Revista Brasileira de História da Matemática –Vol. 22, nº 45 – pp. 55–66
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

LES ÉQUATIONS QUADRATIQUES: UNE PREUVE ALGÉBRIQUE DATANT DU XE.S.

Foued Nafti
Institut Supérieur de l'Éducation et de la Formation Continue –ISEFC – ECOTIDI – Tunisia

Rahim Kouki
Université de Tunis el Manar – Institut Prépartoire aux Études d'Ingénieurs El Manar – IPEIEM – ECOTIDI – Tunisia

(aceito para publicação em junho de 2022)

Resumé

Dans cet article, nous comptons mettre l'accent sur un texte mathématique arabe du X^{e} siècle qui a abordé les équations quadratiques par une approche purement algébrique.

Mots clés: Equations quadratiques, Algèbre arabe, Al-Khwārizmī, Al-Karajī.

[QUADRATIC EQUATIONS: AN ALGEBRAIC PROOF DATING FROM THE XE.S.]

Abstract

In this article, we intend to focus on an Arabic mathematical text from the tenth century that approached quadratic equations in a purely algebraic way.

Keywords: Quadratic equations, Arabic algebra, Al-Khwārizmī, Al-Karajī.

[AS EQUAÇÕES QUADRÁTICAS: UMA PROVA ALGÉBRICA DATANDO DO SÉCULO X]

Resumo

Neste artigo, buscamos dar ênfase a um texto matemático árabe do século X que trata as equações do segundo grau por uma abordagem puramente algébrica.

Palavras-chave: Equações quadráticas, Álgebra árabe, Al-Khwārizmī, Al-Karajī.

Introduction

Au IX^e siècle et au sein de la Maison de la Sagesse al-Khwārizmī fonda à Bagdad les premiers piliers d'une nouvelle discipline : l'Algèbre. Il consacra un chapitre qui représenta la pièce maîtresse de son ouvrage destiné à l'étude systématique des équations du premier et du deuxième degré.

En commençant, il nomma les objets primitifs sur lesquels il fonderait son étude, à savoir la chose (šay'), nommée aussi la racine (ğiḏr) x, le carré (māl) x^2 x^2 et le nombre ('adad). La permutation de ces trois objets lui permettait d'aboutir à six équations canoniques auxquelles il associa différents algorithmes de résolution démontrés par des techniques géométriques.

Ce chapitre sur les équations quadratiques demeure presque omniprésent dans les travaux des successeurs immédiats d'Al-Khwarizmi. En effet, Abū Kāmil (830–900)[1] l'a refait en se référant explicitement aux *Éléments* d'Euclide tout en développant des résultats relatifs aux équations de degré supérieur à deux .

Al-Karajī (950–1029) a entrepris un projet plus ample qui consiste à « arithmétiser l'algèbre », c'est-à-dire étendre à l'inconnue algébrique et ses différentes puissances les règles propres à l'arithmétique. Son projet initial dans son ouvrage *Le livre glorieux* (al-Faḫrī) aboutissait, entres autres, à une théorie sur les polynômes (NAFTI, 2017). A l'instar de ses prédécesseurs, il aborde le chapitre sur les équations quadratiques et démontre géométriquement les différents algorithmes de résolution.

Plus loin, dans son ouvrage intitulé *Causes de l'algèbre* (ʿIlal ḥisāb al-jabr), il revisite ce même chapitre sur les six équations en l'abordant avec une approche purement algébrique.

Dans ce qui suit, nous allons essayer de décrire le procédé de démonstration des algorithmes de résolution des équations quadratiques chez al-Khwārizmī et de le comparer avec la méthode algébrique adoptée par al-Karajī et qui représente un tournant crucial dans l'histoire des mathématiques.

[1] Voir: Nafti (2017).

Les démonstrations géométriques d'al-Khwārizmī

Dans cette partie, nous considérons les initiales R, M et N pour désigner, respectivement, la racine, le carré (al-māl) et le nombre. En adoptant les notations mathématiques modernes, les six équations canoniques d'al-Khwārizmī se representent comme le montre le tableau ci-dessous (Voir Tableau 1).

Dans le chapitre consacré aux équations composées, c'est-à-dire celles de type E4, E5 et E6, al-Khwārizmī présente l'algorithme de résolution et en démontre géométriquement les différentes étapes de résolution.

