Traduções
Edição Especial da Revista Brasileira de História da Matemática – Vol. 23, nº 46 – pp. 194–209
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

INTRODUÇÃO À ANÁLISE DOS INFINITOS, DE L. EULER – CAPÍTULO 7 (TRADUÇÃO)

Frederico J. A. Lopes
Universidade Federal de Mato Grosso – UFMT – Brasil

(aceito para publicação em abril de 2023)

Resumo

Esta é uma tradução do capítulo 7 da *Introdução à Análise dos Infinitos* (1748), de L. Euler (1707–1783), em que ele introduz, pela primeira vez na obra, quantidades infinitamente pequenas (infinitésimos) e infinitamente grandes.

Palavras-chave: infinitésimos, infinitos, Euler.

[INTRODUCTION TO THE ANALYSIS OF THE INFINITES, BY L. EULER – CHAPTER 07 (TRANSLATION)]

Abstract

This is a translation of chapter 7 of *Introduction to the Analysis of the Infinites (1748)*, by L. Euler (1707–1783), in which he introduces, for the first time in the book, infinitely small (infinitesimals) and infinitely big quantitites.

Keywords: infinitesimals, infinite, Euler.

1. Introdução

Leitoras e leitores da *Introdução à Análise dos Infinitos* terão que esperar até o capítulo 7 para verem, afinal, o que são os tais infinitos anunciados pelo título da obra. Mas a espera valerá a pena: ali encontrarão, no coração do livro, talvez a mais interessante e flexível utilização dos infinitamente pequenos (infinitésimos) e dos infinitamente grandes (infinitos) para encontrar uma profusão de resultados que conhecemos apenas depois de alguns semestres de Cálculo nas universidades.

A *Introdução à Análise dos Infinitos* é um "pré-cálculo" avançado com infinitésimos e infinitos, relacionados como inversos pela equação $\omega = \frac{1}{i}$, em que ω é um número infinitamente pequeno e *i* um número infinitamente grande. Por trás dessa relação aparentemente trivial, percebemos a introdução de uma novidade: a análise matemática corrente nos informa que o limite de $\frac{1}{x}$ quando *x* tende ao infinito é zero, e não *ω*, como nos diz Euler. Com isso, ele legitima, pelo menos formalmente, o uso dos infinitésimos.

É com essa ferramenta simples, que usa o *infinito atual (ou real)*, e não o *infinito potencial* da formulação *ε–δ*, que Euler vai encontrar (sem o uso de derivadas) as séries de McLaurin de a^x e e^x e daí o valor de *e* (notação que ele introduz) com 23 casas decimais corretas. Deduzirá também as séries de $ln(1+x)$ e $ln(1-x)$ e outras de rápida convergência para calcular logaritmos naturais, também chamados de *hiperbólicos*. Por fim, Euler nos apresenta a fórmula $e^z = \left(1+\frac{z}{i}\right)^i$, que hoje escrevemos $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, e que será usada no capítulo seguinte para relacionar as séries de seno e cosseno.

Convidamos aqui a leitora e o leitor a se impressionarem com a ousadia conceitual e manipulativa de Euler, balizada por um conhecimento gigantesco e uma intuição profunda, e perceberem como o ensino de matemática atual, principalmente o de nível superior, ainda pode se beneficiar muito de seus escritos.

Bibliografia

EULER, Leonhard. *Introductio in Analysin Infinitorum. Tomus primus.* Lausanne: Marcus-Michaelis Bousquet et socii, 1748.

Frederico José Andries Lopes
Departamento de Matemática – UFMT – *Campus* de Cuiabá – Brasil

E-mail: contato@fredlopes.com.br

2. Tradução

Introdução à Análise dos Infinitos

CAPÍTULO VII.

Do desenvolvimento em séries de quantidades exponenciais e Logarítmicas

114. Porque é $a^0 = 1$ e, quando o expoente de a cresce, o valor da Potência aumenta simultaneamente, sendo a é um número maior do que a unidade, segue que, se o Expoente excede zero infinitamente pouco, também a própria Potência vai exceder a unidade infinitamente pouco. Seja ω um número infinitamente pequeno, ou uma Fração tão exígua que só não seja igual a nada, e será $a^{\omega} = 1 + \psi$, sendo ψ também um número infinitamente pequeno. Do capítulo anterior, consta que se ψ não fosse um número infinitamente pequeno, também ω não o poderia ser. Portanto, será $\psi = \omega$ ou $\psi > \omega$ou $\psi < \omega$, uma relação que, em todo caso, dependerá de quantidade da letra a. Como ela ainda é desconhecida, seja $\psi = k\omega$, tal que seja $a^{\omega} = 1 + k\omega$ e, tomada a como uma base de Logaritmos, será $\omega = l\left(1 + k\omega\right)$.

EXEMPLO.

