Traduções
Edição Especial da Revista Brasileira de História da Matemática – Vol. 23, nº 46 – pp. 210–228
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

A HEURÍSTICA DE EULER PARA O TEOREMA DOS NÚMEROS PENTAGONAIS

John A. Fossa
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática – UEPB – Brasil

(aceito para publicação em fevereiro de 2023)

Resumo

A presente obra analisa a heurística de Euler para a aceitação do Teorema dos Números Pentagonais, apresenta uma tradução da sua *Evolutio producti infiniti* $(1–x)(1–xx)(1–x^3)(1–x^4)(1–x^5)$ *in seriem simplicem* e ainda inclui uma digitalização do referido artigo euleriano.

Palavras-chave: História da Teoria dos Números, Leonhard Euler, Teorema dos Números Pentagonais.

[EULER'S HEURISTIC FOR THE PENTAGONAL NUMBER THEOREM]

Abstract

The present work analyses Euler's heuristic for accepting the Pentagonal Number Theorem, presents a Portuguese translation of his *Evolutio producti infiniti* $(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)$ *in seriem simplicem* and includes a digitalization of the aforementioned article.

Keywords: History of Number Theory, Leonhard Euler, Pentagonal Number Theorem.

1. Introdução

Por volta de 1740, Leonhard Euler (1707–1783) começou a investigar dois produtos infinitos, a saber, $\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)$ e o dos recíprocos dos fatores deste, relacionados com as partições de inteiros e somas de divisores (ver, por exemplo, BELL (2010)). Isto o levaria ao seu Teorema dos Números Pentagonais,

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\,x^{\frac{3nn\pm n}{2}},$$

incorporando sua expansão, em EULER (1780a), do conceito dos números pentagonais (ver FOSSA (2019). Uma demonstração do teorema é dado em EULER (1760). Nosso intresse no presente artigo, porém, será centrado em EULER (1780b) que contém a heurística de Euler para a aceitação do Teorema. Isto é, na referida obra, ele nos conduz atravez do raciocínio que o levou à aceitação do mesmo.

Euler faz duas abordagens distintas, embora claramente relacionadas, por começar a expandir o produto infinito em uma série de potências e examinar seus termos iniciais. Visto que uma série de potências toma a forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x^{e_n}$, será necessário determinar os coeficientes, a_n e os expoentes, e^n. É claro, no entanto, que $a_n=1$ ou $a_n=-1$ e, portanto, basta determinar o sinal. O caso dos expoentes é mais complicado, pois cada *n* gera, como veremos, dois termos. Isto leva o teorema a ser escrito, hoje em dia, como $\sum_{-\infty}^{\infty} t_n$. Tal representação, contudo, não coaduna com o raciocínio de Euler e, assim, preferimos escrever os expoentes como no parágrafo anterior, onde os dois termos são indicados pelo ± no expoente.

2. A Primeira Abordagem

A meta da primeira abordagem é chegar á tabela do §8. Para tanto, seja

$$s=\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n).$$

Então, podemos esquematizar o pensamento de Euler da seguinte maneira:

1. $(1-x)(1-x^2)=1-x-x^2+x^3=1-x-x^2(1-x)$
2. $$\begin{aligned}(1-x)(1-x^2)(1-x^3)&=1-x-x^2+x^3-x^3+x^4+x^5-x^6\\ &\quad 1-x-x^2(1-x)-x^3(1-x)(1-x^2)\end{aligned}$$
3. $$\begin{aligned}(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)&=1-x-x^2+x^3-x^3+x^4+x^5-x^6\\ &\qquad -x^4+x^5+x^6-x^7+x^7-x^8-x^9+x^{10}\\ &\quad 1-x-x^2(1-x)-x^3(1-x)(1-x^2)\\ &\qquad -x^4(1-x-x^2+x^3-x^3+x^4+x^5-x^6)\\ &\qquad 1-x-x^2(1-x)-x^3(1-x)(1-x^2)\\ &\quad -x^4(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\end{aligned}$$

4. $s = 1 - x - x^2(1-x) - x^3(1-x)(1-x^2) - x^4(1-x)(1-x^2)(1-x^3) - \cdots$

5. $A = x^2(1-x) + x^3(1-x)(1-x^2) + x^4(1-x)(1-x^2)(1-x^3) + \cdots$

6. $(1-x)\left[x^2 + x^3(1-x^2) + x^4(1-x^2)(1-x^3) + \cdots\right]$

7. $x^2 + x^3(1-x^2) + x^4(1-x^2)(1-x^3) + \cdots$
$- x^3 - x^4(1-x^2) - x^5(1-x^2)(1-x^3) - \cdots$

8. $x^2 + x^3(1-x^2-1) + x^4(1-x^2)(1-x^3-1) + \cdots$

9. $x^2 + x^3(-x^2) + x^4(1-x^2)(-x^3) + \cdots$

10. $x^2 - x^5 - x^7(1-x^2) - \cdots$

As primeiras três linhas mostram como o produto infinito *s* é transformado na expressão dada na linha 4. Assim, dado a referida expressão, ele põe *s* = 1–*x*–A, o que nos dá a expressão da linha 5. Na linha 6, 1–*x* é posto em evidencia e, em seguida, a parte dentro dos colchetes é multiplicado por 1, resultando na parte superior de linha 7, e por –*x*, resultando na parte inferior de linha 7. Em seguida coleciona os termos com as mesmas potências de *x* (linha 8), pondo em evidencia as partes iguais e simplifica o resultado (linha 9). Na última linha multiplica as duas potências simples. Segue definindo B pela equação $A = x^2 - x^5 - B$, ou seja, $B = x^7$. O processo se repete e são definidos, em sequência, C, D e E.