Par exemple, sa démarche lors de la résolution d'une équation du type E4 à travers le cas particulier suivant $\left(x^2+10\,x=39\right)$ consiste à construire un carré de côté *x* puis de considérer, sur ses quatre côtés, quatre rectangles de longueurs égales à *x* et de largeurs égales à $\frac{10}{4}$. Ainsi, l'aire du carré principal est x^2, l'aire de chaque rectangle est $\frac{10}{4}x$ et l'aire de chaque

carré, qui dérive du prolongement de part et d'autre des quatre lignes, est $\left(\frac{10}{4}\right)^2$.

(E_1) :	$M=R$	$ax^2=bx$
(E_2) :	$M=N$	$ax^2=c$
(E_3) :	$R=N$	$bx=c$
(E_4) :	$M+N=R$	$ax^2+c=bx$
(E_5) :	$M+R=N$	$ax^2+bx=c$
(E_6) :	$R+N=M$	$bx+c=ax^2$

Tableau 1. Les six équations canoniques d'al-Ḫwārizmī
Source: Al-Khwārizmī apud Musharrafa et Ahmad (1937, p. 17).

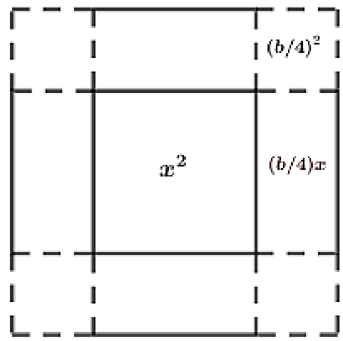

Figure 1 - Résolution géométrique de l'équation $x^2+bx=c$
Source: Al-Khwārizmī apud Musharrafa et Ahmad (1937, p. 22).

L'aire du grand carré est donc :

$$S = x^2 + 4\left(\frac{10}{4}\right)x + 4.\left(\frac{10}{4}\right)^2$$

Soit $S = x^2 + 10\,x + 25$. Or, la somme des deux premiers monômes x^2 *et* $10\,x$ est, d'après les données du problème, égale à 39. Ainsi on aura: $S = 39 + 25 = 64$. Ainsi, le côté du grand carré est $\sqrt{64} = 8$ d'où $x + 2\left(\frac{10}{4}\right) = 8$ et par suite $x = 8 - 5 = 3$.

D'une manière générale, le problème se traduit algébriquement et en notation moderne par : « Cherchons la racine xx vérifiant l'équation $x^2 + bx = c$».

D'autre part, on a :

$$x^2 + bx = x^2\ 4\left(\frac{b}{4}\right)x$$

Dans la figure ci-haut (Fig. 1), la somme des aires se traduit par :

$$x^2 + 4\left(\frac{b}{4}\right)x + 4\left(\frac{b}{4}\right)^2 = x^2 + bx + 4\left(\frac{b}{4}\right)^2$$

Ce qui donne $x^2 + 4\left(\frac{b}{4}\right)x + 4\left(\frac{b}{4}\right)^2 = c + 4\left(\frac{b}{4}\right)^2$. Or, la somme de toutes les aires n'est autre que l'aire du grand carré. On aura alors $\left(x + 2\,\frac{b}{4}\right)^2 = c + 4\left(\frac{b}{4}\right)^2$ autrement dit, $x + \frac{b}{2} = \sqrt{c + 4\left(\frac{b}{4}\right)^2}$.

Ce qui donne finalement $x = \sqrt{c + 4\left(\frac{b}{4}\right)^2} - \frac{b}{2}$.

D'une façon plus réduite, la solution de cette catégorie d'équation est alors $x=\sqrt{c+\left(\frac{b}{4}\right)^2}-\frac{b}{2}$.

D'où l'expression « partage en deux du nombre de racines » (*tanṣīf al-aǧḏār*), désignée ici par le terme $\frac{b}{2}$.

Dans l'exemple précédent, et par identification des coefficients, nous avons: $c=39$ et $b=10$. Par la suite, on aura:

$$x=\sqrt{39+5^2}-5=\sqrt{64}-5=3$$

Manifestement, al-Khwārizmī occultait la deuxième solution de cette équation, soit $x=-13$, car il ne considère que les nombres positifs. Remarquons aussi que, de nos jours, nous écrivons la solution de l'équation $ax^2+bx+c=0$ ainsi: $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ où $\Delta=b^2-4ac$. (Δ étant le discriminant de l'équation à résoudre).