Para que fique mais claro como o número k depende da base a, façamos $a = 10$ e, com tábuas comuns, procuremos o Logaritmo de um número que supere minimamente a unidade. Considere $1 + \frac{1}{1000000}$ tal que seja $k\omega = \frac{1}{1000000}$, e será $l\left(1 + \frac{1}{1000000}\right) = l\left(\frac{1000001}{1000000}\right) = 0{,}00000043429 = \omega$. Daqui, porque $k\omega = 0{,}00000100000$, será $\frac{1}{k} = \frac{43429}{100000}$ e $k = \frac{100000}{43429} = 2{,}30258$, de onde fica claro que k é um número finito que depende do valor da base a. Pois se é posto outro número como base a, então o Logaritmo deste mesmo número $1 + k\omega$ terá uma razão dada com o anterior, de onde ao mesmo tempo um outro valor da letra k surgirá.

115. Sendo $a^{\omega} = 1 + k\omega$, será $a^{i\omega} = \left(1 + k\omega\right)^i$ para qualquer número que se substitua no lugar de i. Portanto, será $a^{i\omega} = 1 + \frac{i}{1} k\omega + \frac{i\left(i-1\right)}{1.2} k^2 \omega^2 + \frac{i\left(i-1\right)\left(i-2\right)}{1.2\,.3} k^3 \omega^3 + etc.$ Daí, se é feito $i = \frac{z}{\omega}$, e z denota um número qualquer finito, com ω um número infinitamente pequeno, i se torna um número infinitamente grande, e daqui $\omega = \frac{z}{i}$, tal que ω seja uma Fração com o denominador infinito e, assim, infinitamente pequena, tal como foi tomada. Substitua-se, portanto, $\frac{z}{i}$ no lugar de ω e será $a^z = \left(1 + \frac{kz}{i}\right)^i = 1 + \frac{1}{1} kz + \frac{1\left(i-1\right)}{1.2\,i} k^2 z^2 + \frac{1\left(i-1\right)\left(i-2\right)}{1.2\,i\,.3\,i} k^3 z^3 + \frac{1\left(i-1\right)\left(i-2\right)\left(i-3\right)}{1.2\,i\,.3\,i\,.4\,i} k^4 z^4 + etc.$, e-quação que será verdadeira se i é substituído por um número infinitamente grande. E então k é um número definido dependente de a, como já vimos.

116. Mas como i é um número infinitamente grande, será $\frac{i-1}{i}=1$, pois fica claro que, quanto maior é o número substituído no lugar de i, mais próximo se aproxima da unidade o valor da Fração $\frac{i-1}{i}$ e, daqui, se i é um número maior do que tudo assignável, também a Fração $\frac{i-1}{i}$ se igualará à própria unidade. E por uma razão semelhante, será $\frac{i-2}{i}=1$, $\frac{i-3}{i}=1$ e assim por diante. Daqui, segue que será $\frac{i-1}{2i}=\frac{1}{2}$, $\frac{i-2}{3i}=\frac{1}{3}$, $\frac{i-3}{4i}=\frac{1}{4}$ e assim por diante. Portanto, com esses valores substituídos, será $a^z=1+\frac{kz}{1}+\frac{k^2z^2}{1.2}+\frac{k^3z^3}{1.2.3}+\frac{k^4z^4}{1.2.3.4}+etc.$ ao infinito. Mas esta equação mostra ao mesmo tempo uma relação entre os números a e k, pois, posto $z=1$, será $a=1+\frac{k}{1}+\frac{k^2}{1.2}+\frac{k^3}{1.2.3}+\frac{k^4}{1.2.3.4}+etc.$, e para que a seja = 10, é necessário que seja $k=2,30258$, como encontramos antes.

117. Façamos $b=a^n$ e será, tomando o número a como base Logarítmica, $lb=n$. Daqui, sendo $b^z=a^{nz}$, será, por uma Série infinita, $b^z=1+\frac{knz}{1}+\frac{k^2n^2z^2}{1.2}+\frac{k^3n^3z^3}{1.2.3}+\frac{k^4n^4z^4}{1.2.3.4}+etc.$, e posto lb no lugar de n, será $b^z=1+\frac{kz}{1}lb+\frac{k^2z^2}{1.2}(lb)^2+\frac{k^3z^3}{1.2.3}(lb)^3+\frac{k^4z^4}{1.2.3.4}(lb)^4+etc.$ Portanto, conhecido o valor da letra k dado o valor da base a, uma quantidade exponencial qualquer b^z poderá ser expressa por uma Série infinita cujos termos procedem segundo as potências de z. Exposto isso, mostremos também como os Logaritmos podem ser desenvolvidos por Séries infinitas.

118. Porque é $a^\omega=1+k\omega$, com ω uma Fração infinitamente pequena, e também porque a razão entre a e k é definida por esta equação $a=1+\frac{k}{1}+\frac{k^2}{1.2}+\frac{k^3}{1.2.3}+etc.$, se a é tomada pela base Logarítmica, será $\omega=l(1+k\omega)$ e $i\omega=l(1+k\omega)^i$. E fica manifesto que quanto maior é o número tomado por i, mais a Potência $(1+k\omega)^i$ vai superar a unidade, e pondo i = número infinito, o valor da Potência $(1+k\omega)^i$ cresce para algum número maior que a unidade. Portanto, se é posto que $(1+k\omega)^i=1+x$, será $l(1+x)=i\omega$, de onde, sendo $i\omega$ um número finito, a saber, o Logaritmo do número $1+x$, fica evidente que i deve ser um número infinitamente grande, pois, de outro modo, $i\omega$ não poderia ter um valor finito.

