

CONCEITOS ARITMÉTICOS, GEOMÉTRICOS E TRIGONOMÉTRICOS NO COMPASSO DE GALILEU

Iran Abreu Mendes

*Instituto de Educação Matemática e Científica
IEMCI/UFPA - Belém (PA) - Brasil*

(aceito para publicação em abril de 2024)

Resumo

Este artigo é resultado de uma investigação histórica sobre o livro *Operações no compasso geométrico e militar* de Galileu Galilei, publicado em 1606, com o objetivo de identificar possibilidades de interconexões que envolvam temas como aritmética, geometria e trigonometria plana, a partir da interpretação do livro. A pesquisa bibliográfica fundamentou-se em uma análise histórico-epistemológica exploratória e interpretativa de conteúdos expressos em publicações no passado que caracterizam a história da ciência, com base na interpretação como operação metódica de pesquisa historiográfica em busca de intersubjetivações a partir da exploração de fontes históricas. Os resultados do estudo mostraram que as experiências do passado contidas no livro, esclarecem minhas conjecturas estabelecidas internamente no decorrer do estudo. Assim, foi possível compreender que os fatos científicos estabelecidos no passado, presentes nas fontes consultadas, podem ser adaptados à formulação de exercícios e práticas investigativas que envolvam conceitos matemáticos extraídos das operações tratadas por Galileu no seu livro.

Palavras-Chave: Galileu. Compasso Geométrico e Militar. História da Ciência. Aritmética. Geometria. Trigonometria.

[ARITHMETIC, GEOMETRIC AND TRIGONOMETRIC CONCEPTS IN
GALILEO'S COMPASS]

Abstract

This article is the result of a historical investigation into the book *Operations in the Geometric and Military Compass* by Galileo Galilei, published in 1606, with the aim of identifying possibilities for establishing interconnections involving topics such as arithmetic, geometry and plane trigonometry, based on the interpretation of book. The bibliographical research was based on an exploratory and interpretative historical-epistemological analysis of contents expressed in publications in the past that characterize the history of science, based on interpretation as a methodical operation of historiographical research in search of intersubjectivations based on the exploration of historical sources. The results of the study showed that the past experiences contained in the book clarify my conjectures established internally during the study. Thus, it was possible to understand that scientific facts established in the past, present in the sources consulted, can be adapted to the formulation of exercises and investigative practices that involve mathematical concepts extracted from the operations discussed by Galileo in his book.

Keywords: Galileo. Geometric and Military Compass. History of Science. Arithmetic. Geometry. Trigonometry.

Apontamentos Introdutórios

A Ciência Moderna teve em Galileu um de seus principais precursores, pois muitos historiadores da Ciência consideram que foi com ele que se iniciou a consolidação de uma nova maneira de observar os fenômenos astronômicos em processos de sistematização fundados na matemática. Igualmente, a base de suas observações e experimentos contribuiu para que suas reflexões sobre os fenômenos naturais identificados lhe possibilitassem exercitar sua criatividade científica¹, que fizessem assim emergir novos princípios e valores científicos e, com isso, a elaboração de novos enunciados científicos por ele formulados.

O telescópio foi um exemplo do caráter revolucionário originado das observações de Galileu, pois com ele a explicação sobre a configuração do céu passou a ser observada com mais detalhes, tornando assim possível sua descrição de maneira mais concreta e sistemática. Consequentemente, os resultados de suas experiências possibilitaram o início de um processo de elaboração de uma teoria que posteriormente ultrapassaria os limites do mundo simples observável. Passava a existir, assim, uma diferença entre o mundo dado aos sentidos e o mundo real, configurado pelos conhecimentos teóricos e práticos

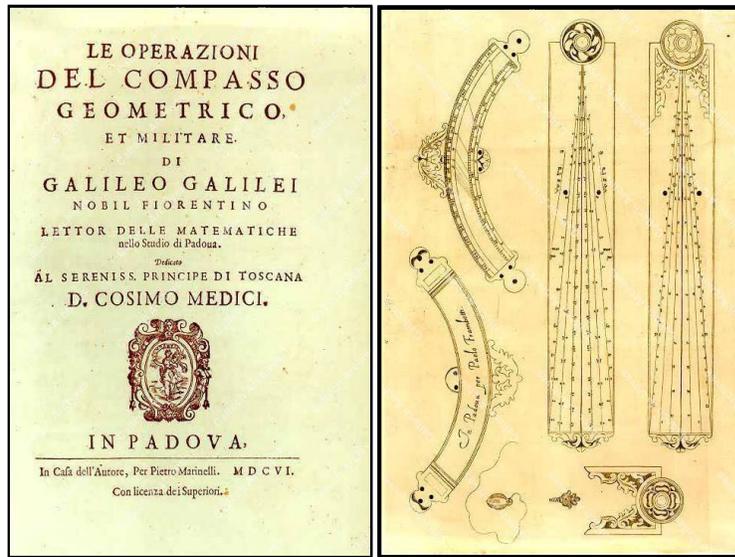
¹ A expressão *criatividade científica* neste trabalho é tomada com significados compostos a partir da proposta de Abraham A. Moles (1998; 2007) para criação científica e acrescido por outros significados incorporados de Mihaly Csikszentmihalyi (1998) sobre criatividade.

