CÁLCULO DIFERENCIAL DE GOTTFRIED WILHELM VON LEIBNIZ

Thiago Augusto Silva Dourado
Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo – IME-USP – Brasil

(aceito para publicação em abril de 2022)

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma tradução do artigo "Novo método para máximos e mínimos, bem como para tangentes, que não se detém ante as quantidades fracionárias ou irracionais, e é um singular gênero do cálculo para estes problemas" de Gottfried Wilhelm von Leibniz, publicado na *Acta Eruditorum*, edição de outubro de 1684 (número X), tomado como o trabalho que fundou e apresentou pela primeira vez o cálculo diferencial em bases gerais.

Palavras-chave: Matemática, História, Leibniz, Cálculo Diferencial.

[DIFFERENTIAL CALCULUS OF THE GOTTFRIED WILHELM VON LEIBNIZ]

Abstract

In this work we present a translation of the article "New method for maxima and minima, as well as for tangents, which does not stop at fractional or irrational quantities, and is a unique genre of calculus for these problems" by Gottfried Wilhelm von Leibniz, published in *Acta Eruditorum*, October 1684 edition (number X), taken as the work that founded and presented for the first time the differential calculus on a general basis.

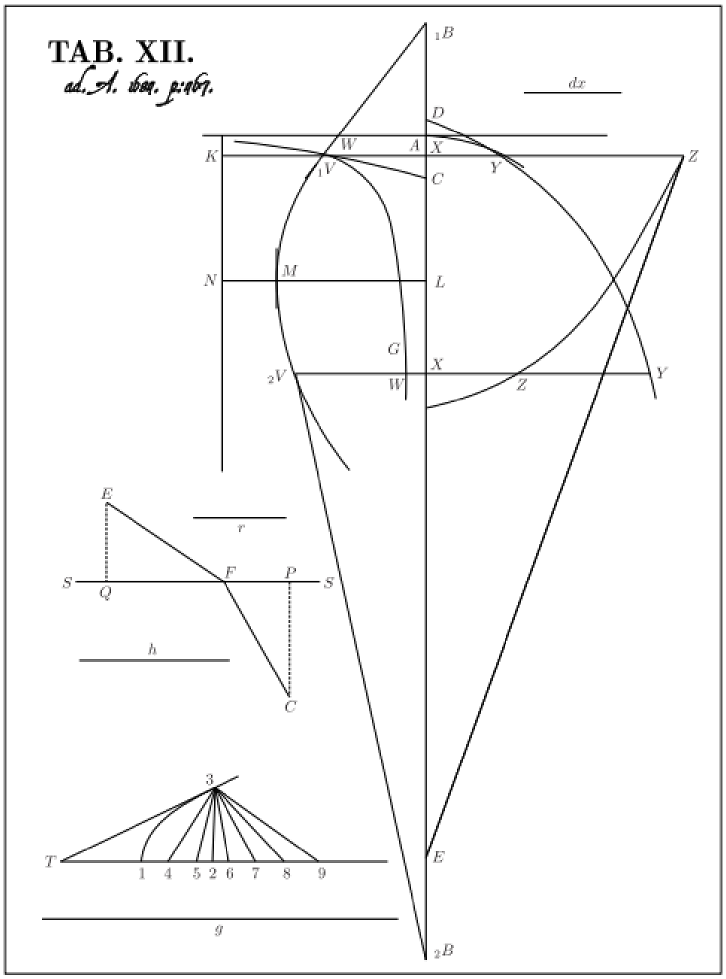
Keywords: Mathematics, History, Leibniz, Differential Calculus.

Apresentação

O que apresentamos aqui é uma tradução do artigo "*Nova metthodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, &*

singulare pro illis calculi genus” de Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716), publicado em outubro de 1684 na *Acta Eruditorum* (número X, págs. 467–473), onde o autor apresenta pela primeira vez os fundamentos do Cálculo Diferencial tomado como teoria geral. Apresentamos conjuntamente, na sequência, as páginas correspondentes à publicação original em latim extraída da revista supramencionada. O leitor perceberá que as iniciais da publicação original contam de G. L. L., de fato estas iniciais são referentes à Gottfried Wilhelm Leibniz, mas Wilhelm escrito em latim como *Guilielmus*. Especificamente, aqui vemos a primeira publicação onde aparece a regra do produto e do quociente de derivadas e sua prova geométrica.

Tradução



NOVO MÉTODO PARA MÁXIMOS
e mínimos, bem como para tangentes, que não se detém ante as quantidades fracionárias ou irracionais, e é um singular gênero do cálculo para estes problemas, por G. W. L.

Seja um eixo AX, e *várias curvas, como* VV, WW, YY, ZZ, cujas coordenadas, normais ao eixo, *VX*, *WX*, *YX*, *ZX*, serão chamadas respectivame *v*, *w*, *y*, *z*; e a abscissa *AX* do eixo se chama *x*. As tangentes *VB*, *WC*, *YD*, *ZE* encontram ao eixo respectivamente nos pontos *B*, *C*, *D*, *E*. Agora qualquer reta assumida arbitrariamente se chamará *dx*, e a reta que é a *dx*, como *v* (ou *w*, ou *y*, ou *z*) é a *VB* (ou *WC*, ou *YD*, ou *ZE*) se chamará *dv* (ou *dw*, ou *dy*, ou *dz*) ou diferença das *v* (ou de *w*, ou *y*, ou *z*). Isto posto as regras do cálculo serão as seguinte: TAB. XII.

Se *a* é uma quantidade constante dada, será *da* igual a 0, e $d\,\overline{ax}$ será igual a *adx*; se *y* é igual a *v* (ou uma ordenada qualquer da curva *YY*, igual a qualquer ordenada correspondente da curva *VV*) será *dy* igual *dv*. Agora *adição* e *subtração*: se é *z – y + w +x* igual a *v*, será $\overline{dz - y + w + x}$ igual a *dz – dy + dw + dx*. *Multiplicação*: $d\,\overline{xv}$ é igual a *xdv + vdx*, ou pondo *y* igual a *xv*, será *dv* igual a *xdv + vdx*. É arbitrário por a fórmula como *xv* ou abreviadamente uma letra em seu lugar, como *y*. Há de notar-se neste cálculo que *x* e *dx* hão de ser tratados do mesmo modo, ou qualquer outra letra determinada com sua diferencial. Também há de notar-se que não é sempre possível retornar a uma equação diferencial, senão sob certa preocupação, a qual voltarei. Novamente para *divisão*, $d\,\frac{v}{y}$ ou (pondo z igual a $\frac{v}{y}$) *dz* é igual $\frac{\pm vdy \mp ydv}{yy}$.