119. Posto que $(1+k\omega)^i=1+x$, será $1+k\omega=(1+x)^{\frac{1}{i}}$ e $k\omega=(1+x)^{\frac{1}{i}}-1$, donde $i\omega=\frac{i}{k}\left((1+x)^{\frac{1}{i}}-1\right)$. Mas porque é $i\omega=l(1+x)$, será $l(1+x)=\frac{i}{k}(1+x)^{\frac{1}{i}}-\frac{i}{k}$, posto i um número infinitamente grande. Mas também é $(1+x)^{\frac{1}{i}}=1+\frac{1}{i}x-\frac{1(i-1)}{1.2i}x^2+\frac{1(i-1)(2i-1)}{1.2i.3i}x^3-\frac{1(i-1)(2i-1)(3i-1)}{1.2i.3i.4i}x^4+etc.$

E porque i é um número infinito, será $\frac{i-1}{2i}=\frac{1}{2}$, $\frac{2i-1}{3i}=\frac{2}{3}$, $\frac{3i-1}{4i}=\frac{3}{4}$, *etc.*; daqui será $i(1+x)^{\frac{1}{i}}=1+\frac{x}{1}-\frac{xx}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+etc.$ e, consequentemente, $l(1+x)=\frac{1}{k}\left(\frac{x}{1}-\frac{xx}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+etc.\right)$, posta a base Logarítmica = a e denotando k um número conveniente nesta base, como, a saber, $a=1+\frac{k}{1}+\frac{k^2}{1.2}+\frac{k^3}{1.2.3}+etc.$

120. Portanto, como temos uma Série igual ao Logaritmo do número $1+x$, poderemos, com seu auxílio, definir o valor do número k dada uma base a. Pois se fazemos $1+x=a$, e porque $la=1$, será $1=\frac{1}{k}\left(\frac{a-1}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\frac{(a-1)^4}{4}+etc.\right)$ e daqui se tem $k=\frac{a-1}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\frac{(a-1)^4}{4}+etc.$ O valor desta Série infinita, se é feito $a=10$, deverá ser cerca de 2,30258, ainda que seja difícil de entender que $2{,}30258=\frac{9}{1}-\frac{9^2}{2}+\frac{9^3}{3}-\frac{9^4}{4}+etc.$, pois os termos desta Série tornam-se continuamente maiores, e nem mesmo com a soma de alguns termos pode-se ter uma soma aproximada. Para este incômodo, dificilmente se encontra um remédio.

121. Portanto, porque é $l(1+x)=\frac{1}{k}\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-etc.\right)$, será, posto x negativo, $l(1-x)=-\frac{1}{k}\left(\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+etc.\right)$. Subtraída a Série posterior da anterior, será $l(1+x)-l(1-x)=l\,\frac{1+x}{1-x}=\frac{2}{k}\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+etc.\right)$. Agora, seja feito $\frac{1+x}{1-x}=a$, tal que seja $x=\frac{a-1}{a+1}$, e porque $l\,a=1$, será $k=2\left(\frac{a-1}{a+1}+\frac{(a-1)^3}{3(a+1)^3}+\frac{(a-1)^5}{5(a+1)^5}+etc.\right)$, equação com a qual poderá ser encontrado o valor do número k a partir da base a. Dessa maneira, se a base a é posta =10, será $k=2\left(\frac{9}{11}+\frac{9^3}{3.11^3}+\frac{9^5}{5.11^5}+\frac{9^7}{7.11^7}+etc.\right)$, Série cujos termos decrescem sensivelmente, e por isso exibem rapidamente um valor bem próximo para *k*.

122. Porque é permitido tomar à vontade a base a para criar um sistema de Logaritmos, ela pode ser tomada de tal maneira que $k=1$. Façamos, portanto, $k=1$, e será, pela Série encontrada acima (**116**), $a=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+etc.$, termos que, se convertidos em frações decimais e adicionados em ato, produzirão para a o valor $a=2{,}71828182845904523536028$, do qual o último digito é de fato exato. E se, agora, com esta base se constroem Logaritmos, eles costumam ser chamados de Logaritmos *naturais* ou *hiperbólicos*, porque a quadratura da hipérbole pode ser expressa por tais Logaritmos. Por amor à brevidade, ponhamos agora, no lugar desse número 2,718281828459 etc., a letra constante e, que denotará, portanto, a base dos Logaritmos naturais ou hiperbólicos à qual corresponde o valor da letra $k=1$; ou que esta letra e também exprime a soma desta Série $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+etc.$ ao infinito.