Donc, si nous posons $a=1$ et $c'=-c$, nous obtenons $\Delta=b^2+4c'$. Par conséquent, les deux solutions seront données par:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2+4c'}}{2a}=-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c'}$$

où l'une coïncide avec celle que donne l'algorithme d'al-Khwārizmī qui, en résolvant l'équation $x^2+bx=c$, donne la solution suivante: $x=\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}-\frac{b}{2}$.

Il proposa plus loin dans son texte (MUSHARRAFA ; AHMAD, 1937, p. 23) une autre figure géométrique représentant cette même équation et différente de la précédente (Figure 2).

Nous venons donc de voir que dans son algèbre, al-Khwārizmī présente les six équations canoniques et en propose des preuves géométriques pour prouver le procédé adopté dans les algorithmes de résolution des équations des trois derniers types. Ce recours aux figures géométriques est fort probablement dû au fait qu'il lui manque les outils algébriques nécessaires pour assurer ces preuves.

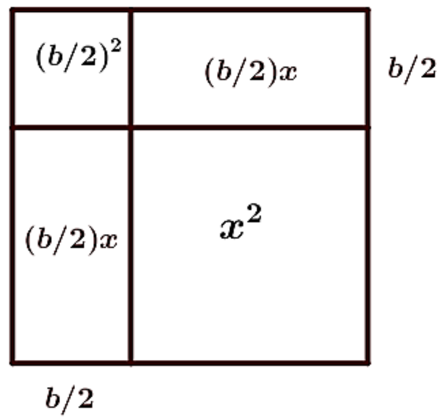

Figure 2 - deuxième figure de résolution de l’équation E_4
Source: Al-Khwārizmī apud Musharrafa et Ahmad (1937, p. 23).

L’approche algébrique d’al-Karajī

Exerçant à Bagdad, sous le règne des Bouyides, al-Karajī (950-1029) a composé plusieurs ouvrages d’algèbre, d’arithmétique et de géométrie. Il a couronné son œuvre par un ouvrage intitulé *Extraction des eaux souterraines*, traitant de travaux d’ingénieur.

Dans son ouvrage d’algèbre *Le glorieux* (*al-Fahri)*, il définit les différentes puissances de l’inconnue et celles de son inverse (c’est-à-dire x^n , $n \in \mathbb{Z}$), puis il y consacre un chapitre aux six équations canoniques qu’il complète par des exemples d’équations de degré supérieurs à deux. À l’instar de ses prédécesseurs, il y démontre les algorithmes de résolution des équations composés au moyen de la géométrie. Toutefois, dans un autre ouvrage intitulé *Causes d’al-jabr et d’al-muqābala* il souligne, dès l’introduction, qu’il compte démontrer par le biais du calcul algébrique ce qu’il a déjà fait géométriquement. C’est dans ce livre que nous rencontrons, pour la première fois[2] dans l’histoire des mathématiques (NAFTI, 2017), une *version algébrique* du chapitre sur les équations. Comment a-t-il donc conçu son approche? Et quelle portée a-t-elle au sein de la tradition conceptuelle des mathématiques arabes?

[2] Il est connu à travers les écrits de plusieurs historiens des mathématiques comme (SAIDAN, 1986), (RASHED, 1984) et (RASHED, 2007) que les deux principaux prédécesseurs d’al-Karajī, al-Khwārizmi et Abū Kāmil, ont puisé de la géométrie pour prouver les algorithmes de résolution des équations quadratiques. Le livre *‘Ilal ḥisāb al-ğabr* s’inscrit en fait dans le projet inauguré par al-Karajī dans son ouvrage *al-Faḫrī* et que Roshdi Rashed appelle « l’arithmétisation de l’algèbre » (RASHED, 1984), c’est-à-dire l’application systématiques des opértaions de l’arithmétique élémentaire aux expressions algébriques, et qui permettra, comme nous l’avons mentionné ci-haut, à son auteur d’aborder et d’achever la résolution des six équations en se basant sur un socle purement algébrique.