Agora, para obter a tabela em §8, Euler analiza a procedência do expoente 7 na expressão para B. Vemos, dos termos encaixados nas linhas 9 e 10 acima, que 7 = 3+4. Por sua vez, o expoente 4 originou da multiplicação de *x* e x^3, conforme mostra os termos encaixados na linha 6. Assim, temos 7 = 3+4 = 3+(1+3). Na mesma linha 6 temos $x \times x^2$, mas, seguindo a lógica do raciocínio, isto nos daria 7 = (1+2)+(1+3), em vez de 7 = 3+4 = 3+[1+(1+2)]. Esse resultado, é claro, pode ser remanejado para nos dar 7 = 3+1+1+2, mas o resto da tabela sugere que isto não seria o procedimento correto, pois a pergunta deveria ser o seguinte: na expressão 7 = 3+(1+**3**) o que é a procedência do 3 em negrito? A origem desse 3, no entanto, se acha na linha 2, onde os termos encaixados mostra que é $1 \times x^3$, o que nos daria 7 = 3+4 = 3+[1+(0+3)]. Isto, contudo, não coaduna com o padrão estabelecido no resto da tabela. Desta forma, ao adotar **3** = 1+2, parece ter um pequeno elemento de arbitrariedade na tabela.

Observamos que o processo de calcular os valores para as letras A, B, C, D e E estabelece o segmento inicial da série de potências procurada:

$$s = 1 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + x^{51} + f(x),$$

onde os expoentes dos termos de *f*(*x*) são maiores de 51. Mas, descontando o primeiro termo (1), os expoentes de cada segundo termo (2, 7, 15, 26, 40) são dados na última coluna da tabela exposta em §8. Assim, como é explicado em §9, temos

$e_{2n} = \dfrac{3\,nn + n}{2}$

onde e_{2n} é o exponente do 2*n*-ésimo termo, descontando o termo inicial, com *n* variando de 1 a 5. Finalmente, observa que $e_{2n} - e_{2n-1} = n$ e, portanto,

$$e_{2n-1} = \frac{3\,nn + n}{2} - n = \frac{3\,nn - n}{2}.$$

Espera-se que o mesmo padrão valerá para todo *n*. Como uma pequena verificação, observamos que, para *n* = 6, obtemos $e_{11} = 51$, o que é que consta no segmento inicial para *s*.

3. A Segunda Abordagem

Na segunda metade do seu artigo, Euler recomeça e faz uma segunda abordagem do mesmo problema. Isto pode ser devido à pequena arbitrariedade contida na primeira abordagem, ou meramente porque a segunda abordagem é ligeiramente mais simples. Começa com a mesma fórmula para *s* que foi usada em §1, a saber,

$$s = 1 - x - xx(1-x) - x^3(1-x)(1-xx) - x^4(1-x)(1-xx)(1-x^3) - \text{etc.},$$

mas agora, desenvolve logo o terceiro termo, obtendo

$$s = 1 - x - xx + x^3 - x^3(1-x)(1-xx) - x^4(1-x)(1-xx)(1-x^3) - \text{etc.}$$

Em seguida, faz *s* = 1–*x*–*xx*+A. Disto, temos que

$$A = x^3 - x^3(1-x)(1-xx) - x^4(1-x)(1-xx)(1-x^3) - \text{etc.}$$

Agora todos os termos de A, exceto o primeiro, são desenvolvidos pela multiplicação por 1–*x* e o resultado é simplificado, dando-nos

$$A = +x^5 + x^7(1-xx) + x^9(1-xx)(1-x^3) + x^{11}(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) + \text{¿ etc.}$$

O processo é repetido para achar expressões para B, C, D, E, onde, é claro, os valores para as letras não são as mesmas dos da primeira abordagem.

Para ver o raciocínio de Euler, será perspícuo colecionar os resultados da seguinte maneira:

$s = 1 - x^1 - x^2 + A$	$A = x^3 - p_A$	3–1 = 2 e 2–1 = 1
$A = x^5 + x^7 - B$	$B = x^9 - p_B$	9–2 = 7 e 7–2 = 5
$B = x^{12} + x^{15} - C$	$C = x^{18} - p_C$	18–3 = 15 e 15–3 = 12
$C = x^{22} + x^{26} - D$	$D = x^{30} - p_D$	30–4 = 26 e 26–4 = 22
$D = x^{35} + x^{40} - E$	$E = x^{45} - p_E$	45–5 = 40 e 40–5 = 35

Nas expressões para as letras na segunda coluna, os polinômios p_A, *etc*., não nos interessa. Os expoentes para o primeiro termo de cada uma destas expressões nos dão a sequência (finita) (3, 9, 18, 30, 45), o que é equivalente a 3(1, 3, 6, 10, 15). Mas, (1, 3, 6, 10, 15) é um segmento inicial da sequência dos números triangulares e, portanto, os referidos expoentes são três vezes um número triangular. Projetando o padrão para a infinidade, obtemos

$$c_n = 3\left(\frac{n^2+n}{2}\right) = \frac{3n^2+3n}{2},$$

onde c_n é o expoente do primeiro termo da *n*-ésima linha na segunda coluna (continuada para a infinidade).

Finalmente, sejam d_n e e_n (com $d_n < e_n$ e n variando de 1 a 5) os expoentes dos dois termos precedendo as letras nos segundos membros das equações na primeira coluna. Então, a terceira coluna mostra que $e_n = c_n - n$ e $d_n = e_n - n$. Projetando, mais uma vez, o padrão para a infinidade, obtemos

$$e_n = \frac{3n^2+3n}{2} - n = \frac{3n^2+n}{2}$$

e

$$d_n = \frac{3n^2+n}{2} - n = \frac{3n^2-n}{2}.$$

Isto é, claramente, o mesmo resultado obtido na primeira abordagem.

4. Conclusão: A Heurística de Euler

O procedimento de Euler é, de fato, uma demonstração de alguns segmentos iniciais do Teorema dos Números Pentagonais, embora talvez careça de uma prova mais contundente de que os termos restantes só têm potências maiores do que as dos segmentos iniciais (e, portanto, não afetariam os referidos segmentos iniciais). Desta forma, não constitui uma demonstração do Teorema. Mesmo assim, o procedimento é importante para duas razões, sendo o primeiro o *insight* que nos dá sobre a maneira em que Euler pensava sobre séries infinitas.