Quanto aos *sinais* há de notar-se que, quando no cálculo, em lugar da letra simplesmente se toma sua diferencial, se mantém os mesmos sinais, e para *+z* se escreve *+dz*, para *-z* se escreve *-dz*, como se mostra na adição e subtração pouco antes expostas; mas quando se chega a intepretação dos valores, ou quando se considera a relação de *z* com *x*, então há que se demonstrar se o valor da *dz* é uma quantidade positiva, se é menor que nada, ou negativa; o que sucede noutra ocasião quando a tangente *ZE* se traça do ponto *Z* não até *A*, mas até as partes opostas ou abaixo de *X*, isto é, quando as ordenadas *z* decrescem crescendo *x*. E posto que as ordenadas *v* umas vezes crescem, outras decrescem, *dv* umas vezes será uma quantidade positiva, outras negativa, e, no primeiro caso, a tangente ${}_1V_1B$ irá até *A*, no segundo caso ${}_2V_2B$ irá as partes opostas; mas nenhum dos casos sucede na posição intermediária *M*, em cujo momento as *v* nem crescem nem decrescem, mas permanecem em seu estado, de tal modo que é igual a 0, e onde não importa se a quantidade é positiva ou negativa, pois +0 é igual a -0; neste ponto a *v*, e portanto a ordenada *LM*, é *máxima* (ou se volta a convexidade até o eixo, *mínima*) e a tangente à curva *M* nem se eleva acima de *X* até as partes de *A* e se aproxima ao eixo neste lugar, nem abaixo de *X* até as partes opostas, mas sim às paralelas ao eixo. Se *dv* é infinita em relação à *dx*, então a tangente é perpendicular ao eixo, ou é sua própria ordenada. Se *dv* e *dx* são iguais, a tangente forma um ângulo semirreto com o eixo. Se crescendo a ordenada *v*, crescem também seus próprios incrementos ou diferenças *dv* (ou se sendo *dv* positivos também são positivas as diferenças das diferenciais *ddv*, ou sendo negativas, são também negativas), a curva volta a *convexidade* ao eixo, noutro caso, a *concavidade*; de onde o incremente verdadeiramente é máximo ou mínimo, ou de onde os incrementos dos decrescimentos chegam a ser crescente ou ao contrário, ali há um *ponto de inflexão contrário*, e a concavidade e a convexidade se intercambiam entre si, de tal que as ordenadas não cheguem a ser ali decrescentes dos crescimentos ou ao contrário, pois então a concavidade ou a convexidade permaneceriam; mas não pode ser possível que os incrementos continuem crescendo ou decrescendo enquanto as ordenadas se façam crescentes de decrescentes ou ao contrário. Assim pois, tem lugar um ponto de inflexão contrário, quando nem v nem dv são 0, e no entanto ddv é 0. De onde um problema de inflexão contrário não tem duas raízes iguais, como um problema de máximo, senão três. E todos estes casos dependem do reto uso dos sinais.

No entanto, hão de usarem-se por vezes *sinais ambíguos*, como na *divisão* anterior, antes que se veja claramente como devem ser explicados. E, certamente, se crescendo x crescem (decrescem) $\frac{v}{y}$, os sinais ambíguos em $d\frac{v}{y}$ ou em $\frac{\pm vdy \mp ydv}{yy}$ devem ser explicados de maneira tal que esta fração seja uma quantidade positiva (ou negativa). Entretanto $\mp$ significa o contrário $\pm$, de forma que, se este é +, aquele é - , ou ao contrário. E no mesmo cálculo podem ocorrer várias ambiguidades que distingo nos parêntesis; por exemplo, se fora $\frac{\pm vdy \mp ydv}{yy}$ igual a w, seria $\frac{\pm vdy \mp ydv}{yy}$ + $\frac{(\pm)\, ydz\, (\mp)\, zdy}{zz} + \frac{((\pm))\, xdv\, ((\mp))\, vdx}{vv}$ igual a dw, algumas ambiguidades surgidas de diferentes expressões ficariam mescladas. Há de notar-se que quando um sinal ambíguo é levado contra si mesmo dá +, contra seu contrário dá -, contra outro ambíguo forma uma nova ambiguidade dependente de ambos.

Potências: dx^a é igual a $a \cdot x^{a-1}\, dx$, por exemplo, $d{,}x^3$ é igual a $3 \cdot x^2\, dx$. $d\,\frac{1}{x^a}$ é igual a $-\frac{adx}{x^{a+1}}$, por exemplo, se w é igual $\frac{1}{x^3}$, então dw é igual a $-\frac{3\,dx}{x^4}$.

Raízes: $d{,}\sqrt[b]{x^a}$ é igual a $\frac{a}{b}\,dx\,\sqrt[b]{x^{a-b}}$ (daqui $d{,}\sqrt[2]{y}$ é igual a $\frac{dy}{2\sqrt[2]{y}}$, pois neste caso a é 1 e b é 2; logo $\frac{a}{b}\,dx\,\sqrt[b]{x^{a-b}}$ é $\frac{1}{2}\sqrt[2]{y^{-1}}$; agora y^{-1} é o mesmo que[1] $\frac{1}{y}$ segundo a

[1] Isto foi estabelecido por John Wallis (1616–1703) em seu famoso livro *Arithmetica infinitorum*, publicado em 1656. Veja, por exemplo, BOYER, C., *Fractional Indices, Exponents, and Powers.* National Mathematics Magazine. Vol. 18, No. 2 (Nov., 1943), pp. 81-86. Foi neste livro que Wallis apresentou também o famoso "produto de Wallis" para π, a saber,

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right) = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots.$$

natureza dos expoentes da progressão geométrica, e $\sqrt[2]{\frac{1}{y}}$ é $\frac{1}{\sqrt[2]{y}}$), $d\,\frac{1}{\sqrt[b]{x^a}}$ é igual a $\frac{-adx}{b\sqrt[b]{x^{a+b}}}$. Bastaria a regra da potência inteira tanto para determinar as frações como as raízes, pois a potência é uma fração quando o expoente é negativo e se transforma em raiz quando o expoente é fracionário; mas preferi deduzir estas consequências, antes que sejam deduzidas por outros, quando são absolutamente gerais, e ocorrem com frequência, e em um tema implícito possibilita tratá-la com facilidade.