(experimentais) que conectavam a matemática com a ciência dos movimentos (a mecânica). Daí, portanto, o mundo explorado pela nova ciência construída, principalmente, a partir do século XVII.

Durante sua vida, Galileu Galilei desenvolveu alguns instrumentos e dentre eles, o compasso geométrico e militar, tema de seu livro publicado em 1606 sob o título *Le operazioni del compasso geometrico et militare* (A operação do compasso geométrico e militar), que focalizamos neste artigo. Houve um período de mais ou menos uns 8 anos da vida de Galileu, em que ele se dedicou e trabalhou em projetos de matemática aplicada. Um de seus projetos foi o aperfeiçoamento de um instrumento já existente, de modo a transformá-lo em um dispositivo mecânico de cálculo, denominado *compasso proporcional*, que na época o próprio Galileu intitulava *compasso geométrico e militar*. Do que se tratava afinal esse instrumento? Como funcionava? Qual a sua constituição matemática?

O livro elaborado por Galileu explicava a construção e os usos do referido instrumento na solução de diversos problemas matemáticos que envolviam grandezas e medidas em suas relações comparativas e correlativas. Historicamente, sua origem, desenvolvimento e uso posterior após a publicação do livro, refere-se a algumas observações gerais sobre seu compasso como suficientes antes de proceder às operações de medição das coisas mais variadas possíveis. As escalas eram marcadas com uma precisão de cerca de um por cento. O livro mostra o quanto o compasso de Galileu era quase tão bom quanto um instrumento de medição moderno para resolver problemas práticos.

Considera-se importante a publicação deste artigo, uma vez que após um estudo desenvolvido para realizar uma tradução livre do original de Galileu de 1606 apoiado em outra versão do mesmo livro, em uma edição publicada em inglês em 1978 (Drake, 1978), foi possível identificar que seria bastante adequado explorar o potencial conceitual da obra na intenção de explorar algumas práticas física-matemáticas do texto visando suas problematizações que interconectem conceitos aritméticos, geométricos e trigonométricos.



Figuras 1 e 2. Imagens relacionadas ao livro *Operações do Compasso Geométrico e Militar*. Na primeira temos a capa do livro de Galileu (1606) e na segunda uma imagem gravada por Paolo Frambotti, que foi adicionada à segunda edição do *Compasso* (Pádua, 1640.)

Fonte: <https://calisphere.org/item/fc0d53ad77587f432777250ac28e17a9/>. Acesso em 10.01.2024

Este artigo, portanto, está estruturado na forma de uma escrita comentada do tipo descritivo-analítica, a fim de apontar indicações do compasso como um artefato tecnológico para a exploração de temas matemáticos como aritmética, geometria e trigonometria plana em interconexões possíveis em física e matemática. Para a realização do estudo tomou-se como fundamento a interpretação de fontes históricas da ciência ou da matemática, presentes em livros do passado, tendo em vista a possibilidade de utilização das informações interpretadas, para formular exercícios de práticas investigativas que envolvam conceitos matemáticos e físicos extraídos das operações tratadas no livro de Galileu. Neste sentido a pesquisa foi desenvolvida com base em proposições de propõe Jörn Rüsen (2007) a respeito da unidade do método histórico, pautada em uma tríade operacional processual exploratória de fontes históricas que compreendem a heurística, a crítica e a interpretação. A heurística na forma de questionamentos e problematizações, a crítica como forma de composição de um cenário para a interpretação do que já foi dito e o que ainda pode ser interpretado sobre o objeto histórico investigado. Foi, portanto, com base neste tripé metodológico que se realizou o estudo investigativo do livro *O compasso geométrico e militar* de Galileu, momento em que lancei meus questionamentos internos em busca de estabelecer modos de interpretação das informações contidas no livro, tendo em vista

identificar possibilidades de estabelecer interconexões que envolvam temas como aritmética, geometria e trigonometria plana, a partir da interpretação do livro.

