Traduções
Edição Especial da Revista Brasileira de História da Matemática – Vol. 23, nº 46 – pp. 158–178
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

A "GERAÇÃO DAS SEÇÕES CÔNICAS" DE BLAISE PASCAL

João F. N. B. Cortese
Laboratoire SPHERE – França

(aceito para publicação em março de 2023)

Resumo

Apresentamos aqui uma tradução da *Geração das seções cônicas* (*Generatio conisectionum*), a única parte que nos restou do perdido tratado sobre as cônicas de Blaise Pascal, a qual conhecemos por meio de uma cópia realizada por G. W. Leibniz. O ensaio introdutório apresenta o contexto dos escritos de Pascal sobre as curvas cônicas em abordagem "projetiva", indicando a importância da admissão de elementos geométricos a distância infinita para a generalização dos resultados. A tradução traz notas filológicas, e apresentamos igualmente o texto original em latim.

Palavras-chave: História da Matemática, Matemática do século XVII, Blaise Pascal, Geometria Projetiva, Curvas Cônicas.

[BLAISE PASCAL'S *GENERATION OF THE CONIC SECTIONS* – A PORTUGUESE TRANSLATION]

Abstract

We present here a Portuguese translation of the *Generation of the conic sections* (*Generatio conisectionum*), the only part that remains of Blaise Pascal's lost treatise on conics, which we know through a copy made by G. W. Leibniz. The introductory essay presents the context of Pascal's writings on conic curves in a "projective" approach, indicating the importance of admitting geometric elements at an infinite distance for the generalization of results. The translation brings philological notes, and we also present the original Latin text.

Keywords: History of Mathematics, 17th century Mathematics, Blaise Pascal, Projective Geometry, Conic Curves.

1. Introdução

1.1. O texto e seu contexto histórico

Um tratado completo sobre as seções cônicas foi um dos principais trabalhos matemáticos aos quais se dedicou Blaise Pascal (1623–1662). Ele já anunciara a pretensão de realizá-lo no seu *Ensaio para as cônicas* (1640), obra que traduzimos em um volume prévio da *Revista Brasileira de História da Matemática* (CORTESE, 2021). Nesta ocasião, apresentamos também alguns elementos de contextualização histórica da geometria projetiva (ou "perspectiva"), pela qual Pascal, seguindo Girard Desargues (1591–1661), orientava a sua abordagem das seções cônicas.

Neste ano de 2023, quadricentenário de Pascal, o número quatrocentos nos leva a retomarmos uma citação do Pe. Marin Mersenne (1588–1648) sobre Pascal e a fecundidade de seu trabalho.[1]

> "*temos aqui um jovem (...) que é um geômetra tão excelente, tendo apenas 18 anos, que ele compreendeu todas as seções cônicas e o Apolônio em uma única proposição, da qual ele deriva de tal maneira 400 corolários que nenhum depende do outro, mas todos, tanto o último como o primeiro, da referida proposição*" (Carta a T. Haak, 18 de novembro de 1640; em OC, II, p. 239)[2]

Tal testemunho mostra o impacto dos trabalhos de Pascal sobre as cônicas e o quão frutíferos eles deveriam ser – aparentemente, a partir de uma extensão de seu Teorema do Hexágono, que seria provavelmente a proposição referida por Mersenne. Infelizmente, porém, o tratado sobre as cônicas de Pascal não foi preservado até os dias de hoje.

Em 1654, Pascal fez uma menção ao tratado,[3] sendo que não temos mais documentos que façam referência direta a ele ao longo de sua vida. Após a morte de Pascal, o que restou de seus manuscritos foi cuidado pela família Périer – ou seja, por sua irmã Gilberte Périer (nascida Pascal), seu cunhado Florin Périer e seu sobrinho Étienne Périer. Em 1676, o dossiê sobre as cônicas foi enviado a G. W. Leibniz (1646-1716), que esteve em Paris entre 1672 e 1676. Em uma carta de 30 de agosto de 1676 a Étienne Périer, Leibniz apresentava uma descrição de seu conteúdo, recomendando a publicação do tratado (o que nunca ocorreu).

Segundo Leibniz, os manuscritos de Pascal sobre as cônicas poderiam ser classificados segundo seis "peças" ou "tratados":[4]

---

[1] Citação que já havíamos apresentado em (CORTESE, 2021).

[2] Citamos por OC a edição de Jean Mesnard das obras completas de Pascal (PASCAL, 1964–1992).

[3] Em uma carta à "academia parisiense" (*Celleberrimae Matheseos Academiae Parisiensi*), de 1654 (OC, II, p. 1033), Pascal anunciava trabalhar sobre um tratado com o título *Conicorum opus completum*.

[4] A carta de Leibniz a Périer é apresentada em OC, II, pp. 1103-1104. As notas de Leibniz sobre tal trabalho, às pp. 1120-1131 do mesmo volume. Ver a introdução de J. Mesnard em OC, II, pp. 1102-1108, e HOUZEL, 2013, pp. 87–89.

I. “Geração das seções cônicas, tangentes e secantes; ou projeção da circunferência, das tangentes e das secantes do círculo para quaisquer posições do olho e do plano do quadro”[5]
II. “Sobre o hexagrama místico e cônico”[6]
III. “Sobre as quatro tangentes [ao círculo] e sobre as retas que unem os pontos de contato de onde são deduzidas as propriedades das retas cortadas harmonicamente e dos diâmetros”[7]
IV. “Sobre as proporções dos segmentos secantes e tangentes; sobre os diâmetros correspondentes”[8]
V. “Sobre os contatos cônicos (sobre os pontos e retas que a seção cônica atinge)”[9]
VI. “Sobre o lugar sólido”[10]

No dossiê enviado a Étienne Périer por Leibniz constavam também duas cópias do *Ensaio para as cônicas*, um texto com o título *De restitutione coni* (no qual, ele descreve, aparece o problema de, “os diâmetros e parâmetros sendo dados, encontrar as seções cônicas”[11]), e outro com o título *Magnum problema* (dado um cone, cortá-lo de modo a encontrar uma cônica semelhante a uma cônica dada). Leibniz concluía assim a sua carta a Périer:

> “*Há alguns problemas que são encontrados em uma outra folha; mas falta o primeiro. Extrair-se-á o que for possível deles em forma de apêndice, mas o corpo da obra, composto pelos seis tratados, me parece suficientemente claro e terminado.*
>
> *Concluo que esta obra está em estado de ser impressa; e não é preciso perguntar se ela o merece...*”[12]

Como dissemos, infelizmente o conselho de Leibniz não levou à publicação do texto. Só nos restou deste dossiê uma cópia da primeira das peças, a *Geração das seções*

---

[5] *Generatio conisectionum, tangentium, et secantium; seu projectio peripheriae, tangentium et secantium circuli in quibuscumque oculi, plani ac tabellae positionibus.*
[6] *De hexagrammo mystico et conico*.
[7] *De quatuor tangentibus et rectis puncta tactuum jungentibus unde rectarum harmonice sectarum et diametrorum proprietates oriuntur*.
[8] *De proportionibus segmentorum secantium et tangentium; de correspondentibus diametrorum*. Poderia-se entender igualmente “dos segmentos, das secantes e das tangentes”. A segunda parte do “título” se refere a uma complementação proposta por Leibniz.
[9] *De tactionibus conicis (de punctis et rectis quas sectio conica attingit)*. A segunda parte do “título” é uma explicação de Leibniz.
[10] *De loco solido*. Tal tratado seria dedicado ao problema de Pappus, o qual, segundo Leibniz (OC, II, p. 1128), Pascal resolvia por meio do hexagrama referido no tratado de número II.
[11] OC, II, p. 1104.
[12] OC, II, p. 1104.

cônicas ..., feita pela mão de Leibniz. É a tradução dela, a única parte que conhecemos do tratado pascaliano sobre as cônicas, que apresentamos aqui. Segundo Leibniz, ela deveria ser o "fundamento de todo o resto" (*in* OC II, p. 1103). Além do texto pascaliano copiado por Leibniz, temos algumas notas deste[13] sobre o tratado de Pascal, importantes para fornecer algumas outras indicações sobre a estrutura deste.[14]

Cabe ressaltar que a *Geração das seções cônicas* e o *Ensaio para as cônicas* são portanto os únicos textos de Pascal sobre as cônicas que nos restaram; juntamente com o *Brouillon Project* de Desargues e as notas de Leibniz, eles constituem os documentos que temos sobre os primórdios do que pode ser denominado geometria projetiva, a qual será plenamente desenvolvida apenas no século XIX, inclusive com os trabalhos de Jean-Victor Poncelet (1788-1867).[15]

1.2. Alguns comentários sobre o conteúdo do texto

A *Geração das seções cônicas* constitui, como vimos acima, o início de um tratado sobre as cônicas, onde encontramos seis definições, seguidas de corolários, nove escólios e uma tabela comparativa. Ela apresenta a gênese das seções cônicas (ponto, linha reta, ângulo reto, elipse, parábola, hipérbole), as quais são tratadas como projeções de um círculo.[16] Pascal as classifica e apresenta propriedades das secantes e das tangentes. Se conhecer o resto do tratado nos permitiria conhecer plenamente os resultados de Pascal, tal "introdução" nos permite ao menos ver como Pascal apresentava as seções cônicas.[17]

No *Ensaio para as cônicas*, Pascal havia apresentado *cinco* seções cônicas (círculo, elipse, hipérbole, parábola e ângulo reto), enquanto na *Geração as seções cônicas* são apresentadas *seis* seções[18]: ganham espaço as cônicas hoje ditas "degeneradas" que são o ponto (o vértice do cone) e a linha reta, além do ângulo reto que já havia sido levado em conta; por outro lado, o círculo não é mais nomeado como uma seção cônica específica. Evidentemente ele pode ser considerado como um caso da elipse (a qual Pascal nomeia *antobola*, pois ela "volta-se sobre si mesma"). Mas o círculo aparece na *Geração as seções cônicas* com um papel fundamental, pois as seções cônicas são tratadas como projeções dele, cada uma delas sendo uma "imagem da circunferência do círculo" (OC, II, p. 1113).

O próprio vocabulário empregado no texto é interessante no que diz respeito à abordagem projetiva (sendo que a *Geração das seções cônicas* foi redigida em latim,

[13] Além de em (OC II, pp. 1120-1131), a edição de tais notas pode ser encontrada em (LEIBNIZ 1923- , III, 1) e em (COSTABEL, 1962).

[14] Para mais detalhes sobre elas, ver (DEBUICHE, 2016).

[15] O problema historiográfico da categorização da "geometria projetiva" é complexo, e não o aprofundaremos aqui. Para nossos propósitos, indiquemos que é possível entrever elementos desta disciplina, que florescerá no século XIX, nos trabalhos de Desargues e de Pascal.

[16] Apresentamos uma imagem correspondente a tais projeções em (CORTESE, 2016, p. 148).

[17] Nesta seção, retomamos parte do que foi apresentado no capítulo 13 de nossa tese de doutorado (CORTESE, 2017). Sobre a possível estrutura completa do tratado pascaliano sobre as cônicas, ver (TATON, 1962) e (DEL CENTINA, 2020).

[18] Fato que já havíamos mencionado em (CORTESE, 2021).

enquanto o *Ensaio para as cônicas* havia sido escrito em francês). Lemos no primeiro corolário após as seis definições do texto:

> "*Disso fica claro que, se o olho estiver no vértice do cone, se o objeto for a circunferência do círculo que é a base do cone, e se o quadro for o plano que encontra em ambos os lados a superfície do cone, então a seção cônica que será produzida por esse mesmo plano na superfície cônica, seja ela um ponto, seja uma reta, seja um ângulo, seja uma antobola, seja uma parábola, seja uma hipérbole, será a imagem da circunferência do círculo.*"

O vértice do cone[19] é associado nesta passagem ao "olho", a circunferência do círculo ao "objeto" (o qual seria visto), o plano que corta o cone ao "quadro" (*tabella*), correspondente de um ponto de vista ótico à tela que representaria o objeto visto, e cada uma delas à imagem (*apparentia*) do círculo – ou seja, como a imagem deste apareceria no quadro em função da posição do objeto. A herança do vocabulário da representação pictórica em perspectiva linear parece ser evidente,[20] ainda que Pascal esteja trabalhando aqui sobre uma geometria "pura". É a abordagem projetiva[21] que permitirá a Pascal indicar as correspondências entre as propriedades das seções cônicas, inclusive graças à assimilação de elementos geométricos a distância infinita.