Do conhecimento deste *Algoritmo*, assim o chamo, ou deste cálculo, que chamo *diferencial*, se podem obter todas as outras equações diferenciais por meio da álgebra comum, e os máximos e mínimos, assim como se podem obter as tangentes, de tal forma que não seja necessário separar as frações ou os irracionais ou outros vínculos, como, no entanto, deveria fazer-se segundo os Métodos até agora publicados. A demonstração disto será fácil para aquele versado nestas matérias e que considere este ponto que não recebeu bastante atenção até agora, que dx, dy, dv, dw, dz podem ser considerados como proporcionais às diferenciais momentâneas, seja com incrementos ou decrementos, de x, y, v, w, z (cada um em sua ordem).[2] Daqui pode-se escrever com qualquer equação proposta sua equação diferencial, o qual se consegue em qualquer *membro* (isto é, na parte que coincide com somente a adição ou subtração para construir a equação) substituindo simplesmente a quantidade diferencial do membro por outra quantidade (que não é a mesma para o membro, senão aquele que ocorre para formar o membro) adicionando sua quantidade diferencial para formar a quantidade diferencial do mesmo membro, não sem mais, senão segundo o Algoritmo proposto até aqui. Mas os Métodos publicados até agora não tem tal passo, pois geralmente adicionam uma reta como DX, ou outra desta natureza, mas não uma reta dy que é a quarta proporcional a DX, XY, dx, o que altera tudo; daqui aconselha-se que antes se suprimam as frações e os irracionais (que compõem as indeterminadas); também é evidente que nosso método se estende às linhas transcendentes, que não podem ser manipuladas pelo cálculo algébrico, que não são de nenhum grau dado, e isto de modo universalíssimo, sem suposições particulares que nem sempre sucedem. Nesta situação se consegue, para encontrar a *tangente*, traçar a reta que una dois pontos de uma curva que estejam a uma distância infinitamente pequena ou o lado prolongado de um polígono de infinitos ângulos, que para nós equivale à *curva*. Esta distância infinitamente pequena sempre pode ser expressada por alguma diferencial conhecida, como dv, ou por uma relação com a mesma, isto é, através de alguma tangente conhecida. Em particular, seja y uma quantidade transcendente, por exemplo, a ordenada de uma cicloide, a qual entra no cálculo mediante a ordenada z de outra curva, e se determinará dz por dy, que dá a tangente da cicloide. No entanto, a própria tangente da cicloide, se se supõe que ainda não

[2] Observe que esses diferenciais são transformados como quantidades momentâneas, e a linha anterior nomeada dx no diagrama indicado não é mais usada; é claro que é permitido ter um triângulo de tamanho finito semelhante ao que envolve infinitesimais, e chamar a razão dos lados de $\frac{dv}{dx}$. Além disso, a ideia de função ainda não é evidente, e tanto as abcissas quanto as ordenadas são tratadas da mesma maneira.

fora obtida, pode encontrar-se do mesmo com o cálculo a partir de uma propriedade dada das tangentes do círculo.

É oportuno propor um exemplo do cálculo, onde se observa que aqui designo a divisão deste modo *x : y*, que é o mesmo que *x* dividido por *y*, ou $\frac{x}{y}$. Seja dada a equação *primeira* $x : y + \overline{a + bxc - xx} :$ o quadrado de $ex + fxx + ax\sqrt{gg + yy} + yy : \sqrt{bb + lx + mxx}$ igual a 0,[3] expressando a relação entre *x* e *y* ou entre *AX* e *XY*, supondo que sejam dadas *a*, *b*, *c*, *e*, *g*, *h*, *l*, *m*; se busca um ponto final dado *Y* desde o qual se traça a tangente *YD* à curva, ou se busca a razão da reta *DX* com a reta dada *XY*. A fim de abreviar, em lugar de *a*+*bx* escrevamos *n*; *p* em lugar de *c* - *xx*; *q* em lugar de *ex* + *fxx*; *r* em lugar de *gg* + *yy*; *s* em lugar de *hh* + *lx* + *mxx*, ter-se-á $x : y + np : qq + ax\sqrt{r} + yy : \sqrt{s}$ igual a 0. Esta é a equação *segunda*. Segundo nosso cálculo resulta que *d*, *x : y* será $\pm xdv \mp ydx ,: yy ;$ [4] e similarmente *d*, *np* : *qq* será $(\pm) 2\, npdq\, (\mp)\, qndp + pdn ,: q^3$ e[5] $d, ax\sqrt{r}$ será $ex + fxx + ax\sqrt{gg + yy} + yy : \sqrt{bb + lx + mxx}$;[6] e $d, yy : \sqrt{s}$ será $((\pm))\, yyds\, ((\mp))\, 4\, ysdy, :2\, s\sqrt{s}$,[7] todas estas quantidades diferenciais desde *d*, *x : y* até $d, yy : \sqrt{s}$, somadas, fazem 0, e deste modo darão a *terceira* equação, pois assim nos membros da segunda equação se substituem as quantidades por suas diferenciais. Agora *dn* é *bdx*, e *dp* é *-2xdx*, e *dq* é *edx + 2fxdx*, e *dr* é *2ydy*, e *ds* é *ldx + 2mxdx*. Com estes valores, substituindo na terceira equação se tem a *quarta* equação, de onde as quantidades diferenciais que permanecem sós, a saber, *dx*, *dy*, sempre se encontram fora dos denominadores e dos vínculos e fora do único membro que é afetado por *dx* ou por *dy*, conservada sempre a lei dos homogêneos até estas duas quantidades, por complicado que seja o cálculo;[8] daqui sempre pode ser obtido o valor de *dx : dy* ou da razão *dx* a *dy*, isto é, da *DX* proposta à *YX* dada, com o que esta razão em nosso cálculo (convertendo a quarta equação em Analogia) será como $\pm x : yy - axy : ((\mp))\, 2\, y : \sqrt{s}$ é a $\mp l : y\, (\pm)\, 2\, n\, \overline{pe + 2\, fx} ,: q^3\, (\mp) - \overline{2\, nx + pb} : \overline{qq} + a\sqrt{r}\, ((\pm))\, yy\, \overline{l + 2\, mx} :2\, s\sqrt{s}$.[9] Com o qual, dados os *x* e *y*, está dado o ponto *Y*. E dados os valores acima escritos das letras *n*, *p*, *q*, *r*, *s* por *x* e *y*. Portanto se tem o buscado. E adicionamos este exemplo bastante complicado para que o modo de usar estas regras superiores seja evidente em um cálculo algo difícil. Agora é preferível mostrar o uso em exemplos mais evidentes para o intelecto.