A segunda razão para a importância do mencionado procedimento é a de que, segundo Euler, ele nos fornece certeza sobre o resultado. Essa certeza é afirmada explicitamente por Euler no § 10. Decerto, não é uma certeza matemática, que só vem com a demonstração. A indução por enumeração, em que consiste o procedimento, no entanto, nos permite a compreender que o padrão mostrado no segmento inicial é generalizável. Talvez seria justo dizer que, enquanto o seu procedimento fornece certeza, a demonstração estabelece essa certeza e, ao fornecer certeza, como Bell (2010) argumenta, o procedimento seja uma fiança de que a procura para uma demonstração não seja um *ignis fatuus*.

Referências

BELL, Jordan. A Summary of Euler's Work on the Pentagonal Number Theorem. *Archive for the History of the Exact Sciences*, v. 64, pp. 301–373, 2010.

Euler, Leonhard. Demonstratio theorematis circa ordinem in summis divisorum observatum. *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, v. 5, pp. 75–83, 1760. Disponível em: http://eulerarchive.maa.org/. Acesso em 26/08/2022.

EULER, Leonhard. De mirabilibus proprietatibus numerorum pentagonalium. *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, pp. 56–75, 1780a. Disponível em: http://eulerarchive.maa.org/. Acesso em 26/08/2022.

EULER, Leonhard. Evolutio producti infiniti $(1–x)(1–xx)(1–x^3)(1–x^4)(1–x^5)$ in seriem simplicem. *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, pp. 56–75. 1780b. Disponível em: http://eulerarchive.maa.org/. Acesso em 26/08/2022.

FOSSA, John A. Os Números Pentagonais de Leonhard Euler. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 18, n. 36, pp. 119–169, 2019.

John A. Fossa

Programa de Pós-Graduação em Encino de Ciências e Educação Matemática – UEPB – Campus de Campina Grande – Brasil

E-mail: jfossa03@gmail.com

5.Tradução

A seguir apresentamos uma tradução de Euler (1780b) a partir da publicação original nos *Acta*. Emendas são feitas entre colchetes e, em especial, o leitor deve ficar atento ao fato de que colchetes numa fórmula não funcionam como indicador de agrupamento, mas indicador de emendas.

Logo após da tradução, apresentamos o texto do original digitado a partir dos referidos *Acta*. Mantemos a ortografia do original e indicamos, por colchetes, lugares em que o texto é ilegível ou de difícil leitura.

Desenvolvimento do Produto Infinito

$$(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6) \textbf{ [etc.]}$$

numa Série Simples

Autor
L. Euler

Tradução de John A. Fossa

§. 1.

Seja $s=(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)$ etc. Facilmente se vê que isto é:

$$s=1-x-xx(1-x)-x^3(1-x)(1-xx)-x^4(1-x) \text{ etc.}$$

Visto que essa série é infinita, pede-se qual série de potências simples de x será obtida se cada um dos seus termos for desenvolvido. Ainda mais, desde que os primeiros dois termos, $1-x$, já são desenvolvidos, põe-se A no lugar de todos os outros, de tal forma que tenhamos $s=1-x-A$ e, portanto,

$$A=xx(1-x)+x^3(1-x)(1-xx)+x^4(1-x)(1-xx)(1-x^3) \text{ etc.}$$

§. 2. Visto que todos esses termos têm o fator comum $1–x$, cada termo, ao ser desenvolvido por este, será quebrado em duas partes, as quais podemos representar da seguinte forma:

$$A=xx+x^3(1-xx)+x^4(1-xx)(1-x^3)+x^5(1-xx)(1-x^3)(1-x^4) \text{ etc.]}$$
$$-x^3-x^4(1-xx)-x^5(1-xx)(1-x^3)-x^6(1-xx)(1-x^3)(1-x^4) \text{ etc.]}$$

A partir disto, as duas partes afetadas pelas mesmas potências de x são colecionadas num só termo, o que resulta na seguinte forma para A:

$$A=xx-x^5-x^7(1-xx)-x^9(1-xx)(1-x^3)$$

$$- x^{11}(1-xx)(1-x^3)(1-x^4) - \text{etc.},$$

onde os primeiros dois termos $xx - x^5$ já estão desenvolvidos; além disto, os seguintes termos avançam através das potências x^7, x^9, x^{11}, x^{13}, x^{15}, cujos expoentes crescem por dois.

§. 3. Agora colocamos, de modo semelhante como antes,

$$A = xx - x^5 - B, \text{ de tal forma que}$$

$$B = x^7(1-xx) + x^9(1-xx)(1-x^3) \\ + x^{11}(1-xx)(1-x^3)(1-x^4) + \text{ etc.},$$

cada termo do qual contém o termo comum 1–xx. Ao desenvolver isto, cada termo é quebrado em duas partes, dando

$$B = x^7 + x^9(1-x^3) + x^{11}(1-x^3)(1-x^4) + x^{13}(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)[+] \text{ etc.} \\ - x^9 - x^{11}(1-x^3) - x^{13}(1-x^3)(1-x^4) - x^{15}(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) \text{ etc.}$$

Novamente, os dois termos que se iniciam com a mesma potência de x são colecionados num só termo, que produz:

$$B = x^7 - x^{12} - x^{15}(1-x^3) - x^{18}(1-x^3)(1-x^4) \\ - x^{21}(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) - \text{etc.},$$

onde agora os expoentes de x crescem por três.

§. 4. Seja agora estipulado que $B = x^7 - x^{12} - C$, de tal forma que temos

$$C = x^{15}(1-x^3) + x^{18}(1-x^3)(1-x^4) + x^{21}(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) + \text{ etc.}$$

Agora cada termo é resolvido em duas partes pelo desenvolvimento do fator $1 - x^3$ e obtemos:

$$C = x^{15} + x^{18}(1-x^4) + x^{21}(1-x^4)(1-x^5) + x^{24}(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6) \text{ etc.]} \\ - x^{18} - x^{21}(1-x^4) - x^{24}(1-x^4)(1-x^5) - x^{27}(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6) \text{ etc.},$$

de que, ao colecionar mais uma vez os membros que têm a mesma potência de x inicial, será gerado

$$C = x^{15} - x^{22} - x^{26}(1-x^4) - x^{30}(1-x^4)(1-x^5) \\ - x^{34}(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6) \text{ etc.}$$

onde os expoentes iniciais crescem por quatro.