Para alcançar respostas aos meus questionamentos internos concernentes ao livro busquei as críticas em estudiosos sobre essa e outras obras de Galileu, a fim de poder reorganizar formas de interpretação do assunto, desde a tradução livre do texto, do original italiano e suas complementações na versão em inglês, até a identificação de operações aritméticas, geométricas e trigonométricas problematizadas no livro investigado.

Portanto, para além de tratar especificamente do compasso de Galileu considero importante mencionar, mesmo que de maneira sintética e direta, algumas informações acerca do contexto e da prática científica de Galileu para conformar melhor seu cenário de compreensão a respeito dos modos como o instrumento pode ter sido imaginado, gestado e disseminado objetivando a materialização do pensamento e das práticas que deram origem ao seu compasso geométrico e militar.

É importante destacar, também, que o compasso foi inicialmente idealizado para realizar diversas operações necessárias à arte da guerra como por exemplo medir calibres e pesos de tiro, apontamento dos canhões em direção aos alvos, solucionar problemas aritméticos e proporcionais, bem como na geometria plana e sólida, nos cálculos de grandes distâncias, alturas e profundidades. Além dessas operações, o compasso também foi muito utilizado como régua de cálculo por comerciantes, artesãos, engenheiros, topógrafos e astrônomos.

Para que todas as atividades práticas se efetivassem, Galileu inseriu às pernas do compasso várias escalas ou linhas proporcionais, denominadas *metais*, *estereométricas*², *geométricas*, *aritméticas* (na parte da frente), *poligráfica*, *tetragônica* e *adicional* (na parte traseira). Quando o compasso funcionava como o quadrante de artilheiro, como quadrante simples ou como quadrante geométrico, as pernas do equipamento eram mantidas fixas sob ângulos retos, no formato de um quarto de círculo (*setor*), gravado com várias escalas: a escala do artilheiro, dividida em 12 partes, a escala de grau (90°), a escala de gradiente, dividida em 10 partes e a escala do quadrado da sombra, dividida em 200 partes (100 + 100)³.

A esse respeito, estudiosos da obra de Galileu asseguram que se tratava de um invento semelhante a uma régua de cálculo na forma de um setor circular, que continha várias escalas e era usado para medir ângulos e fazer cálculos. O referido compasso era composto por duas pernas achatadas, cujas medidas corresponderiam ao que hoje no sistema métrico decimal é aproximadamente 30 cm de comprimento e 2,5 cm de largura. Conforme já foi mencionado anteriormente, nessas pernas eram dispostas várias régua geométricas numeradas, de modo a subsidiar o processamento de medição e efetuação das operações de escala, assim como do exercício de práticas matemáticas comparativas de medição, que envolviam o conceito de proporcionalidade (figura 3).

² Esse termo refere-se a *Estereometria* como uma parte da geometria espacial, ou seja, ao estudo das figuras tridimensionais e suas propriedades, e que trata da medida do volume dos sólidos. Provavelmente pode ter se originado da definição *estereométrica das curvas* presentes na obra de Menaecmus.

³ Na versão original do livro, Galileu não menciona o uso do compasso no levantamento e medição de terras. No entanto, esse aspecto foi adicionado às operações efetuadas com tal instrumento, em uma versão de seu tratado que foi mencionada na *Opera omnia* de Girolamo Cardano em 1663, publicada em Lyon.