Le partage en deux des racines dans les équations composées

Al-Karajī débute la rubrique sur les équations quadratiques par ce que nous appelons *la plateforme* sur laquelle il va édifier aisément ses propos algébriques relatifs à leur résolution, sans aucun recours aux figures géométriques. Il étend d'abord, par analogie, les produits remarquables à l'inconnue algébrique, en établissant pour tout nombres n , $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$ et pour toute *racine* (x) et son *carré* x^2 (*māl*)[3] les identités suivantes:

$$(x+n)^2 = x^2 + 2\,nx + n^2 \quad (1)$$

$$(x+n)^2 = x^2 - 2\,nx + n^2 \quad (2)$$

$$\left(\frac{p}{q}x \pm n\right)^2 = \left(\frac{p}{1}\right)^2 x^2 \pm 2\,\frac{p}{q}\,nx + n^2 \quad (3)$$

$$\left(\frac{p}{q}x \pm \frac{p'}{q'}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)^2 x^2 \pm 2\,\frac{p}{q}\cdot\frac{p'}{q'}\,x + \left(\frac{p'}{q'}\right)^2 \quad (4)$$

Après une introduction dans laquelle il explique la raison derrière le partage en deux du nombre des racines (*tanṣīf al-aǧḏār*), c'est-à-dire le fait de poser le nombre $n = \frac{b}{2}$ dans la relation (1), où *b* est le nombre de racines dans l'équation $x^2 + bx = c$, al-Karajī passe à la résolution des équations du type E_4, E_5 et E_6 et la justification des algorithmes utilisés (NAFTI, 2017, p. 248).

Algorithmes de résolution

Al-Karajī décrit l'algorithme de résolution d'une équation du type E_4 ainsi:

Algorithme:

> "[…]*Tu prends la moitié du nombre de racines, tu la multiplies par elle-même et tu ajoutes au résultat le nombre qui est égal au māl plus les racines, et puis, tu prends la racine carrée de tout ce que tu as, à laquelle tu retranches la moitié du nombre de racines. Ce qui reste est la racine du māl."* (SAIDAN, 1986, p. 149)

[3] On rencontre l'identité $(x+n)^2 = x^2 + 2\,nx + n^2$ pour la première fois dans l'ouvrage *al-Faḫrī* d'al-Karajī, dans le chapitre sur l'addition des racines carrées (SAÏDAN, 1986, p. 126*)* alors que dans *al-Badī'*, on la retrouve dans le chapitre III sur les identités algébriques (ANBOUBA, 1964, p. 18, fol.21v).

En notations modernes nous écrivons ceci ainsi:
La solution de l'équation

$$(E):\ x^2+bx=c \qquad (27)$$

est:

$$x=\sqrt{c+\left(\frac{b}{2}\right)^2}-\frac{b}{2} \qquad (28)$$

Manifestement, cet algorithme est exactement le même que celui proposé par al-Khwārizmī. Toutefois, en passant à la justification de ses différentes étapes nous remarquons la nette différence entre les deux approches des deux mathématiciens.

En effet, nous avons vu qu'al-Khwārizmī interprète l'équation par une figure géométrique dans laquelle l'inconnue est assimilée à une grandeur géométrique. Ensuite, en égalisant des surfaces, il aboutit à la longueur cherchée. Par contre, al-Karajī propose de commencer par un développement du carré $\left(x+\frac{b}{2}\right)^2$. Par la suite, il procède par remplacer les « quantités » figurant dans ce développement par leurs équivalentes dans l'équation.

Selon sa démarche, utilisant les notations mathématiques modernes, al-Karajī montre que pour résoudre cette équation, il faut développer l'expression $\left(x+\frac{b}{2}\right)^2$, qui permet d'avoir la somme: $x^2+bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2$. Or, on a comme donnée: $x^2+bx=c$, donc,:

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=c+\left(\frac{b}{2}\right)^2 \qquad (29)$$

Par la suite, $x+\frac{b}{2}$ est égale à la racine du nombre $c+\left(\frac{b}{2}\right)^2$.On en déduit[4] que:

$$x=\sqrt{c+\left(\frac{b}{2}\right)^2}-\frac{b}{2} \qquad (30)$$

[4]Remarquons qu'al-Karajī ramène ici une équation quadratique composée de la catégorie $(E):\ x^2+bx=c$ (catégorie IV) à une équation de la première catégorie des équation simples, à savoir l'équation de la forme: $x^2=c$.

