Essay on the History of Inequalities. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 249, 118–134.

FOWLER, D., ROBSON, E. (1998). Square Root Approximations in Old Babylonian Mathematics: YBC 7289 in context. Historia Mathematica, 25, 366–378.

GHEVERGHESE, G. (2008). A Brief History of Zero. Iranian Journal for the History of Science, 37–48

GIOVANNINI, E. (2015). David Hilbert y los Fundamentos de la Geometría (1891-1905). En S. Rahman & J. Redmond (Eds.). Cuadernos de lógica, epistemología y lenguaje, (Vol. 8). Berkeley, California: Individual Author and College Publications.

GIOVANNINI, E. (2017). El reto de Hilbert en la teoría de las magnitudes poligonales: Un capítulo en la axiomatización sintética de la geometría euclidiana. Revista latinoamericana de filosofía, 43(2), 207–235.

GONZÁLEZ, F. A., MARTÍN-LOECHES, M., SILVÁN, E. (2010). Prehistoria de la matemática y mente moderna: pensamiento matemático y recursividad en el paleolítico franco-cantábrico. Dynamis, 30, 167–195.

GONZÁLEZ, J., MORALES, A., SIGARRETA, J. M. (2013). Concepciones sobre el infinito: Un estudio a nivel universitario. Revista Digital Matemática, Educación e Internet, 3(2), 1–12.

GONZÁLEZ, J. (2016). Geometría, una reflexión infinita (Tomo I). Ed. Universidad Autónoma de Guerrero. Gro. Méx.

HALMAGHI, E., LILJEDAHL, P. (2015). Inequalities in the History of Mathematics: From Peculiarities to a Hard Discipline. GeoGebra International Journal of Romania, 4(2), 43–56.

HANS, J., MUÑOZ, J., FERNÁNDEZ, A. (2011). Puzles de cuadraturas. Revista Suma+, 66, 43–46.

HARDY, G. (1915). Notes on some points in the integral calculus, XLI. On the convergence of certain integrals and series. Messenger of Math, 45, 163–166.

HARDY, G. (1919). Notes on some points in the integral calculus, LI. On Hilbert's double-series theorem, and some connected theorems concerning the convergence of infinite series and integrals. Messenger of Math, 48, 107–112.

HARDY, G. (1920). Notes on a theorem of Hilbert. Mathematische Zeitschrift, 6, 314–317.

HARDY, G. (1925). Note on a theorem of Hilbert concerning series of positive terms. Proceedings of the London Mathematical Society, 23(2), 45–46.

HARDY, G. H., LITTLEWOOD J. E., POLYA, G. (1934). Inequalities. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press.

ILLANA, J. (2012). Matemáticas en el antiguo Egipto. Revista Suma+, 71, 47–61.

JORDAN, C. (1893) Cours d'Analysede l'École Polytechnique 2. Ed. Paris. Gauthier-Villars.

JORDAN, K. E., Brannon, E. M., Logothetis, N. K., & Ghazanfar, A. A. (2005). Monkeys match the number of voices they hear to the number of faces they see. Journal of Vision, 5(8),887, 887a. Doi:10.1167/5.8.887.

JUNGK, W. (1979). Conferencias sobre metodología de la enseñanza de la matemática. Tomo II, 1ª. Parte. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

KATZ, V. (2009). History of Mathematics. 3ª.ed. Ed. Pearson. New York.

KASIR, D. S. (1931). The Algebra of Omar Khayyam. The Mathematics Teacher, 25(4), 238–241.

KAZARINOFF, N. (1961). Geometric inequalities. New Haven, Connecticut: Yale University.

KLINE, M. (1972). Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. New York: Oxford University Press.

KOUKI, R. (2008) Enseignement et apprentissage des équations, inéquations et fonctions au secondaire : entre syntaxe et sémantique Université. Tesis Doctoral (no publicada). Universidad Claude Bernard Lyon 1.

KUFNER, A., MALIGRANDA, L., PERSSON, L. E. (2006). The prehistory of the Hardy inequality. American Mathematical Monthly, 113(8),715–732.

LAGRANGE, J. L. (1769). Sur la résolution des equations algebriques. Memoires de l'Académie des Sciences et Belles-Lettres de Berlin. En Oeuvres Completes de Lagrange Tomo II (540–578). Paris: Gauthier-Villars.

LANDAU, E. (1921). Letter to G. H. Hardy, June 21, 1921.