§. 5. Seja estipulado que $C = x^{15} - x^{22} - D$, fazendo com que

$$D = x^{26}(1-x^4) + x^{30}(1-x^4)(1-x^5) + x^{34}(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6) \text{ etc.},$$

cujos termos são quebrados em dois pelo desenvolvimento do fator $1-x^4$ da seguinte forma:

$$D=x^{26}+x^{30}(1-x^5)+x^{34}(1-x^5)(1-x^6)+x^{38}(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)\text{[+ etc.]}$$
$$-x^{30}-x^{34}(1-x^5)-x^{38}(1-x^5)(1-x^6)-x^{42}(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)\text{ etc.}$$

Agora, por colecionar, de forma dois a dois, o que temos até agora, obtemos

$$D=x^{26}-x^{35}-x^{40}(1-x^5)-x^{45}(1-x^5)(1-x^6)$$
$$-x^{50}(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)\text{ etc.}$$

Assim, os expoentes das potências de x crescem por cinco.

§. 6. Seja estipulado que $D=x^{26}-x^{35}-E$, fazendo com que

$$E=x^{40}(1-x^5)+x^{45}(1-x^5)(1-x^6)+x^{50}(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)\text{ etc.}$$

Ainda seguindo nosso procedimento, isto produz, pela resolução em duas partes,

$$E=x^{40}+x^{45}(1-x^6)+x^{50}(1-x^6)(1-x^7)+x^{55}(1-x^6)(1-x^7)(1-x^8)\text{ etc.]}$$
$$-x^{45}-x^{50}(1-x^6)-x^{55}(1-x^6)(1-x^7)-x^{60}(1-x^6)(1-x^7)(1-x^8)\text{ etc.}$$

Ao reduzir os termos dois a dois,[1] obtemos

$$E=x^{40}-x^{51}-x^{57}(1-x^6)-x^{63}(1-x^6)(1-x^7)$$
$$-x^{69}(1-x^6)(1-x^7)(1-x^8)\text{ etc.,}$$

onde os expoentes de x crescem de seis em seis.

§. 7. Como a lei pela qual essas operações podem ser estendidas ainda mais é bastante clara, se substituirmos os últimos valores para cada letra A, B, C, D, na ordem em que foram encontrados, acharemos, para a série procurada, a seguinte forma:

$$S=1-x,-xx+x^5,+x^7-x^{12},-x^{15}+x^{22},+x^{26}-x^{35},-x^{40}+x^{51},\text{ etc.}$$

Assim, a questão inteira é reduzida à determinação da ordem pela qual os expoentes das potências de x continuem crescendo, visto que, das operações já efetuadas, é óbvio que os sinais + e – se alternam de forma reduplicada.

§. 8. Para investigar essa lei, portanto, consideremos, para cada letra, como os referidos números são gerados. Para tanto, tabulamos os primeiros termos dessas letras de acordo com sua forma original[2]:

$A=xx(1-x)$	7 = 3+ 4 = 3+1+ 3 = 3+1+1+ 2
$B=x^7(1-xx)$	15 = 4+11 = 4+2+ 9 = 4+2+2+ 7

[1] Nota do Trad.: Isto é, claramente, ao por os termos comuns em evidência.
[2] Nota do Trad.: Isto é, antes de serem quebradas em duas partes.

$C = x^{15}(1 - x^3)$	26 = 5+21 = 5+3+18 = 5+3+3+15
$D = x^{26}(1 - x^4)$	40 = 6+34 = 6+4+30 = 6+4+4+26
$E = x^{40}(1 - x^5)$	57 = 7+50 = 7+5+45 = 7+5+5+40
etc.	etc.

Vemos claramente, a partir do desenvolvimento da letra A, que o número 7 foi gerado pelo total 3+4 e, ainda mais, que 4 foi gerado por 1+3, enquanto, finalmente, 3 foi gerado por 1+2. Isto dará, portanto, a solução

$$7 = 3+4 = 3+1+3 = 3+1+1+2.$$

Mas, a mesma ordem é observada nas letras restantes, nas quais os últimos números que aparecem são, em ordem, 2, 7, 15, 26, 40.

§. 9. A partir destes, já é óbvio que as diferenças dos números 2, 7, 15, 26, 40, 57, etc. constituem uma progressão aritmética, cujo termo geral será

$$2+5(n-1)+\frac{3(n-1)(n-2)}{1 \bullet 2}=\frac{3nn+n}{2}.$$

Ainda mais, os expoentes que antecedem estes eram 1, 5, 12, 22, 35, 51, que distam[3] destes pelos números 1, 2, 3, 4, 5 e, em geral, pelo próprio número n; desta forma, o expoente que precede $\frac{3nn+n}{2}$ deverá ser $\frac{3nn-n}{2}$.

§. 10. Agora conhecemos completamente a série simples procurada, que é igual ao produto infinito proposto.

$$(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4) \text{ etc.}$$

Pois, visto que foi a seguinte série que foi descoberta:

$$s = 1 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + x^{51} + \text{ etc.},$$

temos certeza que nenhuma potência de x nela ocorrerá, exceto as cujos expoentes são contidos na fórmula geral $\frac{3nn \pm n}{2}$; além disso, a série será constituída de tal forma de que, se n for um número ímpar, os dois termos gerados por esse n terão o sinal –, enquanto os gerados por números pares terão o sinal +.