123. Portanto, os Logaritmos hiperbólicos terão esta propriedade, que o Logaritmo do número $1+\omega$ é = ω, denotando ω como uma quantidade infinitamente pequena, e, a partir dessa propriedade, quando se faz $k=1$, o Logaritmo hiperbólico de todo número poderá ser encontrado. Assim, posta a letra e para o número encontrado acima, será ao infinito $e^z=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^3}{1.2.3}+\frac{z^4}{1.2.3.4}+etc.$, e os próprios Logaritmos hiperbólicos se encontram a partir dessas séries, que são $l(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+etc.$ e $l\frac{1+x}{1-x}=\frac{2x}{1}+\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}+\frac{2x^7}{7}+\frac{2x^9}{9}+etc.$, Séries que convergem rapidamente se no lugar de x é posta uma fração muito pequena; também, da série posterior, se encontram facilmente o Logaritmo dos números não muito maiores do que a unidade. Assim, posto $x=\frac{1}{5}$, será $l\frac{6}{4}=l\frac{3}{2}=\frac{2}{1.5}+\frac{2}{3.5^3}+\frac{2}{5.5^5}+\frac{2}{7.5^7}+etc.$, e, feito $x=\frac{1}{7}$, será $l\frac{4}{3}=\frac{2}{1.7}+\frac{2}{3.7^3}+\frac{2}{5.7^5}+\frac{2}{7.7^7}+etc.$; feito $x=\frac{1}{9}$ será $l\frac{5}{4}=\frac{2}{1.9}+\frac{2}{3.9^3}+\frac{2}{5.9^5}+\frac{2}{7.9^7}+etc.$ E a partir do Logaritmo dessas frações, se encontram os Logaritmos dos números inteiros, pois será, a partir da natureza dos Logaritmos, $l\frac{3}{2}+l\frac{4}{3}=l\,2$, e daí $l\frac{3}{2}+l\,2=l\,3$, e $2\,l\,2=l\,4$, e assim por diante $l\frac{5}{4}+l\,4=l\,5$, , $l\,2+l\,3=l\,6$, $3\,l\,2=l\,8$, $2\,l\,3=l\,9$ e $l\,2+l\,5=l\,10$.

EXEMPLO.

Daqui, o Logaritmo hiperbólico dos números de 1 a 10 se obtêm da seguinte maneira:

$l\,1=0$, 00000 00000 00000 00000 00000
$l\,2=0$, 69314 71805 59945 30941 72321
$l\,3=1$, 09861 22886 68109 69139 52452
$l\,4=1$, 38629 43611 19890 61883 44642
$l\,5=1$, 60943 79124 34100 37460 07593
$l\,6=1$, 79175 94692 28055 00081 24773
$l\,7=1$, 94591 01490 55313 30510 54639
$l\,8=2$, 07944 15416 79835 92825 16964
$l\,9=2$, 19722 45773 36219 38279 04905
$l\,10=2$, 30258 50929 94045 68401 79914

Todos estes Logaritmos foram deduzidos a partir das três Séries anteriores, com exceção do $l\,7$, que obtive da seguinte maneira. Pus, sem hesitação, na Série posterior, $x = \frac{1}{99}$ e assim obtive $l\,\frac{100}{98} = l\,\frac{50}{49} = 0{,}0202027073175194484078230$ que, subtraído de $l\,50 = 2\,l\,5 + l\,2 = 3{,}9120230054281460586187508$ deixa $l\,49$, cuja metade dá $l\,7$.

124. Seja o Logaritmo hiperbólico de $1+x$, ou $l\,(1+x)$ igual a y; será $y = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + etc.$. Tomado agora o número a como a base Logarítmica, seja o Logaritmo do mesmo número $1+x$ igual a v. Como vimos, será $v = \frac{1}{k}\left(x - \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + etc.\right) = \frac{y}{k}$, e daqui $k = \frac{y}{v}$, donde fica comodamente definido o valor de k na base a correspondente como sendo igual ao Logaritmo hiperbólico de um dado número dividido pelo Logaritmo do mesmo número formado na base a. Assim, posto este número = a, será $v = 1$, e daqui k se torna = Logaritmo hiperbólico da base a. Portanto, no sistema dos Logaritmos comuns, onde é $a = 10$, será k = Logaritmo hiperbólico de 10, donde $k = 2{,}3025850929940456840179914$, valor que já coligimos logo acima. Portanto, se cada um dos Logaritmos hiperbólicos for dividido por esse número, ou, o que é dizer o mesmo, for multiplicado pela fração decimal $0{,}4342944819032518276511289$, produzirão os Logaritmos comuns conveniente na base $a = 10$.

125. Porque é $e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + etc.$, se é posto $a^y = e^z$, será, tomado o Logaritmo hiperbólico, $yla = z$, porque é $l\,e = 1$. Substituído esse valor no lugar de z, será $a^y = 1 + \frac{yla}{1} + \frac{y^2(la)^2}{1.2} + \frac{y^3(la)^3}{1.2.3} + etc.$, de onde qualquer quantidade exponencial, com a ajuda dos Logaritmos hiperbólicos, pode ser desenvolvida em uma Série infinita. E então, denotando i como um número infinitamente grande, tanto as quantidades exponenciais quanto as Logarítmicas podem ser encontradas por potências. Pois será $e^z = \left(1 + \frac{z}{i}\right)^i$, e daqui $a^y = \left(1 + \frac{yla}{i}\right)^i$, e daí, por Logaritmos hiperbólicos, tem-se $l\,(1+x) = i\left((1+x)^{\frac{1}{i}} - 1\right)$. Além desses, outros usos dos Logaritmos hiperbólicos serão abundantemente vistos no cálculo integral.