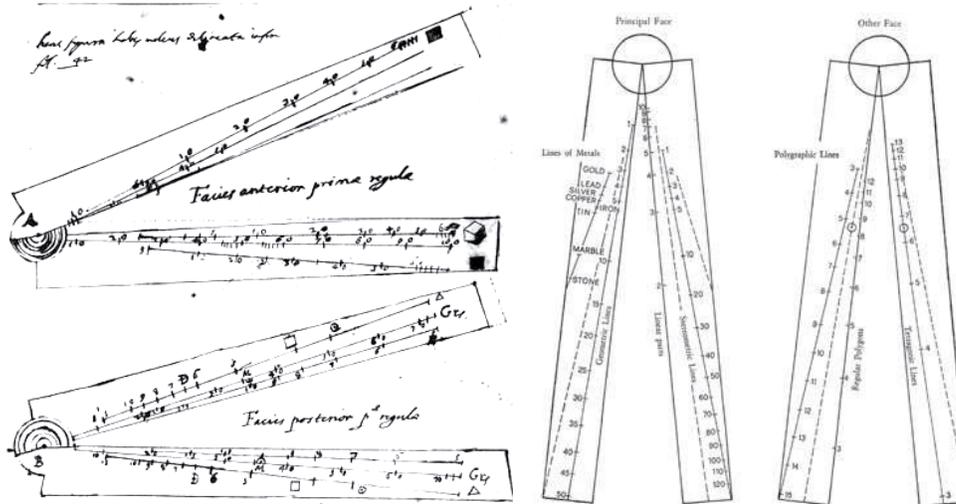


Figura 3. Desenho do compasso de Galileu com as escalas estabelecidas em sua construção.

Fonte: Drake (1978)

Galileu Galilei: o contexto e sua prática científica

Para além de tratar especificamente do compasso de Galileu considero importante que o leitor possa conhecer, mesmo que de maneira sucinta, informações sobre seu itinerário pessoal e científico até seu processo de imaginação, gestação e divulgação do instrumento, no sentido de seu pensamento matemático forjado no compasso geométrico e militar.

Em diversas publicações relacionadas à vida e obra de Galileu⁴, que foram consultadas, consta que Galileu Galilei nasceu em Pisa (Itália) no dia 18 de fevereiro de 1564, sendo o filho mais velho do matemático, comerciante e músico profissional Vincenzo Galilei⁵, um conhecedor sobre teoria musical que ficou conhecido pela experiência realizada com fios para tentar provar suas teorias a respeito da natureza da música.

Em virtude de sua família mudar-se para Florença, por volta de 1575 Galileu ingressou na escola do convento de Santa Maria de Vallombrosa e anos mais tarde (por volta de 1578) incorporou-se na referida ordem religiosa, contra o desejo de seu pai, ficando confinado aos estudos com os monges de Vallombrosa até 1581, quando foi enviado a Universidade de Pisa como estudante de medicina. Todavia, em pouco tempo de estudos se desinteressou pelo curso e decidiu estudar matemática. Seu pai permitiu que ele

⁴ A esse respeito pode-se destacar DRAKE, Stillman. *Essays on Galileo and the History an philosophy of Science*. V. III. Toronto: University of Toronto Press, 1999.

⁵ Sobre Vincenzo Galilei ver o livro de Carla Bromberg intitulado *Vincenzo Galilei: contra o número sonoro*. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

deixasse a universidade sem ter obtido o diploma, e retornar a Florença para estudar e ensinar matemática.

Por volta de 1586 Galileu já questionava a ciência e a filosofia aristotélica, preferindo reexaminar o trabalho de Arquimedes, período que o levou em 1589, a tornar-se professor de matemática na Universidade de Pisa, cujo trabalho seguiu-se até 1592, quando passou a ensinar matemática em Pisa, de forma independente, enquanto estudava com Jacopo Mazzoni (Giacopo Mazzoni)⁶, um distinto professor de filosofia, que tornou-se seu amigo. Foi nesse período que, com aproximadamente vinte e cinco anos de idade, Galileu desenvolveu um conhecimento mais profundo de astronomia e começou a romper com as ideias de Aristóteles e Ptolomeu. Notas de aula recuperadas deste período demonstram que Galileu adotava o enfoque de Arquimedes sobre o movimento mais especificamente. Ainda em Pisa escreveu *sobre o movimento (De Motu)*, livro que contrariava as teorias aristotélicas de movimento e que o colocou como um líder da reforma científica.

Em 1592, Galileu saiu de Pisa em virtude de o salário ser muito baixo e, com a ajuda do amigo chamado Guidobaldo Del Monte, foi nomeado catedrático de matemática na Universidade de Pádua, na República de Veneza. No ano seguinte (1593) criou tratados sobre fortificações e mecânica, para seus alunos particulares e inventou uma bomba para elevar água. Por volta de 1597, em uma carta enviada ao seu amigo Mazzoni, passou a defender a teoria heliocêntrica de Copérnico sobre o universo. No mesmo ano inventou seu compasso geométrico e militar que se tornou útil para mestres construtores (engenheiros), mecânicos e militares, período em que começou a se corresponder com Kepler em virtude de ter simpatizado com sua visão sobre a teoria copernicana, e principalmente por saber que Kepler também apoiava a teoria heliocêntrica da Terra. Entretanto, os interesses científicos de Galileu estavam ainda concentrados sobre a mecânica.