---

[3] Em termos modernos: $\frac{x}{y} + \frac{(a+bx)(c - x^2)}{(ex+fx^2)^2} + ax\sqrt{g^2 + y^2} + \frac{y^2}{\sqrt{h^2 + lx + mx^2}} = 0$.

[4] $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\pm xdy \mp ydx}{y^2}$.

[5] $d\left(\frac{np}{q^2}\right) = \frac{\pm 2\, npqdp \mp q(ndp + pdn)}{q^3}$.

[6] $d(ax\sqrt{r}) = \frac{axdr}{2\sqrt{r}} + adx\sqrt{r}$.

[7] $d\left(\frac{y^2}{\sqrt{s}}\right) = \frac{\pm y^2\, ds \mp 4\, ysdy}{2\, s\sqrt{s}}$.

[8] Isto é, todas as diferenciais de um determinado membro são da mesma ordem.

[9] $\mp \frac{x}{y^2} - \frac{axy}{\sqrt{r}} \pm \frac{2\, y}{\sqrt{s}} = \mp \frac{1}{y} \mp \frac{2\, np\,(e + 2\, fx)}{q^3} \mp \frac{-2\, nx + pb}{q^2} + a\sqrt{r} \pm \frac{y^2\,(1 + 2\, mx)}{2\, s\sqrt{s}}$.

Sejam dados dois pontos *C* e *E* e uma reta *SS* no mesmo plano, com eles; se busca um ponto *F* na reta *SS* tomado de maneira tal que unidos *CF*, *FE*, a soma dos retângulos multiplicados *CF* com a quantidade *h* e *FE* com a quantidade *r* seja a mínima de todas as possíveis, isto é, se *SS* é a separação de dois meios, e *h* representa a densidade do meio da parte *C*, como a água, e *r* a densidade do meio da parte *E*, como o ar, se busca um ponto *F* tal que o caminho de *C* a *E* através de *F* seja o mais fácil de todos os possíveis. Suponhamos que a soma de todos estes possíveis retângulos, ou todas as dificuldades dos caminhos possíveis, são representados pelos mesmos *KV*, ordenadas normais da curva *VV* a reta *GK*, às que chamaremos *ω*, e se busca a mínima dos mesmos, *NM*. Posto que se dão os pontos *C* e *E*, se darão as perpendiculares a *SS*, a sbaer *CP* (que chamaremos *c*) e *EQ* (como *e*) e *PQ* (como *p*), ademais *QF* em si, que é igual a *GN* (ou *AX*), chamaremos *x*, e a *CF*, *f*; a *EF*, *g*; será *FP*, *p* - *x*; *f* igual a $\sqrt{cc+pp-2\,px+xx}$, ou abreviadamente $\sqrt{l}$, e *g* igual a $\sqrt{ee+xx}$ ou abreviadamente $\sqrt{m}$. Portanto teremos *ω* igual $h\sqrt{l}+r\sqrt{m}$, cuja equação diferencial desta equação (suposto que *dω* seja 0, no caso de mínimo) é 0 igual a $+hdl:2\sqrt{l}+rdm:2\sqrt{m}$, segundo as regras de nosso cálculo[10] dadas; agora *dl* é $-2\,dx\,\overline{p-x}$, e *dm* é 2*xdx*, logo é: $h\,\overline{p-x}:f$ igual a *rx : g*. Se agora isto se aplica à Dióptrica, se poderão *f* e *g*, ou *CF* e *EF*, iguais, pois a refração permanece no ponto *F* tão grande como se ponha a longitude da reta *CF*, será $h\,\overline{p-x}$ igual a *rx* ou *h : r :: x : p - x*, ou *h* a *r* como *QF* a *FP*, isto é, os senos dos ângulos de incidência e refração *FP* e *QF* serão recíprocos a *r* e *h*, densidades dos meios nos quais se produz a incidência e a refração. Esta densidade não há de ser compreendida em relação a nós senão em relação à resistência que façam os raios de luz. E se tem assim a demonstração pelo cálculo, realizada por nós em outra parte destas mesmas Actas, quando expúnhamos o fundamental geral da Óptica, da Catóptrica e da Dióptrica. O que outros doutíssimos varões investigaram com muitas dificuldades, o conhecedor deste cálculo o obteve em três linhas.