3. Texto original

la Logarithmorum quæsita dabit figuras initiales numeri quæsiti, quæ erunt 181858. Quanquam ergo iste numerus nullo modo exhiberi potest, tamen affirmari potest eum omnino ex 5050446 figuris constare, atque figuras initiales sex esse 181858, quas dextrorsum adhuc 5050440 figuræ sequantur, quarum insuper nonnullæ ex majori Logarithmorum canone definiri possent, undecim scilicet figuræ initiales erunt 18185852986. CAP. VI.

CAPUT VII.

De quantitatum exponentialium ac Logarithmorum per Series explicatione.

114. Quia est $a^0 = 1$, atque crescente Exponente ipsius a simul valor Potestatis augetur, si quidem a est numerus unitate major; sequitur si Exponens infinite parum cyphram excedat, Potestatem ipsam quoque infinite parum unitatem esse superaturam. Sit ω numerus infinite parvus, seu Fractio tam exigua, ut tantum non nihilo sit æqualis, erit $a^\omega = 1 + \psi$, existente ψ quoque numero infinite parvo. Ex præcedente enim capite constat nisi ψ esset numerus infinite parvus, neque ω talem esse posse. Erit ergo vel $\psi = \omega$, vel $\psi > \omega$, vel $\psi < \omega$, quæ ratio utique a quantitate litteræ a pendebit, quæ cum adhuc sit incognita, ponatur $\psi = k\omega$, ita ut sit $a^\omega = 1 + k\omega$; &, sumta a pro basi Logarithmica, erit $\omega = l(1 + k\omega)$.

EXEMPLUM.

Quo clarius appareat, quemadmodum numerus k pendeat a basi a, ponamus esse $a = 10$; atque ex tabulis vulgaribus quæramus Logarithmum numeri quam minime unitatem supe-

L 3 rantis,

LIB. I. rantis, puta $1+\frac{1}{1000000}$, ita ut ſit $k\omega = \frac{1}{1000000}$; erit $l(1+\frac{1}{1000000}) = l\frac{1000001}{1000000} = 0,00000043429 = \omega$. Hinc, ob $k\omega = 0,00000100000$, erit $\frac{1}{k} = \frac{43429}{100000}$ & $k = \frac{100000}{43429} = 2,30258$: unde patet k eſſe numerum finitum pendentem a valore baſis a. Si enim alius numerus pro baſi a ſtatuatur, tum Logarithmus ejuſdem numeri $1+k\omega$ ad priorem datam tenebit rationem, unde ſimul alius valor litteræ k prodiret.

115. Cum ſit $a^{\omega} = 1+k\omega$, erit $a^{i\omega} = (1+k\omega)^{i}$, quicunque numerus loco i ſubſtituatur. Erit ergo $a^{i\omega} = 1 + \frac{i}{1}k\omega + \frac{i(i-1)}{1.\ 2}k^2\omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1.\ 2.\ 3}k^3\omega^3 +$ &c. Quod ſi ergo ſtatuatur $i = \frac{z}{\omega}$, & z denotet numerum quemcunque finitum, ob ω numerum infinite parvum, fiet i numerus infinite magnus, hincque $\omega = \frac{z}{i}$, ita ut ſit ω Fractio denominatorem habens infinitum, adeoque infinite parva, qualis eſt aſſumta. Subſtituatur ergo $\frac{z}{i}$ loco ω, eritque $a^{z} = (1 + \frac{kz}{i})^{i} = 1 + \frac{1}{1}kz + \frac{1(i-1)}{1.\ 2i}k^2z^2 + \frac{1(i-1)(i-2)}{1.\ 2i.\ 3i}k^3z^3 + \frac{1(i-1)(i-2)(i-3)}{1.\ 2i.\ 3i.\ 4i.}k^4z^4 +$ &c., quæ æquatio erit vera ſi pro i numerus infinite magnus ſubſtituatur. Tum vero eſt k numerus definitus ab a pendens, uti modo vidimus.

116. Cum autem i ſit numerus infinite magnus, erit $\frac{i-1}{i} = 1$; patet enim quo major numerus loco i ſubſtituatur, eo propius valorem Fractionis $\frac{i-1}{i}$ ad unitatem eſſe acceſſurum, hinc ſi

i ſit

i sit numerus omni assignabili major. Fractio quoque $\frac{i-1}{i}$ ipsam unitatem adæquabit. Ob similem autem rationem erit $\frac{i-2}{i}=1$; $\frac{i-3}{i}=1$; & ita porro; hinc sequitur fore $\frac{i-1}{2i}=\frac{1}{2}$; $\frac{i-2}{3i}=\frac{1}{3}$; $\frac{i-3}{4i}=\frac{1}{4}$; & ita porro. His igitur valoribus substitutis, erit $a^z=1+\frac{kz}{1}+\frac{k^2z^2}{1.2}+\frac{k^3z^3}{1.2.3}+\frac{k^4z^4}{1.2.3.4}+$ &c. in infinitum. Hæc autem æquatio simul relationem inter numeros a & k ostendit, posito enim $z=1$, erit $a=1+\frac{k}{1}+\frac{k^2}{1.2}+\frac{k^3}{1.2.3}+\frac{k^4}{1.2.3.4}+$ &c., atque ut a sit $=10$, necesse est ut sit circiter $k=2,30258$, uti ante invenimus.