Em outubro de 1608 o holandês Hans Lipperhey reivindicou a patente de uma luneta capaz de fazer com que objetos distantes aparentassem estar mais próximos. Quando soube da invenção, Galileu tentou aperfeiçoá-la e em pouco tempo projetou um telescópio três vezes mais poderoso. Dentro de um ano, criou um telescópio com potencial trinta vezes maior. Assim, lançou a possibilidade de mostrar o cosmo de forma amplamente aberta para a sociedade daquele período. Suas descobertas surpreendentes – incluindo os satélites de Júpiter – foram reveladas em 1610 em seu *Sidereus Nuncius*⁷, o que o levou a ser nomeado como matemático e filósofo do grão-duque da Toscana. A partir desses resultados, a lua deixou de ser um disco perfeito e passou a mostrar suas montanhas e crateras. Do mesmo modo a Via Láctea passou a ser vista como uma vasta aglomeração de estrelas individuais (Koyré, 2001).

⁶ Jacopo Mazzoni nasceu em Cesena em 27 de novembro, em 1548 e faleceu na mesma cidade em 10 de abril de 1598. Estudou filosofia e literatura em Pádua. Foi membro da Academia de Crusca e da Academia florentina. Ele se tornou um professor universitário, primeiro em Macerata e depois para Pisa, onde ensinou filosofia de novembro 1588 até 1597, período em que conheceu Galileu, quando era um jovem instrutor de matemática. (Ver: <http://brunelleschi.imss.fi.it/itineraries/biography/JacopoMazzoni.html>).

⁷ A expressão *Sidereus Nuncius* é geralmente traduzida para o inglês como *Mensageiro Sideral*, embora alguns autores denominem de *Mensageiro das estrelas*. Foi um pequeno tratado escrito e publicado por Galileu Galilei em março de 1610. Foi o primeiro tratado científico baseado em observações feitas através de um telescópio. O tratado contém os resultados das primeiras observações da Lua, das estrelas e das luas de Júpiter, por Galileu.

Mas foi durante uma visita à Roma, em 1611, que Galileu demonstrou o poder de seu telescópio e defendeu a visão heliocêntrica de Copérnico nos meios intelectuais daquele período e contexto, publicando seus argumentos mais tarde em suas *Cartas sobre manchas solares* (1613), o que lhe tornou imediatamente alvo de ataques, principalmente pelas autoridades da Igreja católica, que o atacaram fortemente, apoiadas em justificativas teológicas, que o proibiram de manter ou ensinar a visão Copernicana. Tais problemas se seguiram, após novas publicações de Galileu em 1616, sobre a teoria das marés, na qual tentou provar que a Terra se movia. Embora não tenha sido condenado pela Santa Inquisição foi severamente advertido sobre as teorias copernicanas, que eram consideradas contrárias à Igreja Católica, e que deveriam ser apresentadas apenas como hipóteses (Hannam, 2021).

Em meio ao quadro polêmico, Citino (2001) menciona que Galileu organizou uma Academia de Refugiados – uma espécie de grêmio científico e filosófico – formado por homens que tinham fugido de outras partes da Itália para Veneza a fim de continuar seus estudos e expressar suas ideias livremente. Foi nesse lugar que Galileu divulgava os resultados de suas observações e experiências, e também explicava a função de seus inventos como o *compasso geométrico e militar*; o *termômetro*, um invento útil para medir a temperatura; suas explicações sobre os mistérios do *imã* e das forças magnéticas da Terra; e por fim o telescópio, considerado a mais importante de suas invenções, pois se tratava de um instrumento para contemplar e analisar as estrelas.

O compasso e o livro publicado

O *compasso geométrico e militar* de Galileu já foi foco de diversos estudos realizados por pesquisadores em história da Ciência, principalmente sobre ciências físicas e matemáticas e as tecnologias. Dentre esses trabalhos é possível destacar um dos primeiros que foi realizado por Mattia Berneggeri, em 1741, quando publicou uma versão do livro de Galileu com suas anotações e comentários sobre o compasso geométrico e militar. A publicação foi organizada em duas partes. A primeira contém uma versão atualizada do original de 1606, seguida de uma segunda parte na qual Berneggeri faz comentários a respeito dos fundamentos geométricos que envolvem os modos pelos quais Galileu se fundamentou para ensinar a construção e o uso do seu compasso.