No terceiro escólio do texto, lemos que resulta do corolário imediatamente anterior

> "*que a parábola se estende ao infinito e gera um espaço infinito, embora seja a imagem da circunferência do círculo, que é finita e abraça um espaço finito*".

Tal passagem nos parece emblemática do que indica Pascal por meio de sua abordagem projetiva: o espaço interior ao círculo é finito, enquanto aquele determinado pela parábola é infinito. "Embora" (*quamvis*) tal oposição apareça, a projeção torna possível que a parábola seja imagem da circunferência do círculo. Isso se dá graças à introdução de pontos à distância infinita: em particular, um que permite à parábola ser uma curva "fechada", e dois que o permitem à hipérbole. Tais pontos são denominados por Pascal "pontos sem imagem" (*puncta non apparentia*, *punctum quod apparentia caret*) ou "pontos deficientes" (*puncta deficientia*).

---

[19] O cone tratado por Pascal é "duplo", e não apenas a metade do cone que pode vir à mente em primeiro lugar. A gênese do cone, por meio da circunvolução de uma reta com um ponto fixo, é apresentada na primeira definição do tratado.

[20] Ver, neste sentido, (BKOUCHE, 1991), (MESNARD, 1994) e (CORTESE, 2016); para uma visão contrária a tal associação direta entre a perspectiva linear da pintura e a geometria projetiva, ver (ANDERSEN, 2007). Para uma discussão sobre as abordagens "perspectiva" e "projetiva" nas obras Pascal e Leibniz, ver (DEBUICHE, 2016).

[21] Ainda que, como dissemos, a classificação deste trabalho como da geometria projetiva não seja simples, o fato de Pascal usar no texto – por três vezes – o termo *projicere*, do verbo *projicio*, favorece tal categorização.

Neste sentido, todas as retas são compreendidas por Pascal como concorrentes, seja a distância finita, seja a distância infinita (caso das paralelas). Tal ideia já aparecera no *Ensaio para as cônicas* por meio da terminologia de "ordenança", herdada de Desargues[22]. Em um movimento característico da geometria projetiva, a introdução do infinito permite, portanto, encontrar uma maior generalidade no estudo das cônicas, permitindo tratar lado a lado os casos finito e infinito. No que diz respeito ao vocabulário, no caso da *Geração das seções cônicas* Pascal recorre à expressão "distância infinita", que já era empregada por Desargues mas que não aparecia no *Ensaio para as cônicas*.

A expressão "*non* [...] *nisi ad distantiam infinitam*", que aparece sete vezes na *Geração das seções cônicas*, mostra que considerar a projeção ao infinito é um tipo de concessão: isso não se passa *senão* (*nisi*) caso se considere o caso a distância infinita. E entretanto a distância infinita é admitida, e permite considerar toda seção cônica como projeção de da circunferência de um círculo.

Quanto à tabela que conclui o texto, ela apresenta uma comparação entre a parábola, a elipse, e a hipérbole, apresentando a primeira como intermediária entre as outras duas. Vale notar que isso já havia sido notado de certo modo por Johannes Kepler (1571–1630):

> "*Para todas essas espécies de cone, há cinco espécies de seções. Pois a linha formada na superfície do cone pela sua seção é ou uma reta, ou um círculo, ou uma Parábola, ou uma Hipérbole ou uma Elipse. Entre essas linhas, e para falar mais analogicamente do que segundo a Geometria, há uma ordem, dependente de suas propriedades, que é a transição da linha reta à Parábola por meio de uma infinitude de Hipérboles, e daí ao círculo por meio de uma infinitude de Elipses. De fato, de todas as Hipérboles, a mais aberta é a linha reta, enquanto a mais aguda é a Parábola, e, da mesma maneira, de todas as Elipses a mais aguda é a Parábola, e a mais aberta é o círculo.*" (tradução nossa; original em latim em KEPLER, 1604, pp. 92–93; cf. trad. francesa em KEPLER, 1980, pp. 220–221)

Kepler propõe uma continuidade entre as cônicas: da linha reta, passando pelas hipérboles, pela parábola, pelas elipses, até o círculo. A parábola tem assim uma posição intermediária (*Parabole loco medio*, *Parabole teneat medium*). Esta continuidade foi também notada por Mersenne (1636, I, p. 62), que fala mesmo de "certas analogias que se encontram em todas as seções" do cone.

Já Pascal, na conclusão da *Geração das seções cônicas*, e em relação à tabela que ele apresenta aí, propõe que a parábola tem uma posição intermediária (*tenere medium*) entre a antobola (a elipse) e a hipérbole. Isso diz respeito a algumas propriedades de tais seções cônicas. Quanto às verticais (retas da superfície cônica que passam pelo vértice, o que chamamos de geratriz – ver a primeira definição do texto), a parábola é paralela a uma delas, a elipse não é paralela a nenhuma, e a hipérbole é paralela a duas. Quanto aos

[22] E também nomeada como "ordem" por Pascal (cf. CORTESE, 2021).