Ainda mostrarei outro exemplo. Se uma curva 133 de tal natureza que desde um qualquer de seus pontos, como 3, se levam até seis pontos fixos no eixo proposto, 4, 5, 6, 7, 8, 9, seis retas, 34, 35, 36, 37, 38, 39, sendo a soma das retas igual a uma reta dada *g*. Seja um eixo *T*14526789, e seja 12 a abscissa, 23 a ordenada, se busca a tangente 3*T*; digo seria *T*2 a 23 como é a $\frac{23}{34}+\frac{23}{35}+\frac{23}{36}+\frac{23}{37}+\frac{23}{38}+\frac{23}{39}$ é a $-\frac{24}{34}-\frac{25}{35}+\frac{26}{36}+\frac{27}{37}+\frac{28}{38}+\frac{29}{39}$.[11] E

---

[10] A palavra *calculus* em latim refere-se apenas a um processo de cálculo, como realizado na Roma antiga na vida cotidiana usando pequenos seixos ou calhaus (ou cálculos); ao que parece, Leibniz pode estar usando a palavra nesse sentido. Vale mencionar o seguinte trecho do artigo *O vírus da linguagem* de Sérgio Rodrgues publicado no sítio do jornal A Folha de São Paulo: “O escritor argentino Jorge Luis Borges, que não era muito simpático à etimologia, apontou a inutilidade de saber que a palavra cálculo veio do latim ‘calculus’, pedrinha, em referência aos pedregulhos que se usavam antigamente para fazer contas.”

[11] Observe que os “números” escritos aqui são, na verdade, uma forma primitiva do método de nomear pontos pelo uso de índices; assim 23 é o comprimento de uma seção de linha d_i indicada da seguinte forma: Se designamos qualquer um dos pontos fixos do eixo *x* por x_i, então a distância ao ponto 3 ou (*x, y*) é dado por $d_i=\sqrt{y^2+(x-x_i)^2}$; logo o problema consiste em encontrar a função *y* tal que:

$$g=\sum_{i=1}^{n} d_i=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{y^2+(x-x_i)^2}\ .$$

Por diferenciação encontramos:

valeria a mesma regra, continuados os termos em qualquer quantidade, se não se supõe seis pontos fixos senão dez ou mais, conseguir o qual com o cálculo segundo os métodos de tangentes publicados suprimindo ademais os irracionais seria um trabalho tediosíssimo e por vezes insuperável, de tal maneira que se os retângulos planos ou sólidos compostos com aquelas retas segundo todos os binários ou ternários possíveis deveriam igualar-se com a quantidade dada; em todos estes casos, e em muitas mais consequências, a facilidade de nosso método é, em minha opinião, maior, e os exemplos são claríssimos. E certamente estes pontos são os inícios de uma Geometria muito sublime que também se estende aos dificílimos e charmosos problemas da Matemática mista que sem nosso cálculo diferencial ou semelhante ninguém poderia tratar com parecida facilidade.

Me agrada adicionar como Apêndice a solução do problema que Descartes, a proposta de Beaune, Tomo 3, Epíst., tentou, mas não resolveu. Encontrar uma linha *WW*de tal natureza que, cortada sua tangente *WC* com o eixo, seja *XC* sempre igual a um segmento constante *a*. Agora *XW* ou *w* é a *XC* ou *a*, como *dw* a *dx:* portanto, se *dx* (que pode ser adicionada arbitrariamente) se supõe constante ou sempre *b*, ou se as mesmas *x* ou *AX* crescem uniformemente, será *w* igual a $\frac{a}{b}dw$, pelo que as ordenadas *w* serão proporcionais com seus incrementos ou diferenças *dw*, isto é, se as *x* estão em progressão aritmética, as *w* estão em progressão geométrica, ou se *w* são números, *x* serão logaritmos: logo a linha *WW* é a logarítmica.[12]

$$0=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y\frac{dy}{dx}+x-x_i}{\sqrt{y^2+(x-x_i)^2}}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y\frac{dy}{dx}+x-x_i}{d_i}\right)=\frac{dy}{dx}\sum_{i=1}^{n}\frac{y}{d_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x-x_i}{d_i}\text{ etc.}$$

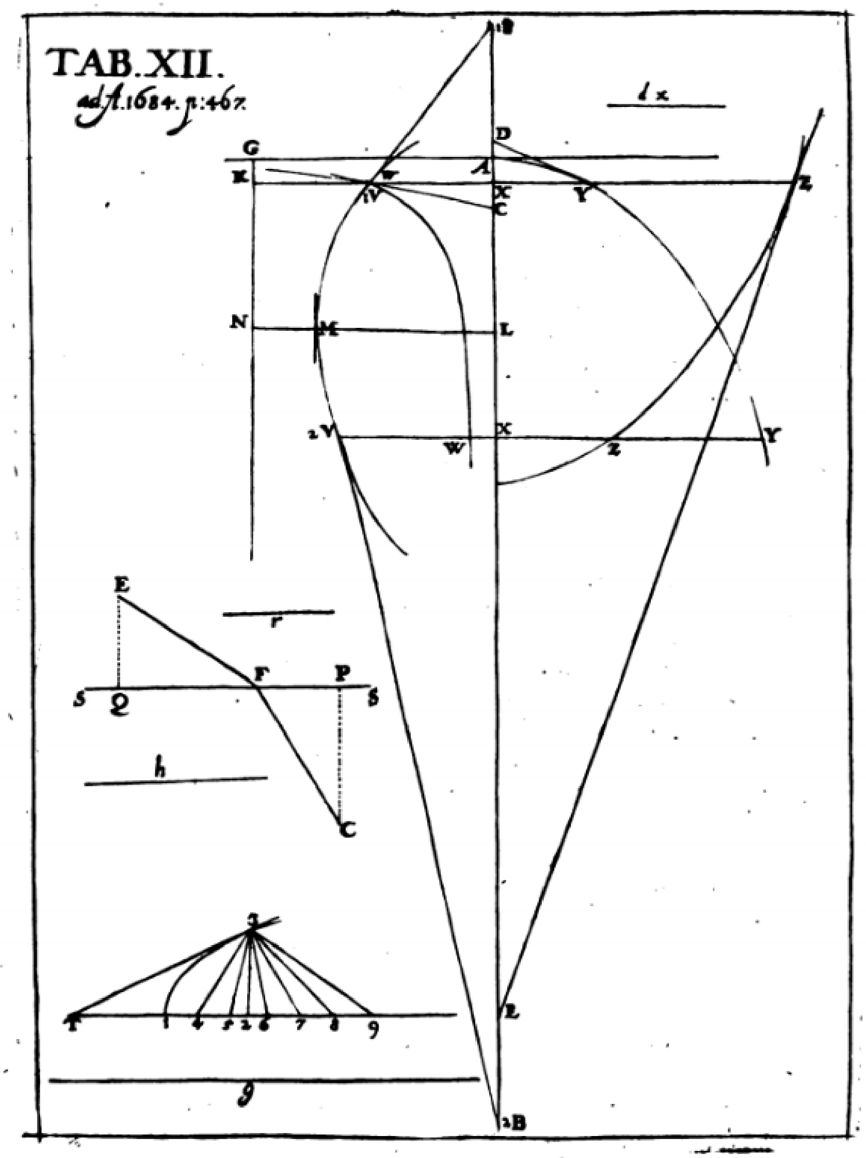
Desta forma, se $n = 2$ temos uma elipse com os focos como os pontos indicados no eixo *x*.