Outra Investigação da Mesma Série

§. 11. A mesma série pode ser investigada, em relação ao crescimento das potências de x, na seguinte maneira. Visto que temos

$$s = 1 - x - xx(1-x) - x^3(1-x)(1-xx) - x^4(1-x)(1-xx)(1-x^3) \text{ etc.},$$

[3] Nota do Trad.: No sentido da diferença, ou seja, subtração.

ao desenvolver isto em relação ao segundo membro $-xx(1-x)$, obtemos

$$s=1-x-xx+x^3-x^3(1-x)(1-xx)-x^4(1-x)(1-xx)(1-x^3)\text{ etc.}$$

e, estipulando que $s=1-x-xx+A$, obtemos

$$A=x^3-x^3(1-x)(1-xx)-x^4(1-x)(1-xx)(1-x^3)-\text{ etc.}$$

Cada membro disto é quebrado em duas partes pelo desenvolvimento do fator $1-x$, o que produz

$$A=x^3-x^3(1-xx)-x^4(1-xx)(1-x^3)-x^5(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\text{ etc.]}$$
$$+x^4(1-xx)+x^5(1-xx)(1-x^3)+x^6(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\text{ etc.]}$$

Agora, por colecionar os membros, dois a dois, que tenham a mesma potência de x, geraremos

$$A=+x^5+x^7(1-xx)+x^9(1-xx)(1-x^3)+x^{11}(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\text{ etc.}$$

§. 12. Agora, ao desenvolver novamente o segundo membro, geraremos

$$A=x^5+x^7-x^9+x^9(1-xx)(1-x^3)+x^{11}(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\text{ etc.}$$

Pondo agora $A=x^5+x^7-B$, temos

$$B=x^9-x^9(1-xx)(1-x^3)-x^{11}(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\text{ etc.}$$

Assim, se desenvolvermos todos pelo fator $1-xx$, obteremos

$$B=x^9-x^9(1-x^3)-x^{11}(1-x^3)(1-x^4)-x^{13}(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)\text{ etc.]}$$
$$+x^{11}(1-x^3)+x^{13}(1-x^3)(1-x^4)+x^{15}(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)\text{ etc.]}$$

Finalmente, ao colecionar os membros dois a dois, se gera

$$B=x^{12}+x^{15}(1-x^3)+x^{18}(1-x^3)(1-x^4)+x^{21}(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)\text{ etc.}$$

§. 13. Da mesma forma, desenvolvendo o segundo membro e estipulando que $B=x^{12}+x^{15}-C$, teremos

$$C=x^{18}-x^{18}(1-x^3)(1-x^4)-x^{21}(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)-\text{ etc.}$$

Agora os termos são desenvolvidos em relação ao fator $(1-x^3)$, fazendo com que

$$C=x^{18}-x^{18}(1-x^4)-x^{21}(1-x^4)(1-x^5)-x^{24}(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)\text{ etc.]}$$
$$+x^{21}(1-x^4)+x^{24}(1-x^4)(1-x^5)+x^{27}(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)\text{ etc.]}$$

Aqui colecionamos os membros dois a dois, obtendo

$$C=x^{22}+x^{26}(1-x^4)+x^{30}(1-x^4)(1-x^5)+x^{34}(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)\text{ etc.}$$

§. 14. Agora desenvolvendo isto novamente em relação ao segundo membro e estipulando que $C = x^{22} + x^{26} - D$, teremos

$$D = x^{30} - x^{30}(1 - x^4)(1 - x^5) - x^{34}(1 - x^4)(1 - x^5)(1 - x^6) \text{ etc.}$$

Quando desenvolvemos o fator $1 - x^4$, produzimos

$$D = x^{30} - x^{30}(1 - x^5) - x^{34}(1 - x^5)(1 - x^6) - x^{38}(1 - x^5)(1 - x^6)(1 - x^7) \text{ etc.]}$$
$$+ x^{34}(1 - x^5) + x^{38}(1 - x^5)(1 - x^6) + x^{42}(1 - x^5)(1 - x^6)(1 - x^7) \text{ etc.]}$$

Aqui os membros são colecionados dois a dois, fazendo com que

$$D = x^{35} + x^{40}(1 - x^5) + \text{ etc.]}$$ [4]

§. 15. Desenvolvendo o segundo membro novamente e estipulando que $D = x^{35} + x^{40} - E$, obteremos

$$E = x^{45} - x^{45}(1 - x^5)(1 - x^6) - x^{50}(1 - x^5)(1 - x^6)(1 - x^7) \text{ etc.}$$

e, desenvolvendo em relação do fator $1 - x^5$, teremos

$$E = x^{45} - x^{45}(1 - x^6) - x^{50}(1 - x^6)(1 - x^7) - x^{55}(1 - x^6)(1 - x^7)(1 - x^8) \text{ etc.]}$$
$$+ x^{50}(1 - x^6) + x^{55}(1 - x^6)(1 - x^7) + x^{60}(1 - x^6)(1 - x^7)(1 - x^8) \text{ etc.}$$

Ao colecionar os termos dois a dois, surge

$$E = x^{51} + x^{57}(1 - x^6) + x^{63}(1 - x^6)(1 - x^7) + x^{69}(1 - x^6)(1 - x^7)(1 - x^8) \text{ etc.}$$

§. 16. Visto, portanto, que esses valores foram achados para as letras A, B, C, D, e, se forem substituídos sucessivamente, o resultado será a seguinte série:

$$1 - x - xx, + x^5 + x^7, - x^{12} - x^{15}, + x^{22} + x^{26}, - x^{35} - x^{40}, + \text{ etc.}$$

Aqui, porém, a ordem dos expoentes é facilmente percebida. Pois, visto que os primeiros termos simples dos valores para as letras A, B, C, D, eram primeiramente[5] $x^3, x^9, x^{18}, x^{30}, x^{45}$, é óbvio que os expoentes são números triangulares triplicados e, portanto, em geral, para o número *n*, o expoente será $\frac{3nn + 3n}{2}$. De fato, esses termos seguem, duas potências de *x*, que surgem através da mesma diferença, *n*; desta forma, ao subtrair o número *n* dessa fórmula duas vezes, as duas potências que pertencem à série procurada aparecem e cujos expoentes, conse[quentemente, serão[6]

$$\frac{3nn + n}{2} \; e \; \frac{3nn - n}{2}.$$

[4] Nota do Trad: Texto original borrado e de difícil leitura.
[5] Nota do Trad.: Isto é, antes de serem quebradas em duas partes.
[6] Nota do Trad.: Texto original ilegível.

§. 17. Por sua vez, é claro a partir disto [que a série][7]

$$s = 1 - x - xx + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - \text{etc.},$$

quando prolongado infinitamente, tem infinitos fatores, a saber, $(1 - x)$, $1 - xx$, $1 - x^3$, $1 - x^4$, $1 - x^5$, etc. Assim, se for dividida primeiro por $1 - x$ e então seu quociente por $1 - xx$ e, de novo, este quociente por $1 - x^3$ e, se a divisão for prolongada infinitamente desta maneira, o último quociente resultante deverá ser igual à unidade.