"pontos deficientes" (aqueles que não têm projeção senão a distância infinita), a parábola apresenta um deles, a elipse nenhum, e a hipérbole dois. Quanto à própria curva cônica e ao espaço que ela abarca, Pascal indica que a parábola consiste em uma linha infinita e compreende um espaço infinito, enquanto a elipse possui uma linha e um espaço finitos, e a hipérbole duas linhas infinitas e dois espaços infinitos. A última linha da tabela, finalmente, diz respeito às "monossecantes" – segundo a definição 4, "uma reta infinita traçada no plano de uma seção cônica, que corta a seção cônica em um único ponto, é dita monossecante". Ainda aqui, aparece o caráter intermediário da parábola, pois ela tem uma série de monossecantes (paralelas entre si), enquanto a antobola não tem nenhuma, e a hipérbole duas[23].

Pascal difere em sua classificação daquela de Kepler, pois não chega a abarcar o círculo e a reta como extremos; ainda assim, podemos ver uma continuidade entre as seis cônicas cuja geração é apresentada no texto. De modo singular, Pascal classifica as cônicas, considerando-as todas como projeções da circunferência do círculo, conseguindo assim, a partir de sua herança do trabalho de Desargues, atingir uma maior generalidade graças à aproximação dos casos finito e infinito. Não que isso seja fácil de entender: como dizia Ivan Karamázov no romance de Dostoiévski,

> "*Se Deus existe e ele realmente criou a Terra, então, como é de nosso conhecimento absoluto, ele a criou com base na geometria euclidiana, e criou a inteligência humana apenas com o conceito das três dimensões do espaço. Por outro lado, houve e há até hoje geômetras e filósofos, inclusive dos mais notáveis, que duvidam de que todo o universo ou, em termos mais amplos, todo o ser tenha sido criado unicamente com base na geometria euclidiana; eles se permitem inclusive a fantasia de que duas paralelas que, segundo Euclides, jamais poderão encontrar-se na terra, talvez venham a encontrar-se em algum lugar do infinito. Eu, meu caro, resolvi que se nem isso consigo compreender, então quem sou eu para entender o que toca a Deus?*" (trad. de Paulo Bezerra em DOSTOIÉVSKI, 2012)

1.3. Sobre a fonte do texto, sua edição e sua tradução

Como descrito acima, conhecemos o texto de Pascal graças a uma cópia feita à mão por Leibniz. Ela segue preservada na Biblioteca Estadual de Hanover (*Gottfried Wilhelm Leibniz Bibliothek – Niedersächsische Landesbibliothek*), fundo Leibniz, Mathematik XXXV, vol. XV, I, *Pascaliana*, ff. 4-9.

Seguimos aqui a edição do texto feita por Jean Mesnard (disponível em PASCAL, 1964-1992, II, pp. 1108–1119).

[23] Sobre o conteúdo matemático do texto, ver ainda TATON, 1962 (em particular, pp. 236-238); HARA, 1981; e HOUZEL, 2013.

No que diz respeito à tradução, buscamos a maior literalidade possível, assim como não traduzir termos distintos no original latino pelo mesmo termo em português. Para os casos em que isso não foi possível, assim como para apresentar conotações interessantes dos termos, apresentamos notas de rodapé. Agradecemos a Frederico José Andries Lopes pela leitura atenta da tradução e por todas as sugestões – evidentemente, todos os erros que possam ter restado são de nossa inteira culpa.

Bibliografia

ANDERSEN, Kirsti. 2007. *The Geometry of an Art: The History of the Mathematical Theory of Perspective from Alberti to Monge*. New York: Springer.

BKOUCHE, Rudolf. 1991. La naissance du projectif. De la perspective à la géométrie projective. In: *Mathématiques et philosophie*, ed. R. Rashed. Paris: CNRS, 239–285.

CORTESE, João F. N. 2016. Leibniz e o paradigma da perspectiva. *Cadernos Espinosanos*, 34, 137–162.

CORTESE, João F. N. 2017. *L'infini en poids, nombre et mesure : la comparaison des incomparables dans l'oeuvre de Blaise Pascal*. Tese de doutorado em cotutela, Université de Paris 7 – Denis Diderot & Universidade de São Paulo.

CORTESE, João F. N. B. 2021. O "Ensaio Para As Cônicas" de Blaise Pascal. *Revista Brasileira de História da Matemática*, 21, 42, 180–205.

COSTABEL, Pierre. 1962. Traduction française de notes de Leibniz sur les « Coniques » de Pascal. *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, t. 15, n. 3–4, 253–268.

DEBUICHE, Valérie. 2016. L'invention d'une géométrie pure au 17e siècle: Pascal et son lecteur Leibniz. *Studia Leibnitiana*, 48, 42–67.

DE CARVALHO, Henrique Marins, ISKANDAR, Jamil Ibrahim, TRANJAN, Tiago, CORTESE, João F. N. B. & DE ARRUDA SAMPAIO, Vicente A. 2021. O Stomákhion de Arquimedes: tradução com notas e introdução. *Revista Brasileira de História da Matemática*, 21, 42, 14–51.

DEL CENTINA, Andrea. 2020. Pascal's mystic hexagram, and a conjectural restoration of his lost treatise on conic sections. *Archive for History of Exact Sciences*, v. 74, n. 5, 469–521.

DOSTOIÉVSKI, Fiódor. 2012. *Os irmãos Karamázov.* São Paulo: Editora 34.

HARA, Kokiti. 1981. *L'œuvre mathématique de Pascal*. Osaka: Osaka University Press, Memoirs of the Faculty of Letters, vol. XXI.

HOUZEL, Christian. 2013. Blaise Pascal et les sections coniques. In: *Les courbes: études sur l'histoire d'un concept*, ed. R. Rashed e P. Crozet. Paris: Blanchard.

KEPLER, Johannes. 1980. *Paralipomènes à Vitellion*. Trad. C. Chevalley. Paris: Vrin.

KEPLER, Johannes. 1604. *Ad Vitellionem paralipomena quibus astronomiae pars optica traditur*. Frankfurt: Claudium Marnium & Haeredes Ioannis Aubrii.

LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm.1923– . *Sämtliche Schriften und Briefe*. Darmstadt, Leipzig, Berlin: Akademie-Verlag.

MERSENNE, Marin. 1636. *Harmonie universelle, contenant la théorie et la pratique de la musique*. Paris: Sebastien Cramoisy.