[12] Assim, temos a equação diferencial $\frac{dw}{dx}=-\frac{w}{a}$ ou $\frac{-x}{a}=\ln w-\ln A$, resultando

$$w = Ae^{\frac{-x}{a}}\ .$$

Assim, sob o termo logarítmico, a função inversa ou exponencial deve ser incluída; o que Leibniz realizou, mas a relação inversa na época não tinha um nome como tal, a ser estabelecida um pouco mais tarde por Johann Bernoulli (1667–1748), ver *e.g.* sua *Opera Omnia*, vol. I, p.179.

Versão original em latim



468 ACTA ERUDITORUM

z decreſcunt creſcentibus x. Et quia ipſæ ordinatæ v modo creſcunt, modo decreſcunt, erit d v modo affirmativa modo negativa quantitas, & priore caſu 1 V 1 B tangens ducitur verſus A; poſteriore 2 V 2 B in partes averſas: neutrum autem fit in medio circa M, quo momento ipſæ v neque creſcunt neque decreſcunt, ſed in ſtatu ſunt, adeoque fit d v æqu. o, ubi nihil refert quantitas ſit ne affirmativa an negativa, nam + o æqu. -- o: eoque in loco ipſa v, nempe ordinata L M, eſt *maxima* (vel ſi convexitatem Axi obverteret, *Minima*) & tangens curvæ in M neque ſupra X ducitur ad partes A ibique axi propinquat, neque infra X ad partes contrarias, ſed eſt axi parallela. Si d v ſit infinita reſpectu ipſius d x, tunc tangens eſt ad axem recta, ſeu eſt ipſa ordinata. Si d v & d x æquales, tangens facit angulum ſemirectum ad axem. Si creſcentibus ordinatis v, creſcunt etiam ipſa earum incrementa vel differentiæ, d v; (ſeu ſi poſitis d v affirmativis etiam d d v differentiæ differentiarum ſunt affirmativæ, vel negativis negativæ) curva axi obvertit *concavitatem*; alias *convexitatem*: ubi vero eſt maximum vel minimum incrementum, vel ubi incrementa ex decreſcentibus fiunt creſcentia aut contra, ibi eſt *punctum flexus contrarii*, & concavitas atque convexitas inter ſe permutantur, modo non & ordinatæ ibi ex creſcentibus fiant decreſcentes, vel contra, tunc enim concavitas aut convexitas maneret: ut autem crementa continuent creſcere aut decreſcere, ordinatæ vero ex creſcentibus fiant decreſcentes vel contra, fieri non poteſt. Itaque punctum flexus contrarii locum habet, quando neque v neque d v exiſtente o, tamen dd v eſt o. Unde etiam problema flexus contrarii non duas ut problema maximæ, ſed tres habet radices æquales. Atque hæc omnia quidem pendent a recto uſu ſignorum.

Interdum autem adhibenda ſunt *Signa Ambigua*, ut nuper in *diviſione*, antequam ſcilicet conſtet quomodo explicari debeant. Et quidem ſi creſcentibus x, creſcunt (decreſcunt) $\frac{v}{y}$, debent ſigna ambigua in $d\frac{v}{y}$ ſeu in $\frac{\pm v\,dy \mp y\,dv}{yy}$ ita explicari, ut hæc fractio fiat quantitas affirmativa (negativa). Significat autem $\mp$ contrarium ipſius $\pm$, ut ſi hoc ſit + illud ſit --, vel contra. Poſſunt & in eodem calculo occurrere plures ambiguitates, quas diſtinguo parentheſibus, exempli

MENSIS OCTOBRIS A. MDCLXXXIV. 469

pli causa si esset $\frac{v}{y} + \frac{y}{z} + \frac{x}{v}$ æqu. vv, foret $\frac{Xvdy + ydv}{} +$ $\frac{(\pm) y dz (\mp) z dy}{zz} + \frac{((\pm)) x dv ((\mp)) v dx}{vv}$ æqu. d vv, alioqui ambiguitates ex diversis capitibus ortæ confunderentur. Ubi notandum signum ambiguum in se ipsum ductum dare +, in suum contrarium dare --, in aliud ambiguum formare novam ambiguitatem ex ambabus dependentem.

Potentia d X^a, æqu. a. X^{a-1} dx, exempli gratia d, X^3 æqu. $3X^2$ dx $d\frac{1}{X^a}$ æqu. $-\frac{a\,dx}{X^{a+1}}$ ex gr. si vv sit æqu. $\frac{1}{X^3}$ fiet d vv æqu. $-\frac{3dx}{X^4}$.