117. Ponamus esse $b=a^n$, erit, sumto numero a pro basi Logarithmica, $lb=n$. Hinc, cum sit $b^z=a^{nz}$, erit per Seriem infinitam $b^z=1+\frac{knz}{1}+\frac{k^2n^2z^2}{1.2}+\frac{k^3n^3z^3}{1.2.3}+\frac{k^4n^4z^4}{1.2.3.4.}+$ &c., posito vero lb pro n, erit $b^z=1+\frac{kz}{1}lb+\frac{k^2z^2}{1.2}(lb)^2+\frac{k^3z^3}{1.2.3}(lb)^3+\frac{k^4z^4}{1.2.3.4}(lb)^4+$ &c.. Cognito ergo valore litteræ k ex dato valore basis a, quantitas exponentialis quæcunque b^z per Seriem infinitam exprimi poterit, cujus termini secundum Potestates ipsius z procedant. His expositis ostendamus quoque quomodo Logarithmi per Series infinitas explicari possint.

118. Cum sit $a^\omega=1+k\omega$, existente ω Fractione infinite parva, atque ratio inter a & k definiatur per hanc æquationem $a=1+\frac{k}{1}+\frac{k^2}{1.2}+\frac{k^3}{1.2.3}+$ &c., si a sumatur pro basi Logarithmica, erit $\omega=l(1+k\omega)$ & $i\omega=l(1+k\omega)^i$. Mani-

Lib. I. Manifeſtum autem eſt, quo major numerus pro i ſumatur, eo magis Poteſtatem $(1+k\omega)^i$ unitatem eſſe ſuperaturam; atque ſtatuendo $i =$ numero infinito, valorem Poteſtatis $(1+k\omega)^i$ ad quemvis numerum unitate majorem aſcendere. Quod ſi ergo ponatur $(1+k\omega)^i = 1+x$, erit $l(1+x) = i\omega$, unde, cum ſit $i\omega$ numerus finitus, Logarithmus ſcilicet numeri $1+x$, perſpicuum eſt, i eſſe debere numerum infinite magnum, alioquin enim $i\omega$ valorem finitum habere non poſſet.

119. Cum autem poſitum ſit $(1+k\omega)^i = 1+x$, erit $1+k\omega = (1+x)^{\frac{1}{i}}$ & $k\omega = (1+x)^{\frac{1}{i}} - 1$, unde fit $i\omega = \frac{i}{k}((1+x)^{\frac{1}{i}} - 1)$. Quia vero eſt $i\omega = l(1+x)$, erit $l(1+x) = \frac{i}{k}(1+x)^{\frac{1}{i}} - \frac{i}{k}$, poſito i numero infinite magno. Eſt autem $(1+x)^{\frac{1}{i}} = 1 + \frac{1}{i}x - \frac{1(i-1)}{i.\ 2i}x^2 + \frac{1(i-1)(2i-1)}{i.\ 2i.\ 3i}x^3 - \frac{1(i-1)(2i-1)(3i-1)}{i.\ 2i.\ 3i.\ 4i}x^4 + \&c.$ Ob i autem numerum infinitum, erit $\frac{i-1}{2i} = \frac{1}{2}$; $\frac{2i-1}{3i} = \frac{2}{3}$; $\frac{3i-1}{4i} = \frac{3}{4}$, &c.; hinc erit $i(1+x)^{\frac{1}{i}} = i + \frac{x}{1} - \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \&c.$, & conſequenter $l(1+x) = \frac{1}{k}(\frac{x}{1} - \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \&c.)$, poſita baſi Logarithmica $= a$ ac denotante k numerum huic baſi convenientem, ut ſcilicet ſit $a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1.2} + \frac{k^3}{1.2.3} + \&c.$

120. Cum igitur habeamus Seriem Logarithmo numeri $1+x$ æqualem, ejus ope ex data baſi a definire poterimus valorem numeri

numeri k. Si enim ponamus $1+x=a$, ob $la=1$, erit CAP. VII.
$1=\frac{1}{k}\left(\frac{a-1}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\frac{(a-1)^4}{4}+\&c.\right)$, hincque habebitur $k=\frac{a-1}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\frac{(a-1)^4}{4}+\&c.$, cujus ideo Seriei infinitæ valor, si ponatur $a=10$, circiter esse debebit $=2,30258$; quanquam difficulter intelligi potest esse $2,30258=\frac{9}{1}-\frac{9^2}{2}+\frac{9^3}{3}-\frac{9^4}{4}+\&c.$, quoniam hujus Seriei termini continuo fiunt majores, neque adeo aliquot terminis sumendis summa vero propinqua haberi potest: cui incommodo mox remedium afferetur.