Certains exemples particuliers sont donnés et résolus selon ce modèle d'algorithme. En revanche, les nombres négatifs ne sont pas pris en considération.[5] Autrement dit, pour al-Karajī:

$$y^2 = z^2 \rightarrow y = z \qquad (33)$$

Portée de l'approche d'al-Karajī dans la tradition conceptuelle des mathématiques arabes

Nous nous sommes contentés d'analyser l'approche par laquelle al-Karajī démontre les équations de la catégorie E_4 car en fait il procède similairement dans la résolution des autres catégories. Sa technique consiste à réduire E_4, E_5 et E_6 à la forme:

$$y^2 = \psi \qquad (*)$$

En effet, dans le cas de l'équation $E_4 : x^2 + bx = c$, al-Karajī développe le carré:

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = x^2 + bx + \frac{b^2}{c} + \frac{b^2}{4}$$

Ainsi, en posant $y = x + \frac{b}{2}$ et $\psi = c + \frac{b^2}{4}$ on aboutit à la relation (*).

Par contre, dans le cas de l'équation $E_S : x^2 + c = bx$, il développe le carré suivant:

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = x^2 - bx + \frac{b^2}{4} = x^2 - \left(x^2 + c\right) + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} - c$$

Ainsi, en posant $y = x - \frac{b}{2}$ et $\psi = \frac{b^2}{4} - c$,on retrouve aussi la relation (*).

Et dans le cas de l'équation $E_6 : x + c = x^2$, il développe le carré suivant:

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = x^2 - bx + \frac{b^2}{4} = \left(bx + c\right) - \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} + c$$

Ainsi, en posant $y = x - \frac{b}{2}$ et $\psi = \frac{b^2}{4} + c$, on retrouve encore une fois la relation (*).

Ce qui caractérise l'approche algébrique d'al-Karajī, par rapport à celles de ses prédécesseurs al-Khwārizmī et Abū Kāmil, c'est que ces derniers, pour justifier les algo-

[5] Saïdan, *op. Cit*., p. 130, texte arabe: Notons que dans *al-Faḫrī*, et en multipliant deux quantités ayant chacune un terme soustrait, al-Karajī attribua le signe moins résultant de la multiplication, au produit obtenu: «[…] et neuf multiplié par moins deux donne moins dix-huit». (*Ibid.*, p. 130)

rithmes de résolution des équations quadratiques, assimilent l'inconnue algébrique à une grandeur géométrique. L'étape suivante consiste à chercher la valeur de cette grandeur en comparant des surfaces, dans le cas d'al-Khwārizmī, ou en utilisant explicitement les propositions II. 5 et II. 6 des *Éléments* d'Euclide, dans le cas d'Abū Kāmil. Par contre, al-Karajī se donne la légitimité d'opérer sur l'inconnue algébrique et son carré comme on le fait sur les nombres en arithmétique. Ce saut notionnel ne lui était possible que grâce à l'analogie qu'il a faite entre la variable (x), nommée la *chose* ou la *racine*, et son carré $\left(x^2\right)$, deux notions découlant de l'algèbre, et le nombre qui découle de la science de calcul.

Il est aussi à remarquer que cette approche algébrique permet de réduire toute équation appartenant à l'une des trois catégories, E_4, E_5 ou E_6, appelées dans la tradition algébrique arabe « équations composées » (*al-muqtarināt*) à une équation de la catégorie E_2, c'est-à-dire « *un carré (māl) égal à un nombre* » qui fait partie des équations simples (*al-mufradāt*).

Faisant ainsi, al-Karajī tisse un lien entre le concept d'équation et celui de l'opération. Autrement dit, toute équation suscite un carré à développer et par conséquent des opérations à faire sur les composantes de l'équation à savoir le nombre, la *racine* et le *carré*. Par contre, l'approche géométrique relie toute équation quadratique à une figure géométrique et à des surfaces à égaler.

Grâce à ce changement de registre, l'algèbre « se démontre » désormais au moyen des outils algébriques. Cette phase est d'une portée insolite quant à la genèse de cette discipline, dans la mesure où elle lui a permis, notamment en ce qui concerne le volet sur les équations, de s'émanciper de la tutelle de la géométrie.

Notons toutefois que cet assujettissement sera de retour pour les mathématiciens arabes, et ce en abordant le sujet des équations de degré trois, comme c'était le cas pour Ibn al-Haitham ou Nasīr al-Dīn al-Ṭūsī.[6] cet obstacle sera surmonté plus loin par l'école mathématique italienne, notamment avec Tartaglia, qui va de nouveau trouver le moyen de les résoudre avec une approche purement algébrique (KICHENASSAMY, 2015).