Além disso, Berneggeri demonstrou todos os princípios matemáticos que envolviam a construção de Galileu. Por fim demonstrou que o uso do instrumento contribuía para que se compreendesse melhor diversos problemas apresentados em *Os Elementos* de Euclides, relacionados à geometria (e à goniometria ou trigonometria⁸), nos quais o compasso podia ser utilizado como ferramenta prática na resolução de tais problemas. Isto porque, embora o compasso aparentasse estar dirigido para a realização de operações militares, suas aplicações poderiam ser aplicáveis a qualquer outra atividade profissional que exigisse conhecimentos elementares de aritmética e geometria, revelando-

⁸ Os conceitos relacionados à goniometria e trigonometria eram considerados essenciais para abordar atualmente exercícios práticos das artes de medição denominadas de topografia, pois se trata de um raciocínio simples sobre ângulos e triângulos para se calcular distâncias, existentes entre dois objetos quando não se pode medi-lo diretamente com precisão.

se, assim, sua utilidade direta para atividades dos comerciantes, diversos tipos de artesãos, construtores de fortificação e outras obras de engenharia da época, agrimensores e astrônomos.

Foi provavelmente com essas intenções que Galileu começou – a partir de um problema complexo sobre prática em artilharia –, e estendeu seu instrumento para qualquer problema prático de seu tempo, que requeria domínio teórico-prático desse conhecimento matemático. Neste sentido, o instrumento resolveu rapidamente, e com precisão suficiente, os problemas de proporção, raiz quadrada e cúbica, comparação de áreas ou volumes, construção de modelos, e vários problemas militares básicos. Estudiosos sobre a obra de Galileu asseveram que naquele período ele foi imediatamente plagiado, fazendo com que muito cedo sua vida ingressasse no campo da escrita polêmica, no qual sua habilidade o tornou famoso posteriormente.

É possível, portanto, interpretar que a invenção do compasso geométrico e militar por Galileu se constituiu no resultado final de uma investigação que o levou a uma progressiva transformação do compasso simples em um instrumento de cálculo, medição e observação astronômica, que envolveu muitos conceitos matemáticos e técnicos relacionados aos saberes e práticas militares do século XVI.

Um exemplo similar de uso prático dos princípios e métodos relacionados ao compasso de Galileu aparecem em um livro publicado em língua espanhola, em 1606, de autoria de Andres de Cespedes, intitulado *Instrumentos Nuevos de Geometría*, no qual o autor apresenta um instrumento prático de geometria denominado Quadrante Geométrico, desenvolvido para que qualquer pessoa possa medir alturas de montanhas, profundidades de vales e distâncias para transpor tais “acidentes” geográficos sem a necessidade de cálculos. O livro trata também de técnicas envolvidas em algumas práticas relacionadas aos aspectos teóricos e práticos da matemática para determinar o alcance de projéteis, precisão do tiro, transporte das peças em campos de batalha, bem como a formação de artilheiros, técnicos de artes liberais, dentre outros profissionais.

Ao pesquisar sobre o itinerário relacionado à invenção do compasso por Galileu identifiquei que diversos estudiosos sobre sua vida e obra destacam que durante um certo período (possivelmente no final do século XVI) ele construiu e vendeu alguns de seus compassos com a finalidade de conseguir dinheiro com seu invento, embora não tenha obtido um lucro esperado, uma vez que seu rendimento maior acabava por vir das aulas que ministrava para ensinar o modo de usar o referido compasso.

Na pesquisa identifiquei também que após ser apontado para a cadeira de Matemática na Universidade de Pádua em 1592, Galileu começou a dar instruções particulares a respeito de certos assuntos que naquela época não eram contemplados pelo currículo oficial da referida universidade, como por exemplo em um dos primeiros cursos oferecidos pela instituição, que tratava de arquitetura militar e fortificação. Provavelmente as ideias que originaram as operações do *compasso geométrico e militar* de Galileu devem ter surgido a partir de tais atividades, e se tornaram o foco principal de seu primeiro livro impresso que se tem registrado em seu itinerário pessoal-profissional.

O itinerário de transformação do instrumento de compasso simples a compasso geométrico e militar foi favorecida particularmente pela forma triangular do instrumento, que permitiu visualizar o princípio geométrico fundamental da proporcionalidade

relacionada aos triângulos semelhantes, uma vez que desde a Antiguidade este princípio foi a base dos métodos de medição terrestre e celeste, na Idade Média favoreceu o desenvolvimento do cálculo algébrico, e posteriormente no Renascimento foi fundamental na invenção da perspectiva linear, e continuou a provar o seu valor em todas as aplicações das ciências matemáticas (Hannam, 2021).