121. Quoniam igitur est $l(1+x)=\frac{1}{k}\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\&c.\right)$, erit, posito x negativo, $l(1-x)=-\frac{1}{k}\left(\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\&c.\right)$. Subtrahatur Series posterior a priori, erit $l(1+x)-l(1-x)=l\frac{1+x}{1-x}=\frac{2}{k}\times\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\&c.\right)$. Nunc ponatur $\frac{1+x}{1-x}=a$, ut sit $x=\frac{a-1}{a+1}$, ob $la=1$ erit $k=2\left(\frac{a-1}{a+1}+\frac{(a-1)^3}{3(a+1)^3}+\frac{(a-1)^5}{5(a+1)^5}+\&c.\right)$, ex qua æquatione valor numeri k ex basi a inveniri poterit. Si ergo basis a ponatur $=10$ erit $k=2\left(\frac{9}{11}+\frac{9^3}{3.11^3}+\frac{9^5}{5.11^5}+\frac{9^7}{7.11^7}+\&c.\right)$, cujus Seriei termini sensibiliter decrescunt, ideoque mox valorem pro k satis propinquum exhibent.

122. Quoniam ad systema Logarithmorum condendum basin a pro lubitu accipere licet, ea ita assumi poterit ut fiat $k=1$. Ponamus ergo esse $k=1$, eritque per Seriem supra

Euleri *Introduct. in Anal. infin. parv.* M (116)

LIB. I. (116) inventam, $a = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} +$ &c., qui termini, ſi in fractiones decimales convertantur atque actu addantur, præbebunt hunc valorem pro $a =$ $2,71828182845904523536028$, cujus ultima adhuc nota veritati eſt conſentanea. Quod ſi jam ex hac baſi Logarithmi conſtruantur, ii vocari ſolent Logarithmi *naturales* ſeu *hyperbolici*, quoniam quadratura hyperbolæ per iſtiuſmodi Logarithmos exprimi poteſt. Ponamus autem brevitatis gratia pro numero hoc $2,718281828459$ &c. conſtanter litteram e, quæ ergo denotabit baſin Logarithmorum naturalium ſeu hyperbolicorum, cui reſpondet valor litteræ $k = 1$; ſive hæc littera e quoque exprimet ſummam hujus Seriei $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} +$ &c. in infinitum.

123. Logarithmi ergo hyperbolici hanc habebunt proprietatem, ut numeri $1 + \omega$ Logarithmus ſit $= \omega$, denotante ω quantitatem infinite parvam, atque cum ex hac proprietate valor $k = 1$ innoteſcat, omnium numerorum Logarithmi hyperbolici exhiberi poterunt. Erit ergo, poſita e pro numero ſupra invento, perpetuo $e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} +$ &c. ipſi vero Logarithmi hyperbolici ex his Seriebus invenientur, quibus eſt $l(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} +$ &c, & $l\frac{1+x}{1-x} = \frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \frac{2x^9}{9} +$ &c., quæ Series vehementer convergunt, ſi pro x ſtatuatur fractio valde parva: ita ex Serie poſteriori facili negotio inveniuntur Logarithmi numerorum unitate non multo majorum. Poſito namque $x = \frac{1}{5}$, erit $l\frac{6}{4} = l\frac{3}{2} = \frac{2}{1.5} + \frac{2}{3.5^3} + \frac{2}{5.5^5} + \frac{2}{7.5^7} +$ &c., & facto $x = \frac{1}{7}$, erit $l\frac{4}{3} = \frac{2}{1.7} + \frac{2}{3.7^3} + \frac{2}{5.7^5} + \frac{2}{7.7}$

$\frac{2}{7 \cdot 7^7} +$ &c., facto $x = \frac{1}{9}$, erit $l\,\frac{5}{4} = \frac{2}{1 \cdot 9} + \frac{2}{3 \cdot 9^3} + \frac{2}{5 \cdot 9^5} + \frac{2}{7 \cdot 9^7} +$ &c.. Ex Logarithmis vero harum fractionum reperientur Logarithmi numerorum integrorum, erit enim ex natura Logarithmorum $l\,\frac{3}{2} + l\,\frac{4}{3} = l\,2$; tum $l\,\frac{3}{2} + l\,2 = l\,3$; & $2\,l\,2 = l\,4$; porro $l\,\frac{5}{4} + l\,4 = l\,5$; $l\,2 + l\,3 = l\,6$; $3\,l\,2 = l\,8$; $2\,l\,3 = l\,9$; & $l\,2 + l\,5 = l\,10$.

EXEMPLUM.

Hinc Logarithmi hyperbolici numerorum ab 1 usque ad 10 ita se habebunt, ut sit

$l\,1$	$=$	0,	00000	00000	00000	00000	00000
$l\,2$	$=$	0,	69314	71805	59945	30941	72321
$l\,3$	$=$	1,	09861	22886	68109	69139	52452
$l\,4$	$=$	1,	38629	43611	19890	61883	44642
$l\,5$	$=$	1,	60943	79124	34100	37460	07593
$l\,6$	$=$	1,	79175	94692	28055	00081	24773
$l\,7$	$=$	1,	94591	01490	55313	30510	54639
$l\,8$	$=$	2,	07944	15416	79835	92825	16964
$l\,9$	$=$	2,	19722	45773	36219	38279	04905
$l\,10$	$=$	2,	30258	50929	94045	68401	79914

Hi scilicet Logarithmi omnes ex superioribus tribus Seriebus sunt deducti, præter $l\,7$, quem hoc compendio sum assecutus. Posui nimirum in Serie posteriori $x = \frac{1}{99}$ sicque obtinui $l\,\frac{100}{98} = l\,\frac{50}{49} = 0,02020270731751944840782 30$, qui subtractus a $l\,50 = 2\,l\,5 + l\,2 = 3\ 91202300542814605861875 08$, relinquit $l\,49$, cujus semissis dat $l\,7$.