LANDAU, E. (1924). Letter to G. H. Hardy, December 13, 1924.

LANDAU, E., Shur, I., & Hardy, G. H. (1926). A note on a theorem concerning series of positive terms: Extract from a letter. Journal of the London Mathematical Society, 1, 38–39. doi:10.1112/jlms/s1–1.1.38

LENIN, V. I. (1979). Cuadernos Filosóficos (p. 165). La Habana: Editora Política.

LINCHEVSKI, L., & Sfard, A. (1991). Rules without reasons as processes without objects – The case of equations and inequalities. Proceedings of PME15, Assisi, Italy, 2, 317–324.

MAKAROV, B. M., GOLUZINA, M. G., LODKIN, A. A., PODKORYTOV, A. N. (1992). Selected Problems in Real Analysis. Translations of Mathematical Monographs. EEUU: American Mathematical Society.

PARRA, E. (2009). Arquímedes: su vida, obras y aportes a la matemática moderna. Revista digital Matemática, Educación e Internet, 9(1), 1–40.

PEANO, G. (1887) Applicazioni Geometriche. Torino. Fratelli Bocca Editori

PÉREZ, M. A. (2009). Una Historia de las Matemáticas: Retos y conquistas a través de sus personajes (p. 33). Madrid, España: Editorial Visión Libros.

PÉREZ R., BERENGUER I., COBO, B., DAZA, D., FERNÁNDEZ, F., POSADAS, M., PAYÁ, A. (2000). Isoperímetros en la Grecia Antigua. Revista Suma, 34, 95–98.

RIESZ, M. (1923). Letter to G. H. Hardy, 1919 or 1920.

RUIZ, F. (2015). Algunos problemas de optimización geométrica. *Pensamiento Matemático,* 5(2), 027–054.

SACKUR, K. (2004). Problems related to the use of graphs in solving inequalities. Proceedings of the 28th Conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education, Bergen, Norway, 1, 148–152.

SÁNCHEZ, A., SIGARRETA, J. (2011). Estudio epistemológico de las geometrías no-euclidianas. Matemáticas: Enseñanza Universitaria, 9(2), 117–132.

SCHUR, I. (1911). Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlich vielen Veränderlichen. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1911(140), 1–28.

SCHUR, I. (1919). Letter to G. H. Hardy, 1918 or 1919.

SOLAECHE, M. C. (2002). Omar Khayyam: las Matemáticas, la Nada, el Vino, el Torno y la Amada. Divulgaciones Matemáticas, 10(1), 79–83.

STEEL, J. M. (2004). The Cauchy-Schwartz master class. An introduction to the art of Mathematical Inequalities. Inglaterra: Cambridge University Press.

STEWART, I. (2008). Historia de las matemáticas en los últimos 10000 años. Barcelona, España: Editorial Crítica.

TALL, D. (2004). Reflections on research and teaching of equations and inequalities. Proceedings of the 28th Conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education, Bergen, Norway, 1, 158–161.

TALL, D., VINNER, S.: 1981, Concept image and concept definition in Mathematicswith particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151–69.

TSAMIR, P., TIROSH, D., TIANO, S. (2004). New errors and old errors: The case of quadratic inequalities. Proceedings of the 28th Conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education, Bergen, Norway, 1, 155–158.

VERA, F. (1970). Científicos Griegos Tomo I. Madrid, España: Aguilar S. A. de Ediciones.

VER EECKE, P. (1959) Diophante d'Alexandrie. Les Six Livres Arithmétiques et le Livre des Nombres Polygones. París : Albert Blanchard.

VIRGILIO, P. (1890). La Enei*da.* Madrid, España: Editorial Librería Viuda de Hernando y Compañía.

Edgardo Locia Espinoza
Facultad de Matemática – UAGRo – México
orcid.org/0000-0003-1685-998X

E-mail: lociae999@hotmail.com

Armando Morales Carballo
Facultad de Matemática – UAGRo – México
orcid.org/0000-0001-9841-7493

E-mail: armando280@hotmail.com

José Luis Sánchez Santiesteban
Facultad de Matemática – UAGRo – México
orcid.org/0000-0002-8128-3457

E-mail: jlsanchezsantiesteban@gmail.com

José María Sigarreta Almira
Facultad de Matemática – UAGRo – México
orcid.org/ 0000-0002-0863-4695

E-mail: josemariasigarretaalmira@hotmail.com