Todavia, há diversas narrativas historiográficas que explicam a origem e processo de elaboração e funcionamento do compasso assegurando que no decorrer dos anos o instrumento começou a se configurar como uma consolidação de dois outros que haviam por muito tempo sido de uso geral pelos práticos de artilharia, na medida em que lhe foram acrescidas algumas melhorias e extensões de seus usos. Talvez porque naquela primeira forma, as únicas escalas marcadas nele eram no arco do quadrante, e somente em 1596 Galileu compôs um pequeno tratado sobre a medida de distâncias e altitudes através da observação e triangulação que sobreviveu como um apêndice em seu livro posterior.

Porém, foi possivelmente em 1597 que Galileu começou as marcações de escalas ao longo das pernas do instrumento, iniciando com duas que foram eliminadas subsequentemente; aquelas duas primeiras ele simplesmente tirou de um instrumento de esboço que foi provavelmente projetado não muito antes por seu mentor e amigo, o Marquês Guidobaldo Del Monte⁹.

No mesmo ano ele acrescentou outras escalas, algumas das quais foram inventadas por ele próprio, e que tinham um valor importante para as práticas profissionais dos homens de artilharia, bem como para os engenheiros militares, mas que foram inseridas nas instruções propostas por Galileu para o uso de seu *compasso*, provavelmente datadas de 1597, vindo a ser modificadas em várias adições breves, operacionalizadas em 1599. Delas existem duas cópias, ambas pertencendo inicialmente a outro amigo e mentor, Gian Vincenzo Pinelli¹⁰, e posteriormente à Biblioteca Ambrosiana em Milão.

Naquele período, o compasso havia se tornado um aparelho de cálculo mecânico, mas permaneceu limitado à aplicação em vários problemas geométricos e militares. No começo de 1599 Galileu o havia desenvolvido para ser um calculador mecânico de propósito geral que pudesse resolver de maneira rápida e prática e simples, qualquer problema matemático prático que surgisse, de modo que não requeresse um conhecimento

⁹ Guidobaldo Del Monte estudou matemática em Pádua. De 1572 a 1575 concluiu suas lições particulares de Commandino (1509–1575) em Urbino. Em 1577 publicou *Mecânica*. Seu comentário sobre o trabalho de Arquimedes (287–212 B.C.E.) em centros de gravidade apareceu em 1588. Galileu (1564-1642) estudava o texto de Arquimedes ao mesmo tempo e enviou a Guidobaldo seus teoremas sobre o assunto. Em 1588, Guidobaldo foi nomeado inspetor das fortificações do Grão-Ducado da Toscana. No entanto, ele passou a maior parte do tempo em Monte Baroccio, perto de Urbino, continuando seus estudos e experiências e publicando outros trabalhos sobre matemática e mecânica. Ele permaneceu em correspondência intermitente com Galileu até sua morte. Trecho extraído de: <http://brunelleschi.imss.fi.it/itineraries/biography/GuidobaldoMonte.html>.

¹⁰ Gian Vincenzo Pinelli nasceu em Nápoles em 1535, filho de Cosmo e Clementina Ravascheria. Dedicou-se aos estudos de latim, grego, hebraico, francês e espanhol, medicina e botânica, por fim música. Em 1558 mudou-se para Pádua a fim de estudar Direito, mas lá nunca obteve um grau, preferindo dedicar-se a cultivar seus interesses de forma independente, e formou uma espécie de museu científico e biblioteca que constituem a maior de sua benevolência para estudar. Faleceu em 1601. (Trecho extraído de: https://www.treccani.it/enciclopedia/gian-vincenzo-pinelli_%28Dizionario-Biografico%29/. Acesso em 06/04/2-15.

prévio de matemática, e que o instrumento pudesse ser utilizado de maneira suficientemente acurada para propósitos práticos simples e ordinários.

De acordo com informações mencionadas em comentários críticos de Stillman Drake (1977, 1978; 1999), no período em que Galileu apresentou seu compasso, nenhum instrumento conhecido havia previamente proposto coisa similar que realmente fosse comparável ao que havia surgido na proposta de Galileu, apesar de que haviam aparecido em várias formas de contribuições práticas à realização do cálculo, mas não com aquele formato e princípios conectados. Tratava-se, portanto, de um exercício de criatividade do cientista para materializar um modelo que atendesse aos princípios e métodos estabelecidos por ele, mas que precisavam ser mais práticos e diretos em seus usos.