MESNARD, Jean. 1994. Desargues et Pascal. In: *Desargues en son temps*, org. J. Dhombres e J. Sakarovitch. Paris: A. Blanchard.

PASCAL, Blaise. 1964–1992. *Œuvres Complètes*. Edição de Jean Mesnard. Paris : Desclée de Brouwer, volumes I (1964), II (1970), III (1991) e IV (1992). (Citado como OC).

TATON, René. 1962. L'œuvre de Pascal en géométrie projective. *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, t. 15, n. 3–4, 197–252.

João F. N. B. Cortese

Pesquisador associado ao Laboratoire SPHERE (UMR 7219) – CNRS & Université Paris Cité – França

E-mail: joaocortese@gmail.com

2. Tradução

GERAÇÃO DAS SEÇÕES CÔNICAS

DEFINIÇÕES

Se de um ponto, tomado fora do plano de um círculo, até um ponto tomado em uma circunferência, for traçada[24] uma linha reta, infinita em ambos os sentidos, [e se esta for] levada ao redor da circunferência, aquele ponto [o primeiro] permanecendo imóvel, a superfície que esta reta infinita descreve em sua circunvolução será dita superfície cônica; o espaço infinito compreendido no interior da superfície cônica será chamado cone; e o círculo será dito base do cone; o ponto imóvel, vértice; a parte da superfície que, do vértice, passando pela base, se estende ao infinito em um dos lados, será dita semissuperfície cônica; a reta tomada deste modo, onde quer que esteja situada na sua circunvolução, será dita vertical[25].

Corolário 1

Disso fica claro que se do ponto do vértice a um ponto qualquer, tomado na circunferência ou na superfície cônica, for traçada uma linha reta infinita, esta linha reta estará toda na superfície cônica, ou seja, será uma vertical.

Corolário 2

Se dois pontos tomados na superfície cônica forem ligados[26] por uma linha reta, e [se] esta, prolongada ao infinito, alcançar o vértice, [então] esta repousará inteiramente sobre a superfície cônica, ou seja, será uma vertical; se, ao contrário, ela não alcançar o vértice, não haverá nenhum ponto da reta, salvo os dois [pontos já] tomados, na superfície cônica, e a linha toda estará parcialmente dentro e parcialmente fora [do cone].

Corolário 3

Disso fica claro que não existem 3 verticais no mesmo plano, porque três pontos tomados na circunferência do círculo não podem estar na mesma reta.

[24] Literalmente, "conduzida" (*ducta*).

[25] Literalmente, a reta que vai ao vértice (*vertex*). Ela corresponde à reta que hoje denominamos "geratriz".

[26] O verbo *jungo* remete ao "jugo" utilizado em animais. Não deixa de ser interessante notar que já o termo grego ζυγόν (do qual um dos significados era também "jugo"), assim como termos derivados, apareciam igualmente em contexto geométrico – Arquimedes, por exemplo, usa o verbo ζεύγνυμι, com o sentido de ligar dois pontos, inclusive no seu *Stomákhion* (cf. DE CARVALHO et al., 2021).

Corolário 4

Então um plano infinito, onde quer que esteja posicionado, necessariamente encontrará uma superfície cônica, onde quer que esteja posicionada; pois, de quaisquer três verticais, uma necessariamente também encontrará este plano; tal intersecção[27] será dita seção de cone, ou, mais diretamente, "seção cônica".[28]

Escólio

Um plano e uma superfície cônica podem se encontrar de seis modos. Pois ou o plano encontra a superfície cônica somente no ponto do vértice: a seção cônica é então um ponto; ou o plano, passando pelo vértice, toca a superfície cônica [segundo] uma das verticais: tal seção cônica é uma linha reta; ou, atravessando o vértice, divide a superfície inteira em duas partes iguais: tal seção cônica é um ângulo reto; ou, não atravessando o vértice, não é paralelo a nenhuma das verticais: tal seção cônica é uma antobola,[29] pois volta-se sobre si mesma; ou, novamente não atravessando o vértice, é paralelo a apenas uma das verticais: tal seção cônica será dita parábola; ou, não atravessando o vértice, é paralelo a duas das verticais, e esta seção será dita hipérbole. Logo, há seis espécies de seções cônicas: o ponto, a linha reta, o ângulo reto, a antobola, a parábola, a hipérbole.

Definição 2

Uma reta é dita tender a um ponto, quando esta, prolongada conforme for necessário, alcança aquele; e uma reta é dita ser levada[30] ou tender a um ponto em outra reta a distância infinita quando ela é paralela a esta.

Definição 3

Duas ou mais retas, de qualquer modo que estejam posicionadas, são sempre ditas concorrentes,[31] e isso a distância ou finita, se elas se intersectam em um mesmo ponto, ou infinita, se são paralelas.

---

[27] Literalmente, "concurso" (*concursus*) – ver nota 31.

[28] No latim, *conisectio* aparece como "uma única palavra", o que é enfatizado por Pascal. É verdade que em português pode-se dizer simplesmente "cônica", mas fazê-lo na tradução desta expressão nos parece perder justamente o caráter da denominação de Pascal, que guarda a origem "genética" da curva: ela é encontrada como uma *seção* do cone, sendo portanto uma "seção cônica". Traduzimos, portanto, "*seu uno verbo*" por "mais diretamente", ao invés de por "uma única palavra". Outra opção teria sido cunhar o termo "conissecção".

[29] Seção cônica que hoje denominamos "elipse".

[30] Literalmente, "ser conduzida" (*duci*), ou, caso mantivéssemos a tradução acima de *duco* por "traçar", "ser traçada".

[31] Literalmente, "são sempre ditas concorrer" (*concurrere*). Vale notar o uso acima do verbo *occurro* (traduzido por "encontrar"), da mesma raíz *curro* ("correr").

Definição 4

Uma reta infinita traçada no plano de uma seção cônica, que corta[32] a seção cônica em um único ponto, é dita monossecante.