§. 18. Mas, se for proposta a seguinte equação, estendendo-a infinitamente,

$$1 - x - xx + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - etc. = 0,$$

todas as suas raízes poderão ser facilmente determinadas. Pois, a primeira raiz será $x = 1$, em seguida duas raízes quadráticas da unidade, então três raízes cúbicas da unidade, em seguida quatro raízes biquadráticas da unidade e, de forma semelhante cinco raízes quintas da unidade, e assim por diante. Entre essas raízes, portanto, a unidade ocorre um número infinito de vezes; mas também –1 será achado sempre que a raiz é extraída de uma potência par.

[7] Nota do Trad.: Texto original ilegível.

6. Texto original

Evolvtio Prodvcti Infiniti

$$(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)$$

in Seriem Simplicem

Auctore
L. Evlero.

§. 1.

Poſito $s=(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)$ etc. facile patet fore:

$$s=1-x-xx(1-x)-x^3(1-x)(1-xx)-x^4(1-x) \text{ etc.}$$

quae ſeries cum iam ſit infinita, quaeritur, ſi ſinguli eius termini euoluantur, qualis ſeries ſecundum ſimplices poteſtates ipſius x ſit proditura. Cum igitur duo primi termini $1-x$ iam ſint euoluti, loco reliquorum omnium ſcribatur littera A, ita vt ſit $s=1-x-A$, ideoque

$$A=xx(1-x)+x^3(1-x)(1-xx)+x^4(1-x)(1-xx)(1-x^3) \text{ etc.}$$

§. 2. Quoniam hi termini omnes factorem habent communem 1–x, eo euoluto ſinguli termini discerpentur in binas partes quas ita repraeſentemus:

$$\begin{aligned} A=&xx+x^3(1-xx)+x^4(1-xx)(1-x^3)+x^5(1-xx)(1-x^3)(1-x^4) \\ &-x^3-x^4(1-xx)-x^5(1-xx)(1-x^3)-x^6(1-xx)(1-x^3)(1-x^4) \end{aligned}$$

Hinc iam binae partes eadem poteſtate ipſius x affectae in vnam contrahantur, ac reſultabit pro A ſequens forma:

$$\begin{aligned} A=&xx-x^5-x^7(1-xx)-x^9(1-xx)(1-x^3) \\ &-x^{11}(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)-\text{etc.,} \end{aligned}$$

vbi duo termini primi $xx-x^5$ iam ſunt euoluti; ſequentes autem procedunt per has poteſtates: x^7, x^9, x^{11}, x^{13}, x^{15}, quarum exponentes binario creſcunt.

§. 3. Ponamus nunc ſimili modo vt ante

$$A=xx-x^5-B, \text{ ita vt ſit}$$

$$\begin{aligned} B=&+x^7(1-xx)+x^9(1-xx)(1-x^3) \\ &+x^{11}(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)+\text{ etc.} \end{aligned}$$

cuius omnes termini habent factorem communem 1–xx, quo euoluto ſinguli termini in binas partes diſcerpantur, vti ſequitur:

$$B = x^7 + x^9(1 - x^3) + x^{11}(1 - x^3)(1 - x^4) + x^{13}(1 - x^3)(1 - x^4)(1 - x^5) \text{ etc.}$$
$$- x^9 - x^{11}(1 - x^3) - x^{13}(1 - x^3)(1 - x^4) - x^{15}(1 - x^3)(1 - x^4)(1 - x^5) \text{ etc.}$$

Hic iterum bini termini, qui eandem poteſtatem ipſius x habent praefixam, in vnam colligantur et prodibit:

$$B = x^7 - x^{12} - x^{15}(1 - x^3) - x^{18}(1 - x^3)(1 - x^4)$$
$$- x^{21}(1 - x^3)(1 - x^4)(1 - x^5) - \text{etc.},$$

vbi iam poteſtates ipſius x creſcunt ternario.

§. 4. Statuatur nunc porro $B = x^7 - x^{12} - C$, ita vt ſit

$$C = x^{15}(1 - x^3) + x^{18}(1 - x^3)(1 - x^4) + x^{21}(1 - x^3)(1 - x^4)(1 - x^5) + \text{ etc.}$$

et iam ſinguli termini per euolutionem factoris $1 - x^3$ in binas partes reſoluantur, fietque:

$$C = x^{15} + x^{18}(1 - x^4) + x^{21}(1 - x^4)(1 - x^5) + x^{24}(1 - x^4)(1 - x^5)(1 - x^6)$$
$$- x^{18} - x^{21}(1 - x^4) - x^{24}(1 - x^4)(1 - x^5) - x^{27}(1 - x^4)(1 - x^5)(1 - x^6) \text{ etc.},$$

vbi denuo membra, quibus eadem poteſtas ipſius x praefixa, in vnum contracta praebebunt

$$C = x^{15} - x^{22} - x^{26}(1 - x^4) - x^{30}(1 - x^4)(1 - x^5)$$
$$- x^{34}(1 - x^4)(1 - x^5)(1 - x^6) \text{ etc.}$$

vbi poteſtates praefixae quaternario creſcunt.

§. 5. Statuatur $C = x^{15} - x^{22} - D$, vt ſit

$$D = x^{26}(1 - x^4) + x^{30}(1 - x^4)(1 - x^5) + x^{34}(1 - x^4)(1 - x^5)(1 - x^6) \text{ etc.},$$

qui termini per euolutionem factoris $1 - x^4$ in binos diſcerpantur hoc modo:

$$D = x^{26} + x^{30}(1 - x^5) + x^{34}(1 - x^5)(1 - x^6) + x^{38}(1 - x^5)(1 - x^6)(1 - x^7)$$
$$- x^{30} - x^{34}(1 - x^5) - x^{38}(1 - x^5)(1 - x^6) - x^{42}(1 - x^5)(1 - x^6)(1 - x^7) \text{ etc.}$$

Nunc binis vt hactenus contrahendis colligitur

$$D = x^{26} - x^{35} - x^{40}(1 - x^5) - x^{45}(1 - x^5)(1 - x^6)$$
$$- x^{50}(1 - x^5)(1 - x^6)(1 - x^7) \text{ etc.}$$

Hic igitur poteſtates ipſius x quinario creſcunt.