92 DE QUANTITATUM EXPONENTIALIUM

LIB. I.

124. Ponatur Logarithmus hyperbolicus ipſius $1+x$ ſeu $l(1+x)=y$; erit $y=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\&c.$. Sumto autem numero a pro baſi Logarithmica, ſit numeri ejuſdem $1+x$ Logarithmus $=v$; erit, ut vidimus, $v=\frac{1}{k}(x-\frac{xx}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\&c.)=\frac{y}{k}$; hincque $k=\frac{y}{v}$; ex quo commodiſſime valor ipſius k baſi a reſpondens ita definitur ut ſit æqualis cujuſvis numeri Logarithmo hyperbolico diviſo per Logarithmum ejuſdem numeri ex baſi a formati. Poſito ergo numero hoc $=a$, erit $v=1$, hincque ſit $k=$ Logarithmo hyperbolico baſis a. In ſyſtemate ergo Logarithmorum communium, ubi eſt $a=10$, erit $k=$ Logarithmo hyperbolico ipſius 10, unde ſit $k=2,30258509299404568401799914$, quem valorem jam ſupra ſatis prope collegimus. Si ergo ſinguli Logarithmi hyperbolici per hunc numerum k dividantur, vel, quod eodem redit, multiplicentur per hanc fractionem decimalem $0,43429448190325182765112289$, prodibunt Logarithmi vulgares baſi $a=10$ convenientes.

125. Cum ſit $e^z=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^3}{1.2.3}+\&c.$, ſi ponatur $a^y=e^z$, erit, ſumtis Logarithmis hyperbolicis, $yla=z$, quia eſt $le=1$, quo valore loco z ſubſtituto, erit $a^y=1+\frac{yla}{1}+\frac{y^2(la)^2}{1.2}+\frac{y^3(la)^3}{1.2.3}+\&c.$, unde quælibet quantitas exponentialis ope Logarithmorum hyperbolicorum per Seriem infinitam explicari poteſt. Tum vero, denotante i numerum infinite magnum, tam quantitates exponentiales quam Logarithmi per poteſtates exponi poſſunt. Erit enim $e^z=(1+\frac{z}{i})^i$, hincque $a^y=(1+\frac{yla}{i})^i$, deinde pro Logarithmis hyperbolicis habetur $l(1+x)=i((1+x)^{\frac{1}{i}}-1)$. De cetero

tero Logarithmorum hyperbolicorum uſus in calculo integrali fuſius demonſtrabitur. CAP. VII.

CAPUT VIII.

De quantitatibus tranſcendentibus ex Circulo ortis.

126. POſt Logarithmos & quantitates exponentiales conſiderari debent Arcus circulares eorumque Sinus & Coſinus, quia non ſolum aliud quantitatum tranſcendentium genus conſtituunt, ſed etiam ex ipſis Logarithmis & exponentialibus, quando imaginariis quantitatibus involvuntur, proveniunt, id quod infra clarius patebit.

Ponamus ergo Radium Circuli ſeu Sinum totum eſſe $= 1$, atque ſatis liquet Peripheriam hujus Circuli in numeris rationalibus exacte exprimi non poſſe, per approximationes autem inventa eſt Semicircumferentia hujus Circuli eſſe $=$ 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706798214808651327230664709384 46 +, pro quo numero, brevitatis ergo, ſcribam π, ita ut ſit $\pi =$ Semicircumferentiæ Circuli, cujus Radius $= 1$, ſeu π erit longitudo Arcus 180 graduum.

127. Denotante z Arcum hujus Circuli quemcunque, cujus Radium perpetuo aſſumo $= 1$; hujus Arcus z conſiderari potiſſimum ſolent Sinus & Coſinus. Sinum autem Arcus z in poſterum hoc modo indicabo, *ſin. A.* z, ſeu tantum *ſin.* z. Coſinum vero hoc modo *coſ. A.* z, ſeu tantum *coſ.* z. Ita, cum π ſit Arcus 180°, erit *ſin.* $0\pi = 0$; *coſ.* $0\pi = 1$; & *ſin.* $\frac{1}{2}\pi = 1$, *coſ.* $\frac{1}{2}\pi = 0$; *ſin.* $\pi = 0$; *coſ.* $\pi = -1$; *ſin.* $\frac{3}{2}\pi = -1$; *coſ.* $\frac{3}{2}\pi = 0$; *ſin.* $2\pi = 0$; & *coſ.* $2\pi = 1$.

Omnes ergo Sinus & Coſinus intra limites $+1$ & -1 continen-

M 3