Definição 5

Uma reta infinita traçada no plano de uma seção cônica, que não atinge a própria seção cônica senão a distância infinita, e que é paralela a certas monossecantes, é dita assíntota.

Definição 6

Uma reta infinita traçada no plano de um círculo, que toca ou corta a circunferência deste, é dita ao círculo.

Corolário

[*Na margem*: Corolário sobre as imagens dos pontos da circunferência.]

Disso fica claro que, se o olho estiver no vértice do cone, se o objeto for a circunferência do círculo que é a base do cone, e se o quadro for o plano que encontra em ambos os lados a superfície do cone, então a seção cônica que será produzida por esse mesmo plano na superfície cônica, seja ela um ponto, seja uma reta, seja um ângulo, seja uma antobola, seja uma parábola, seja uma hipérbole, será a imagem da circunferência do círculo.

Corolário

As mesmas coisas estabelecidas,[33] se o plano do quadro não passar pelo vértice, [e] não for paralelo a nenhuma das verticais, ou seja, a nenhum raio, e por isso gerar uma antobola, é manifesto que todos os pontos da circunferência projetarão suas imagens sobre o plano do quadro da seção cônica a distância finita.

Escólio

Disso resulta que a antobola volta-se sobre si mesma e abraça um espaço finito.

Corolário

As mesmas coisas estabelecidas, se o plano do quadro for paralelo a uma única das verticais, ou seja, a um raio, e por isso gerar uma parábola, é manifesto que todos os pontos

[32] O verbo usado aqui é *seco*, cujo particípio designará as “secantes”.

[33] Literalmente, “postas” (*positis*). Cf. o termo *poser* no francês de Pascal do *Ensaio para as cônicas*, lema II (*in* CORTESE, 2021, p. 203).

da circunferência projetarão suas imagens sobre o plano do quadro da seção cônica a distância finita, exceto um ponto, que não terá imagem senão a distância infinita.

Escólio

Disso resulta que a parábola se estende ao infinito e gera um espaço infinito, embora seja a imagem da circunferência do círculo, que é finita e abraça um espaço finito.

Corolário

As mesmas coisas estabelecidas, se o plano do quadro for paralelo a duas das verticais, e por isso gerar uma hipérbole, é manifesto que todos os pontos dessa circunferência projetarão suas imagens sobre o plano da visão – ou, dito de outro modo, sobre o quadro – a distância finita, exceto dois pontos, cujas imagens, por causa do paralelismo, não serão encontradas senão a distância infinita; por isso são chamados pontos sem imagem do círculo, e, em relação à hipérbole, pontos deficientes.

Escólio 1

Disso resulta que a hipérbole se estende ao infinito e consiste em duas partes, qualquer uma das quais gera um espaço infinito; uma das semi-hipérboles é a imagem de uma parte da circunferência, e a outra, da outra; assim, cada um dos pontos da circunferência dá sua imagem em uma ou outra das duas semi-hipérboles, exceto por dois pontos, que não são encontrados em nenhuma semi-hipérbole senão a distância infinita.

Escólio 2

Dos três corolários precedentes, fica claro que há dois pontos deficientes na hipérbole, um único na parábola, nenhum na antobola.

Corolário

[*Na margem*: Sobre as imagens das secantes.]

As mesmas coisas estabelecidas, se o plano que corta a superfície cônica gerar uma antobola, todas as retas que cortam a circunferência do círculo projetarão[34] suas imagens sobre o plano da seção cônica, e estas cortarão a antobola em dois pontos.

[34] Pascal emprega neste texto verbos no subjuntivo e no indicativo, variando entre o tempo presente e o futuro (em particular, optando pelo futuro a partir deste ponto do texto). A fim de facilitar a compreensão do leitor, uniformizamos as construções em português.

Corolário

Se o plano que corta a superfície cônica [gerar uma parábola], todas as retas que cortam a circunferência do círculo projetarão suas imagens sobre o plano da seção cônica; porque se a reta que corta a circunferência não se estender até o ponto sem imagem, a imagem [da reta] no plano do quadro cortará a parábola em dois pontos; mas se a reta que corta a circunferência se estender até o ponto sem imagem, a imagem desta reta será paralela ao raio, e cortará a parábola em um único ponto.

Corolário

Se o plano que corta a superfície cônica[35] gerar uma hipérbole, toda reta que corta a circunferência do círculo e não se estender nem até um nem até o outro dos pontos sem imagem projetará sobre o plano da seção cônica sua imagem, que cortará a seção cônica em dois pontos. Mas se a reta se estender até um ou o outro dos pontos sem imagem, sua própria imagem cortará a hipérbole e cortará o triângulo em um único ponto; finalmente, se a mesma reta ligar ambos os pontos sem imagem, a imagem dessa reta não estará no plano da seção cônica, senão a distância infinita.

Corolário

[*Na margem*: Sobre as imagens das tangentes]

Estabelecidas as mesmas coisas que acima, se o plano do quadro gerar uma antobola, todas as tangentes da circunferência projetarão suas imagens sobre o plano do quadro, sendo tangentes à antobola em um ponto a distância finita.

Corolário

Se o plano do quadro gerar uma parábola, todas as tangentes à circunferência, exceto uma que se estende até um ponto sem imagem, projetarão suas imagens sobre o plano do quadro, as quais de fato serão tangentes[36] à parábola em um ponto a distância finita, que será a imagem do ponto de contato na circunferência.

Escólio

Logo, há na parábola uma reta deficiente, a qual de fato desempenha o papel de uma tangente, já que é a imagem de uma tangente.

[35] Este corolário apresenta uma pequena variação em relação ao anterior (e ao resto do texto): lemos *conicam superficiem* ao invés de *superficiem conicam*, *omnis recta* (no singular) ao invés de *omnes rectae* (no plural) e *projicit* (no presente) ao invés de *projicient* (no futuro). Tais diferenças não nos parecem ter implicações quanto ao conteúdo do texto.

[36] Literalmente, "tocarão" (*tangent*). Lembramos que o particípio *tangentes* pode ser traduzido tanto por "que tocam" quanto por "tangentes".