§. 6. Statuatur $D = x^{26} - x^{35} - E$, ita vt ſit

$$E = x^{40}(1 - x^5) + x^{45}(1 - x^5)(1 - x^6) + x^{50}(1 - x^5)(1 - x^6)(1 - x^7) \text{ etc.}$$

ac reſolutione in binas partes vt hactenas inſtituta prodit

$$E = x^{40} + x^{45}(1 - x^6) + x^{50}(1 - x^6)(1 - x^7) + x^{55}(1 - x^6)(1 - x^7)(1 - x^8)$$

$$-x^{45}-x^{50}\left(1-x^{6}\right)-x^{55}\left(1-x^{6}\right)\left(1-x^{7}\right)-x^{60}\left(1-x^{6}\right)\left(1-x^{7}\right)\left(1-x^{8}\right)\text{ etc.}$$

Contractis vero binis terminis in vnum prodibit

$$E=x^{40}-x^{51}-x^{57}\left(1-x^{6}\right)-x^{63}\left(1-x^{6}\right)\left(1-x^{7}\right)$$
$$-x^{69}\left(1-x^{6}\right)\left(1-x^{7}\right)\left(1-x^{8}\right)\text{ etc.,}$$

vbi poteſtates ipſius x ſenario creſcunt.

§. 7. Cum lex, qua iſtae operationes vlterius ſunt continuandae ſatis ſit perſpicua, ſi poſtremi valores pro ſingulis litteris A, B, C, D, inuenti ordine ſubſtituantur, pro ſerie quaeſita reperiemus ſequentem formam:

$$S=1-x\,,-xx+x^{5}\,,+x^{7}-x^{12}\,,-x^{15}+x^{22}\,,+x^{26}-x^{35}\,,-x^{40}+x^{51}\,,\text{ etc.}$$

Hic igitur tota quaeſtio huc reducitur, vt ordo definiatur, quo exponentes poteſtatum ipſius x continuo vlterius augentur, quandoquidem ex operationibus inſtitutis iam ſatis eſt manifeſtum ſigna terminorum + et – ita alternatim ſe excipere, vt ambo geminentur.

§. 8. Quo igitur in hanc legem inquiramos, videamos quomodo in ſingulis litteris iſti numeri ſint orti. Hunc in finem primos ſaltem cuiusque litterae terminos in eius forma prima exhibitos ordine diſponamus

$A=xx\left(1-x\right)$	7 = 3+ 4 = 3+1+ 3 = 3+1+1+ 2
$B=x^{7}\left(1-xx\right)$	15 = 4+11 = 4+2+ 9 = 4+2+2+ 7
$C=x^{15}\left(1-x^{3}\right)$	26 = 5+21 = 5+3+18 = 5+3+3+15
$D=x^{26}\left(1-x^{4}\right)$	40 = 6+34 = 6+4+30 = 6+4+4+26
$E=x^{40}\left(1-x^{5}\right)$	57 = 7+50 = 7+5+45 = 7+5+5+40
etc.	etc.

Hic ſcilicet ex euolutione litterae A vidimus, numerum 7 oriri ex aggregato 3+4, tum vero 4 oriri ex 1+3, ac denique 3 ex 1+2, quae ergo reſolutio dabit

$$7 = 3+4 = 3+1+3 = 3+1+1+2.$$

Atque idem ordo in ſequentibus litteris eſt obſervatus, vbi ultimi numeri procedunt ordine 2, 7, 15, 26, 40.

§. 9. Ex his iam manifeſtum eſt, numerorum 2, 7, 15, 26, 40, 57, etc. differentias progreſſionem arithmeticam conſtituere, vnde horum numerorum terminus generalis erit:

$$2+5\left(n-1\right)+\frac{3\left(n-1\right)\left(n-2\right)}{1\cdot 2}=\frac{3\,nn+n}{2}.$$

Exponentes autem, qui hos antecedunt, erant 1, 5, 12, 22, 35, 51 ab illis numeris 1, 2, 3, 4, 5, et in genere ipſo numero n, ita vt exponens, qui formulam $\frac{3nn+n}{2}$ praecedit, futurus ſit $\frac{3nn-n}{2}$.

§. 10. Nunc igitur ſeriem ſimplicem inuentam quae aequalis eſt producto infinito propoſito

$$(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4) \text{ etc.}$$

perfecte cognoſcimus. Cum enim haec ſeries inuenta ſit:

$$s=1-x^1-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+x^{51}+ \text{ etc.},$$

certi nunc ſumus, in ea alias poteſtates ipſius x non occurrere, niſi quarum exponentes contineantur in hac formula generali: $\frac{3nn\pm n}{2}$, et quidem ita, vt ſi n fuerit numerus impar, bini termini inde nati habituri ſint ſignum –, qui autem ex paribus oriuntur ſignum +.

Alia inueſtigatio eiusdem ſeriei.

§. 11. Eadem ſeries ſecundum poteſtates ipſius x procedens etiam ſequenti modo inueſtigari poteſt. Cum ſcilicet ſit

$$s=1-x-xx(1-x)-x^3(1-x)(1-xx)-x^4(1-x)(1-xx)(1-x^3) \text{ etc.},$$

euoluatur ſtatim ſecundum membrum $-xx(1-x)$, vt fiat

$$s=1-x-xx+x^3-x^3(1-x)(1-xx)-x^4(1-x)(1-xx)(1-x^3) \text{ etc.}$$

ac ſtatuatur $s=1-x-xx+A$ vt ſit

$$A=x^3-x^3(1-x)(1-xx)-x^4(1-x)(1-xx)(1-x^3)- \text{ etc.}$$

cuius ſingula membra per euolutionem factoris $1-x$ in duas partes diſcerpantur, vt prodeat

$$\begin{aligned}A=x^3-x^3(1-xx)-x^4(1-xx)(1-x^3)-x^5(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\\+x^4(1-xx)+x^5(1-xx)(1-x^3)+x^6(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4).\end{aligned}$$