Manifestement, la méthode de résolution des équations quadratiques d'al-Karajī regroupe, sur le plan didactique, simplicité et efficacité. On n'y trouve pas la complexité que suscite la manipulation de figures géométriques et par conséquent la nécessité de changer de registre et d'inviter des prérequis auxiliaires pour justifier l'algorithme d'un problème algébrique. On n'y trouve pas aussi le recours au calcul du discriminent Δ, que nous rencontrons dans les cursus classiques.

[6] Voir par exemple Farès (2017).

Conclusion

Ce chapitre du texte mathématique «*Causes de l'algèbre*», datant du X^e siècle et réservé aux équations, entrepris par al-Karajī avec l'approche que nous avons décrite, n'est en fait qu'une ébauche à la preuve algébrique des algorithmes de résolution des équations canoniques connues depuis al-Khwārizmīī, preuve, qui, mis à part sa simplicité et son efficacité, semble fonder les premiers pas vers l'autonomie de l'algèbre et lever les défis que cause l'approche géométrique pour les apprenants qui s'intéressaient à l'étude de l'algèbre[7].

Notons que ce projet « d'arithmétisation de l'algèbre » sera poursuivi par al-Samaw'al (RASHED; AHMAD, 1972), un successeur d'al-Karajī à Bagdad, qui donnera de l'ampleur à cette discipline et dont les travaux seront repris au Maghreb par al-Ḥaṣṣār et Ibn al-Bannā' et traduits en Occident par Moise Ben Tibbon (LEVY, 2003), par exemple, en France et par Fibonacci en Italie.

Profitant de ce volet historique sur la genèse de la preuve algébrique, et dans le but de revisiter ce sujet sur l'algèbre arabe sous un angle didactique, nous comptons dans un futur article, présenter un scénario relatif à l'enseignement des équations quadratiques aux élèves de la deuxième année secondaire tunisienne[8] basée sur l'approche d'al-Karajī.

Références

ANBOUBA, A. **L'algèbre al-Badīʿd'al-Karajī**. Beyrouth: Université Libanaise, 1964.

FARÈS, N. **Naissance et développement de l'algèbre dans la tradition mathématique arabe**. Dār al-Fārābī, Beyrouth, 2017.

KICHENASSAMY, S. Continued proportions and Tartaglia's solution of cubic equations. **Historia Mathematica**, Elsevier, n. 42, v. 4, pp. 407–435, 2015.

LEVY, T. L'Algèbre arabe dans les textes hébraïques (I). Un ouvrage inédit d'Isaac Ben Salomon al-Aḥdab (XIVe siècle). **Arabic Sciences and Philosophy**, Paris, v.13, pp. 269--301, 2003.

MUSHARRAFA, A-M.; AHMAD, M. M. **Kitab al-jabr li l-Khwarizmi** [The algebra book of al-Khwarizmi]. Le Caire: Paul Barbier, 1937.

[7] Selon l'introduction de l'ouvrage *ʿIlal ḥisāb al-ğabr*, ces difficultés rencontrées par ses élèves furent parmi les causes qui ont suscité la recherche d'une autre voie autre que la géométrie pour justifier les algorithmes de résolution des équations quadratiques et, par conséquent, la composition de cet ouvrage.

[8] L'équivalent des classes de seconde en France.

NAFTI, F. **Al-Karajī, algébriste et mathématicien appliqué**. 2017. Thèse (Doctorat en Sciences et Techniques de l'Ingénieur). École Nationale d'Ingénieur de Tunis, Université de Tunis El-Manar, Tunis, 2017.

RASHED, R.; AHMAD, S. **L'Algèbre al-Bāhir d'al-Samaw'al**. Édition de l'Université de Damas, 1972.

RASHED, R. **Al-Khwārizmī, le commencement de l'algèbre**. Paris: Albert Blanchard, 2007.

RASHED, R. **Entre arithmétiques et algèbre.** Paris : Les Belles Lettres, 1984.

SAÏDAN, A-S. **Tārīḫ ʿilm al-jabr fī l-ʿālam al-ʿarabī.,** v.l. I, II. Kuwait, 1986.

Foued Nafti
Departament de Mathématiques – ISEFC - ECOTIDI Tunisia

E-mail: foued.nafti@uvt.tn

Rahim Kouki
Départament de Mathématiques – IPEIEM – ECOTIDI – Tunisia

E-mail: rahim.kouki@ipeiem.utm.tn