Radices: d, $\sqrt[b]{X^a}$, æqu. $\frac{a}{b}$ dx $\sqrt[b]{X^{a-b}}$ (Hinc d $\sqrt[2]{y}$ æqu. $\frac{dy}{2\sqrt[2]{y}}$ nam eo casu a est 1, & b est 2; ergo $\frac{a}{b}\sqrt[b]{X^{a-b}}$ est $\frac{1}{2}\sqrt[2]{Y^{-1}}$ jam Y^{-1} idẽ est quod $\frac{1}{y}$ ex natura exponentium progressionis Geometricæ, & $\sqrt[2]{\frac{1}{y}}$ est $\frac{1}{\sqrt[2]{y}}$) d $\frac{1}{\sqrt[b]{X^a}}$ æqu $\frac{-a\,dx}{b\sqrt[b]{X^{b+a}}}$. Suffecisset autem regula potentiæ integræ tam ad fractas quam ad radices determinandas, potentia enim fit fracta cum exponens est negativus, & mutatur in radicem cum exponens est fractus, sed malui consequentias istas ipse deducere, quam aliis deducendas relinquere, cum sint admodum generales, & crebro occurrentes, & in re per se implicita præstet facilitati consulere.

Ex cognito hoc velut *Algorithmo*, ut ita dicam, calculi hujus, quem voco *differentialem*, omnes aliæ æquationes differentiales inveniri possunt per calculum communem, maximæque & minimæ, itemque tangentes haberi, ita ut opus non sit tolli fractas aut irrationales, aut alia vincula, quod tamen faciendum fuit secundum Methodos hactenus editas. Demonstratio omnium facilis erit in his rebus versato, & hoc unum hactenus non satis expensum consideranti, ipsas dx, dy, dv, dvv, dz, ut ipsarum x, y, v, vv, z (cujusque in sua serie) differentiis sive incrementis vel decrementis momentaneis proportionales haberi posse. Unde fit ut proposita quacunque æquatione scribi possit ejus æquatio differenti-alis

alis, quod fit pro quolibet *membro* (id est parte, quæ sola additione vel subtractione ad æquationem constituendam concurrit) substituendo simpliciter quantitatem membri differentialem, pro alia vero quantitate, (quæ non ipsa est membrum, sed ad membrum formandum concurrit) ejus quantitatem differentialem ad formandam quantitatem differentialem ipsius membri adhibendo, non quidem simpliciter, sed secundum Algorithmum hactenus præscriptum. Editæ vero hactenus Methodi talem transitum non habent, adhibent enim plerumque rectam ut DX, vel aliam hujusmodi, non vero rectam dy quæ ipsis DX, XY, dx est quarta proportionalis, quod omnia turbat; hinc præcipiunt ut fractæ & irrationales (quas indeterminatæ ingrediuntur) prius tollantur, patet etiam methodum nostram porrigi ad lineas transcendentes, quæ ad calculum Algebraicum revocari non possunt, seu quæ nullius sunt certi gradus, idque universalissimo modo, sine ullis suppositionibus particularibus non semper succedentibus, modo teneatur in genere, *tangentem* invenire, esse rectam ducere, quæ duo curvæ puncta distantiam infinite parvam habentia, jungat, seu latus productum polygoni infinitanguli, quod nobis *curva* æquivalet. Distantia autem illa infinite parva semper per aliquam differentialem notam, ut dv, vel per relationem ad ipsam exprimi potest, hoc est per notam quandam tangentem. Speciatim, si esset y, quantitas transcendens exempli causa ordinata cycloeidis, eaque calculum ingrederetur, cujus ope ipsa Z ordinata alterius curvæ esset determinata, & quæreretur dz seu per eam tangens hujus curvæ posterioris, utique determinanda esset dz per dy, haberetur autem dy, quia habetur tangens cycloeidis. Ipsa autem tangens cycloeidis, si nondum haberi fingeretur, similiter calculo inveniri posset ex data proprietate tangentium circuli.

Placet autem exemplum calculi proponere, ubi notetur me divisionem hic designare hoc modo, $x:y$ quod idem est ac x divis. per y seu $\frac{x}{y}$. Sit æquatio *prima* seu data, $x : y + \overline{a+bx}\;\overline{c-xx} :$ quadrat. $\overline{ex+fxx} + ax\sqrt{\overline{gg+yy}} + yy : \sqrt{\overline{hh+lx+mxx}}$ æqu. 0, exprimens relationem inter x & y seu inter AX & XY, posito ipsas a,b,c,e,f,g,h,l,m esse datas; quæritur modus ex dato puncto Y educendi

YD

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS & minimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & ſingulare pro illis calculi genus, per G. G. L.

SIt axis AX, & curvæ plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatæ, ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quæ vocentur reſpective, *v*, vv, y, z; & ipſa AX abſciſſa ab axe, vocetur x. Tangentes ſint VB, WC, YD, ZE axi occurrentes reſpective in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio aſſumta vocetur dx, & recta quæ ſit ad dx, ut *v* (vel vv, vel y, vel z) eſt ad VB (vel WC, vel YD, vel ZE) vocetur d *v* (vel d vv, vel dy vel dz) ſive differentia ipſarum *v* (vel ipſarum vv, aut y, aut z) His poſitis calculi regulæ erunt tales: TAB. XII.

Sit a quantitas data conſtans, erit da æqualis 0, & d ax erit æqu. a dx: ſi ſit y æqu. *v* (ſeu ordinata quævis curvæ YY, æqualis cuivis ordinatæ reſpondenti curvæ VV) erit dy æqu. d*v*. Jam *Additio & Subtractio*: ſi ſit $z - y + vv + x$ æqu. *v*, erit $d\,\overline{z - y + vv + x}$ ſeu d*v*, æqu. $dz - dy + d\,vv + dx$. *Multiplicatio*, $d\,\overline{x\,v}$ æqu. $x\,dv + v\,dx$, ſeu poſito y æqu. x*v*, fiet d y æqu. $x\,dv + v\,dx$. In arbitrio enim eſt vel formulam, ut x*v*, vel compendio pro ea literam, ut y, adhibere. Notandum & x & dx eodem modo in hoc calculo tractari, ut y & dy, vel aliam literam indeterminatam cum ſua differentiali. Notandum etiam non dari ſemper regreſſum a differentiali Æquatione, niſi cum quadam cautione, de quo alibi. Porro *Diviſio*, $d\frac{v}{y}$ vel (poſito z æqu. $\frac{v}{y}$) d z æqu. $\frac{\pm v\,dy \mp y\,dv}{yy}$