Hic iterum bina membra eadem poteſtate ipſius x affecta contracta praebebunt:

$$A=+x^5+x^7(1-xx)+x^9(1-xx)(1-x^3)+x^{11}(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) \text{ etc.}$$

§. 12. Hic nunc iterum ſecundum membrum euoluatur, vt prodeat:

$$A=x^5+x^7-x^9+x^9(1-xx)(1-x^3)+x^{11}(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) \text{ etc.}$$

Iam ponatur $A=x^5+x^7-B$, vt fit

$$B = x^9 - x^9(1-xx)(1-x^3) - x^{11}(1-xx)(1-x^3)(1-x^4) \text{ etc.}$$

quare ſi vbique factor $1 - xx$ euoluatur, obtinebitur

$$B = x^9 - x^9(1-x^3) - x^{11}(1-x^3)(1-x^4) - x^{13}(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)$$
$$+x^{11}(1-x^3) + x^{13}(1-x^3)(1-x^4) + x^{15}(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)$$

tum vero contrahendis binis membris orietur

$$B = x^{12} + x^{15}(1-x^3) + x^{18}(1-x^3)(1-x^4) + x^{21}(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) \text{ etc.}$$

§. 13. Euoluatur pariter ſecundum membrum ac ſtatuatur $B = x^{12} + x^{15} - C$, eritque

$$C = x^{18} - x^{18}(1-x^3)(1-x^4) - x^{21}(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) - \text{ etc.}$$

Nunc termini euoluantur ſecundum factorem $(1-x^3)$, fietque

$$C = x^{18} - x^{18}(1-x^4) - x^{21}(1-x^4)(1-x^5) - x^{24}(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)$$
$$+x^{21}(1-x^4) + x^{24}(1-x^4)(1-x^5) + x^{27}(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)$$

Hinc binis membris contrahendis fiet

$$C = x^{22} + x^{26}(1-x^4) + x^{30}(1-x^4)(1-x^5) + x^{34}(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6) \text{ etc.}$$

§. 14. Euoluto nunc hic iterum ſecundo membro ſtatuatur $C = x^{22} + x^{26} - D$, eritque

$$D = x^{30} - x^{30}(1-x^4)(1-x^5) - x^{34}(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6) \text{ etc.}$$

vbi euolutio factoris $1 - x^4$ producet

$$D = x^{30} - x^{30}(1-x^5) - x^{34}(1-x^5)(1-x^6) - x^{38}(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)$$
$$+x^{34}(1-x^5) + x^{38}(1-x^5)(1-x^6) + x^{42}(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)$$

Hinc binis membris contractis fiet:

$$D = x^{35} + x^{40}(1-x^5) + \text{ etc.}]$$[8]

§. 15. Euoluto ſecundo membro ſtatuatur denuo $D = x^{35} + x^{40} - E$, eritque

$$E = x^{45} - x^{45}(1-x^5)(1-x^6) - x^{50}(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7) \text{ etc.}$$

et euoluto factore ſecundo $1 - x^5$ fiet

$$E = x^{45} - x^{45}(1-x^6) - x^{50}(1-x^6)(1-x^7) - x^{55}(1-x^6)(1-x^7)(1-x^8)$$
$$+x^{50}(1-x^6) + x^{55}(1-x^6)(1-x^7) + x^{60}(1-x^6)(1-x^7)(1-x^8) \text{ etc.}$$

[8] Nota do Trad.: Texto borrado e de difícil leitura.

binisque terminis collectis elicitur

$$E = x^{51} + x^{57}\left(1 - x^{6}\right) + x^{63}\left(1 - x^{6}\right)\left(1 - x^{7}\right) + x^{69}\left(1 - x^{6}\right)\left(1 - x^{7}\right)\left(1 - x^{8}\right) \text{ etc.}$$

§. 16. Inuentis igitur his valoribus litterarum A, B, C, D, E, ſi ſinguli ſucceſſiue ſubſtituantur, reſultabit iſta ſeries:

$$1 - x - xx, + x^{5} + x^{7}, - x^{12} - x^{15}, + x^{22} + x^{26}, - x^{35} - x^{40}, + \text{ etc.}$$

Hic autem ordo exponentium facilius perſpicitur. Cum enim in valoribus litterarum A, B, C, D, primo conſtitutis primi termini ſimplices eſſent $x^{3}, x^{9}, x^{18}, x^{30}, x^{45}$, exponentes manifeſto ſunt numeri trigonales, triplicati, vnde generatim pro numero *n* erit iſte exponens $\frac{3nn + 3n}{2}$. Verum hi termini ſequuntur binas poteſtates ipſius x procedentes per eandem differentium n, vnde numerum n ab hac formula bis ſubtrahendo orientur binae poteſtates in ſeriem quaeſitam ingredientes, quarum exponentes conſe[

$$e\,\frac{3nn - n}{2}.$$

§. 17. Hinc igitur viciſſim pat[ ][9]

$$s = 1 - x - xx + x^{5} + x^{7} - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - \text{etc.},$$

in infinitum continuatam habere infinitos factores, qui ſcilicet erunt $\left(1 - x\right), 1 - xx, 1 - x^{3}, 1 - x^{4}, 1 - x^{5}$, etc. ita vt ſi primo diuidatur per $1 - x$, tum vero quotus per $1 - xx$, iſte quotus porro per $1 - x^{3}$, hocque modo in infinitum diuiſio continuetur, vltimum quotum reſultantem vnitati aequalem eſſe oportebit.

§. 18. Quod ſi ergo propoſita fuerit iſta aequatio in infinitum excurrens:

$$1 - x - xx + x^{5} + x^{7} - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - etc. = 0,$$

eius omnes radices facile aſſignari poſſunt. Primum enim radix erit x = 1, deinde binae radices quadratae ex vnitate, tum vero ternae radices cubicae ex vnitate, porro quaternae radices biquadratae ex vnitate, ſimilique modo quinae radices poteſtatis quintae ex vnitate, et ita porro, inter quas igitur ipſa vnitas infinities occurrit; at vero –1 ibi reperietur, vbi radix poteſtatis paris eſt extrahenda.[10]

[9] Nota do Trad.: Texto ilegível.

[10] Agradeço a um revisor da Revista por suas valiosas sugestões.