Corolário

Se o plano do quadro gerar uma hipérbole, todas as tangentes à circunferência projetarão suas imagens sobre o plano do quadro, mesmo caso se estendam até os pontos sem imagem; e, de fato, se as tangentes à circunferência não se estenderem até os pontos sem imagem, as imagens destas serão tangentes à hipérbole em um ponto a distância finita; mas se forem traçadas tangentes a pontos sem imagem, as imagens destas não atingirão a hipérbole, senão a distância infinita, e serão paralelas a um ou a outro dos raios.

Escólio 1

Disso se conclui que as assíntotas devem ser consideradas como, e tomadas por, tangentes a distância infinita.

Escólio 2

Conclui-se também do que precede que há na parábola uma série de retas paralelas entre si que cortam[37] a parábola em único ponto.

[*Escólio*] *3*

Conclui-se também que há na hipérbole duas séries de retas paralelas entre si, em cada uma das quais há uma reta que não atinge a hipérbole, senão a distância infinita, ou seja, que é assíntota. Enfim, fica claro que a parábola situa-se no meio entre a antobola e a hipérbole, pois:

Na antobola	*parábola*	*hipérbole*
Não há nenhuma vertical paralela;	Há uma paralela.	Duas verticais paralelas
Nenhum ponto deficiente.	Um dos pontos deficiente.	Dois pontos deficientes.
Consiste em uma linha finita.	Uma linha infinita.	Consiste em duas linhas infinitas.
Compreende um espaço finito.	Um espaço infinito.	Dois espaços infinitos.
Nenhuma série de paralelas.	Uma série de monossecantes.	Duas séries de monossecantes.

[37] Literalmente, "secantes" (*secantium*) à parábola.

3. Texto original[38]

GENERATIO CONISECTIONUM

DEFINITIONES

Si a puncto, extra planum circuli sumpto, ad punctum in peripheria sumptum ducta recta linea utrimque infinita circa peripheriam feratur, manente puncto illo immobili, superficies quam in sua circumvolutione describit infinita haec recta dicetur superficies conica; spatium infinitum intra superficiem conicam comprehensum vocabitur conus; circulus vero dicetur basis coni; punctum immobile, vertex; pars superficiei quae a vertice versus basim in infinitum ad alteras partes protenditur dicetur semi superficies conica; recta illo[39] modo assumpta, in quocumque circumvolutionis suae situ constituta, verticalis dicetur.

Corollarium 1

Hinc patet, si a puncto verticis ad quodlibet punctum in peripheria vel in superficie conica ubicumque sumptum ducatur recta linea infinita, totam hanc rectam lineam esse in superficie conica, seu verticali.

Corollarium 2

Si sumantur in superficie conica duo puncta, quae recta linea jungantur, et ipsa in infinitum producta ad verticem perveniat, tota haec superficiei conicae incumbit, seu verticalis erit; si vero ad verticem non perveniat, nullum erit punctum in recta praeter duo assumpta quod sit in superficie conica: tota vero linea erit partim intra, partim extra.

Corollarium 3

Hinc patet 3 verticales non existere in eodem plano, eo quod tria puncta in peripheria circuli sumpta non possunt esse in eadem recta.

Corollarium 4

Igitur planum infinitum ubicumque positum necessario occurret superficiei conicae ubicumque positae; quia ex tribus quibuscumque verticalibus una necessario occurret et huic plano; hic autem concursus dicetur sectio coni, seu uno verbo conisectio.

[38] Conforme a edição de J. Mesnard em PASCAL 1964-1992, vol. II, pp. 1108-1119.
[39] Nota de Mesnard: no manuscrito, *illa*.

Scholium

Occurrere autem sex modis possunt planum et superficies conica. Vel enim planum occurret conicae superficiei in solo verticis puncto: tunc conisectio est punctum; vel planum per verticem transiens tangit superficiem conicam[40] unam ex verticalibus: talis conisectio est recta linea; vel per verticem transiens dividit totam superficiem in duas partes aequales: talis conisectio est ang. rectilineus; vel per verticem non transiens, nulli ex verticalibus parallelum[41] est: talis conisectio est antobola, eo quod in se ipsam redit; vel rursus per verticem non transiens, uni tantum e verticalibus parallelum est: talis conisectio dicetur parabola; vel adhuc non transiens per verticem duabus e verticalibus parallelum[42] est, et dicetur sectio haec hyperbola. Sunt ergo sex conisectionum species: punctum, recta linea, ang. rectilineus, antobola, parabola, hyperbola.

Definitio 2

Recta ad punctum tendere dicitur, quae ad illud, si opus est producta, pervenit; et recta ad punctum in alia recta ad distantiam infinitam datum duci seu tendere dicitur quae ipsi parallela est.

Definitio 3

Duae rectae aut plures, quomodocumque sint positae, dicuntur semper concurrere, et quidem ad distantiam vel finitam, si se in eodem puncto intersecent, vel infinitam, si sunt parallelae.

Definitio 4

Recta infinita in plano conisectionis ducta, quae conisectionem secat in uno tantum puncto, dicitur monosecans.

Definitio 5

Recta infinita in plano conisectionis ducta, quae ipsam conisectionem non nisi ad distantiam infinitam attingit, et quibusdam monosecantibus parallela est, dicitur asymptotos.

Definitio 6

Recta infinita in plano circuli ducta, quae ipsius peripheriam tangit vel secat, dicitur ad circulum.

---

[40] Nota de Mesnard: uma lacuna do tamanho de uma palavra ao final da frase no manuscrito.

[41] Nota de Mesnard: no manuscrito, *parallela*.

[42] Idem.

Corollarium

[*Na margem*: Coroll. de apparentiis punctorum peripheriae.]

Hinc patet quod si oculus sit in vertice coni, sitque objectum peripheria circuli qui est coni basis, et tabella sit planum utrimque occurrens superficiei conicae, tunc conisectio quae ab ipso plano in superficie conica producetur, sive sit punctum, sive sit recta, sive angulus, sive antobola, sive parabola, sive hyperbola, erit apparentia ipsius peripheriae circuli.