Quoad *Signa* hoc probe notandum, cum in calculo pro litera ſubſtituitur ſimpliciter ejus differentialis, ſervari quidem eadem ſigna, & pro + z ſcribi + d z, pro − z ſcribi − d z, ut ex additione & ſubtractione paulo ante poſita apparet; ſed quando ad exegeſin valorum venitur, ſeu cum conſideratur ipſius z relatio ad x, tunc apparere, an valor ipſius dz ſit quantitas affirmativa, an nihilo minor ſeu negativa: quod poſterius cum ſit, tunc tangens ZE ducitur a puncto Z non verſus A, ſed in partes contrarias ſeu infra X, id eſt tunc cum ipſæ ordinatæ

Nnn 3 z decre-

468 ACTA ERUDITORUM

z decrescunt crescentibus x. Et quia ipsæ ordinatæ v modo crescunt, modo decrescunt, erit d v modo affirmativa modo negativa quantitas, & priore casu 1 V 1 B tangens ducitur versus A; posteriore 2 V 2 B in partes aversas: neutrum autem fit in medio circa M, quo momento ipsæ v neque crescunt neque decrescunt, sed in statu sunt, adeoque fit d v æqu. 0, ubi nihil refert quantitas sit ne affirmativa an negativa, nam + 0 æqu. -- 0: eoque in loco ipsa v, nempe ordinata L M, est *maxima* (vel si convexitatem Axi obverteret, *Minima*) & tangens curvæ in M neque supra X ducitur ad partes A ibique axi propinquat, neque infra X ad partes contrarias, sed est axi parallela. Si dv sit infinita respectu ipsius d x, tunc tangens est ad axem recta, seu est ipsa ordinata. Si d v & d x æquales, tangens facit angulum semirectum ad axem. Si crescentibus ordinatis v, crescunt etiam ipsa earum incrementa vel differentiæ, dv; (seu si positis d v affirmativis etiam d d v differentiæ differentiarum sunt affirmativæ, vel negativis negativæ) curva axi obvertit *concavitatem*; alias *convexitatem*: ubi vero est maximum vel minimum incrementum, vel ubi incrementa ex decrescentibus fiunt crescentia aut contra, ibi est *punctum flexus contrarii*, & concavitas atque convexitas inter se permutantur, modo non & ordinatæ ibi ex crescentibus fiant decrescentes, vel contra, tunc enim concavitas aut convexitas maneret: ut autem crementa continuent crescere aut decrescere, ordinatæ vero ex crescentibus fiant decrescentes vel contra, fieri non potest. Itaque punctum flexus contrarii locum habet, quando neque v neque d v existente 0, tamen ddv est 0. Unde etiam problema flexus contrarii non duas ut problema maximæ, sed tres habet radices æquales. Atque hæc omnia quidem pendent a recto usu signorum.

Interdum autem adhibenda sunt *Signa Ambigua*, ut nuper in *divisione*, antequam scilicet constet quomodo explicari debeant. Et quidem si crescentibus x, crescunt (decrescunt) $\frac{v}{y}$ debent signa ambigua in $d\frac{v}{y}$ seu in $\frac{\pm v\,dy \mp y\,dv}{yy}$ ita explicari, ut hæc fractio fiat quantitas affirmativa (negativa). Significat autem $\mp$ contrarium ipsius $\pm$, ut si hoc sit + illud sit --, vel contra. Possunt & in eodem calculo occurrere plures ambiguitates, quas distinguo parenthesibus, exempli

MENSIS OCTOBRIS A. MDC LXXXIV. 473

initia ſunt tantum Geometriæ cujusdam multo ſublimioris, ad difficillima & pulcherrima quæque etiam miſtæ Matheſeos problemata pertingentis, quæ ſine calculo noſtro differentiali aut ſimili non temere quiſquam pari facilitate tractabit. Appendicis loco placet adjicere ſolutionem Problematis, quod Carteſius a Beaunio ſibi propoſitum, Tom. 3. Epiſt. tentavit, ſed non ſolvit. Lineam invenire WW talis naturæ, ut ducta ad axem tangente WC, ſit XC ſemper æqualis eidem rectæ conſtanti, a. Jam. XW ſeu w ad XC ſeu a, ut d w ad d x: Ergo ſi dx (quæ aſſumi poteſt pro arbitrio) aſſumatur conſtans ſive ſemper eadem nempe b, ſeu ſi ipſæ x ſive AX creſcant uniformiter, fiet W æqu. $\frac{a}{b}$ dw, quæ erunt ipſæ W ordinatæ, ipſis dw, ſuis incrementis ſive differētiis, proportionales, hoc eſt ſi x ſint progreſſionis arithmeticæ, erunt w progreſſionis Geometricæ, ſeu ſi w ſint numeri, x erunt logarithmi: linea ergo W W logarithmica eſt.

LAURENTII STRAUSSII Med. D. bujusque & Phyſic. Prof. Giſſens. Iſagoge Phyſica.

Editio ſecunda Ulmæ, 1684, in 8.

Continet Liber integram doctrinam Phyſicam per theoremata & axiomata, quibus partibus ſingula capita conſtant, explicatam. In Axiomatibus controverſiæ juxta hypotheſes ſcriptorum, non ſolum antiquorum, ſed & recentium breviter proponuntur, & additis limitationibus deciduntur. Eclecticam ergo philoſophandi rationem ſequitur, in qua ſæpe Sperlingii opiniones præ Peripateticis placent, ſæpe etiam recentisſimorum Philoſophorum inventa approbantur.

GUNTHERI CHRISTOPHORI SCHELHAMMERI, Med. Doct. & Prof. in Academia Julia de Auditu Liber unus.

Lugd. Batav. apud Petrum de Graaf. anno 1684.

Auditus rationem doctisſimus Vir ſibi præprimis excolendam ſumſit, quod neminem ſciret accurato ſatis ſtudio in eam inquiſiviſſe. Primam occaſionem meditationis caſus ſuggeſſit. Dum

Qqq 2 enim

Thiago Augusto Silva Dourado
Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo – IME-USP – campus de São Paulo – Brasil

E-mail: thiago.dourado@ime.usp.br