Corollarium

Iisdem positis, si planum tabellae non per verticem transiens nulli e verticalibus seu nulli radio sit parallelum, atque ideo efficiat antobolam, manifestum est omnia puncta peripheriae projicere suas apparentias in planum tabellae conisectionis ad distantiam finitam.

Scholium

Inde fit ut antobola in se ipsam redeat et spatium finitum complectatur.

Corollarium

Iisdem positis, si planum tabellae uni tantum e verticalibus seu uni e radiis sit parallelum, ideoque efficiat parabolam, manifestum est omnia puncta peripheriae circuli projicere suas apparentias in planum conisectionis ad distantiam finitam dempto uno puncto, quod non apparet, nisi ad distantiam infinitam.[43]

Scholium

Inde fit ut parabola, in infinitum extensa, infinitum spatium suscipiat, quamvis sit apparentia peripheriae circuli quae finita est et spatium finitum complectatur.

Corollarium

Iisdem positis, si planum tabellae duobus e verticalibus parallelum sit, adeoque efficiat hyperbolam, manifestum est omnia puncta ejus peripheriae suas apparentias projicere in plano visionis tanquam tabella ad distantiam finitam, demptis duobus punctis quorum[44] apparentiae,[45] propter parallelismum, non nisi ad distantiam infinitam reperientur; ideoque vocabuntur puncta non apparentia circuli, et respectu hyperbolae, puncta deficientia.

[43] Nota de Mesnard: no manuscrito, *infinita*.
[44] Nota de Mesnard: no manuscrito, *quarum*.
[45] Nota de Mesnard: no manuscrito, *apparentia*.

Scholium 1

Inde fit ut hyperbola sit in infinitum extensa et duabus constet partibus, quarum quaelibet infinitum spatium suscipit; una ex semi-hyberbolis est apparentia partis unius peripheriae, altera alterius; sic singula puncta peripheriae dant suas apparentias in alterutra semi-hyperbolarum, demptis duobus punctis, quae in neutra semi hyperbola reperiuntur, nisi ad distantiam infinitam.

Scholium 2

Ex tribus praecedentibus corollariis patet duo esse puncta deficientia in hyperbola, unicum in parabola, nullum in antobola.

Corollarium

[*Na margem*: De apparentiis secantium.]

Iisdem positis, si planum secans superficiem conicam antobolam efficiat, omnes rectae quae circuli periph. secant projicient in planum conisectionis apparentias suas; quae quidem secabunt antobolam in duobus punctis.

Corollarium

Si planum superficiem conicam secans [parabolam efficiat], omnes rectae quae circuli periph. secant projicient suas apparentias in planum conisectionis; quod si recta secans peripheriam ad punctum quod apparentia caret non pertineat, ipsius apparentia in plano tabellae secabit parabolam in duobus punctis; si vero recta ipsa periph. secans ad ipsum punctum apparentia carens pertineat, ipsius rectae apparentia erit parallela radio et parabolam in uno tantum puncto secabit.

Corollarium

Si planum conicam superficiem secans efficiat hyperbolam, omnis recta quae circuli peripheriam secat et ad neutrum punctorum apparentia carentium pertineat, projicit in planum conisectionis apparentiam suam, quae secat conisectionem in duobus punctis. Si vero recta ipsa ad alterutrum punctorum apparentia carentium pertineat, ipsius apparentia secabit hyperbolam et in uno tantum puncto secabit triangulum; si denique ipsa recta jungat ambo puncta quae carent apparentia, ipsius rectae apparentia in plano conisectionis non erit nisi ad distantiam infinitam.

Corollarium

[*Na margem*: De appar. tangentium]

Iisdem adhuc positis quae supra, si planum tabellae efficiat antobolam, omnes tangentes peripheriam projicient suas apparentias in planum tabellae tangentes antobolam in puncto ad distantiam finitam.

Corollarium

Si planum tabellae efficiat parabolam, omnes tangentes peripheriam, una tantum dempta quae ad punctum non apparens pertinet, projicient suas apparentias in planum tabellae, quae quidem tangent parabolam in puncto ad distantiam finitam, quod erit puncti contactus in peripheria apparentia.

Scholium

Est ergo in parabola recta deficiens, quae quidem vice fungitur tangentis, cum tangentis sit apparentia.

Corollarium

Si planum tabellae efficiat hyperbolam, omnes tangentes periph. projicient suas apparentias in planum tabellae, etiamsi ad puncta non apparentia pertineant; et quidem si ipsae tangentes peripheriam ad puncta non apparentia non pertineant, ipsarum apparentiae tangent hyperbolam in puncto ad distantiam finitam; si vero ducantur tangentes ad puncta non apparentia, ipsarum apparentiae non nisi ad distantiam infinitam hyperbolam attingent et parallelae erunt alterutri radiorum.

Scholium 1

Colligendum hinc asymptotos censeri et sumi pro tangentibus ad distantiam infinitam.

Scholium 2

Colligitur quoque ex praecedentibus in parabola esse unam[46] seriem rectarum inter se parallelarum secantium parabolam in uno tantum puncto.

[46] Nota de Mesnard: no manuscrito, *una*.

[*Scholium*] *3*

Colligitur quoque in hyperbola esse duas series rectarum inter se parallelarum quarum in utraque una recta est quae non nisi ad distantiam infinitam hyperbolam attingit, seu quae est asymptotos. Denique patet parabolam tenere medium inter antobolam et hyperbolam, nam:

In antobola	*parabola*	*hyperbola*
Verticalis parall. nequidem una;	Una est parallela.	Duae verticales parall.
punctum deficiens nequidem unum.	Unum e punctis deficiens.	Duo puncta deficientia.
Constat finita linea una.	Una linea infinita.	Constat duobus lineis infinitis.
Comprehendit spatium finitum unum.	Unum spatium infinitum.	Spatia duo infinita.
Series parallel. nulla.	Una series monosecantium.	Duae series monosecantium.