Não há dúvida que outras invenções mais antigas que tinham essas características, mesmo que parciais, já haviam sido materializadas, como por exemplo o ábaco, embora limitado a contagem e operações aritméticas e de pouco uso ou uso restrito para extração de raízes ou mesmo para a resolução de problemas de divisão longa. Outros instrumentos já conhecidos e utilizados eram o quadrante e o astrolábio, que também forneciam contribuições práticas para observação, medição e operação numérica com propósitos especiais. Tais instrumentos eram considerados engenhosos e complexos e com aplicabilidade restrita em práticas matemáticas simples.

Invenções como as mencionadas anteriormente possibilitam compreender a rápida difusão do *compasso geométrico e militar* de Galileu, que na época ficou conhecido como o *setor*, nome este conferido a um instrumento muito similar ao de Galileu, embora mais simples, cujo autor foi Thomas Hood, que em 1598 publicou em Londres um livro sobre tal instrumento (Drake, 1978). Uma das consequências imediatas foi que a pesquisa topográfica e o mapeamento de terrenos, referentes ao estudo do relevo, se tornaram possíveis para qualquer interessado, sem que fossem mais necessários os serviços de especialistas treinados para essa prática.

Ainda sobre o assunto, Drake (1977, 1978, 1999) reitera que provavelmente o *setor* teve efeitos imediatos no arsenal veneziano, um lugar que Galileu visitava frequentemente para falar com trabalhadores braçais e capatazes, como o fazia geralmente com artesãos e mecânicos. Para trabalhar nas estruturas de modelos em tamanho real anteriormente havia necessidade da ação de especialistas no assunto. Com base em informações referentes a esses movimentos é possível admitir que daquele momento em diante o uso do setor diminuiu esse tipo de problema, tornando mais simples as definições e as leituras de fenômenos que necessitavam desse instrumento para fazer determinadas observações.

Sobre a importância científica que o compasso de Galileu pode ter exercido em sua época, em seu artigo intitulado *Il compasso geometrico e militare. Originalità, valore scientifico e utilizzazione economica dell'invenzione*, Roberto Vergara Caffarelli (1992) destaca que na época de Galileu o sistema de numeração decimal (com implicações nas medidas) ainda era considerado um sistema bastante recente, uma vez que, um braccio¹¹

¹¹ O *braccio* (braço) era muito usado como uma medida de comprimento, mas diferia de uma cidade para a outra. Os valores relacionados ao braccio florentino são mostrados no *syllabus* (Programa de Estudos) de Galileu sobre fortificações, escrito em Pádua.

fiorentino era dividido em vinte soldo (cerca de 23 polegadas) e um soldo era dividido em doze piccioli ou denari; um braccio veneto (braço veneziano) foi dividido em doze onças e uma onça em doze punti. Significava que sistemas não decimais eram usados para peso, quadrado, medidas cúbicas e moedas também. Portanto, na maioria das vezes, era mais simples expressar a parte não inteira por meio de frações relacionadas às unidades de medidas ou monetárias de cada local.

Igualmente, Caffarelli (1992) destaca que mesmo as operações aritméticas simples não eram muito fáceis e uma das dificuldades crescentes correspondia ao processo de extrair raízes quadradas ou cúbicas, mesmo que o compasso pudesse favorecer o processo operatório de multiplicação, pois a multiplicação de dois números estava incluída na regra de três no livro sobre o compasso de Galileu. Logo, seria conveniente usar o compasso de Galileu quando fosse conveniente fazer tais operações.

Em sua forma de elaboração estrutural, o livro *Operações do compasso geométrico e militar* de 1606, foi organizado em quatro partes. A primeira concernente à divisão de uma linha qualquer e as operações de construções geométricas que envolvem essa linha. A segunda que trata do modo como se podia medir em qualquer linha dada quantas partes fossem solicitadas. Na terceira parte Galileu mostrava como estas mesmas linhas nos dão duas, e mesmo em quantidade infinita, escalas para transformar um mapa em outro, maior ou menor. Na quarta e última parte, tratava da regra de três, resolvida por meio de um compasso e dessas mesmas linhas aritméticas, seguindo com a regra de três, inversa, resolvida por meio dessas mesmas linhas.

Da constituição e operações matemáticas do compasso de Galileu

O compasso de Galileu pode ter sido o primeiro tipo de dispositivo com múltiplas possibilidades de alternativas matemáticas conjugadas para resolver problemas que envolvem cálculos relacionados à medidas em linhas, superfícies, volumes, na forma de operações aritméticas e geométricas por meio da manipulação de noções de física. Conforme já mencionado, o dispositivo prático era constituído por duas pernas interconectadas por uma dobradiça circular, nas quais eram inscritos em pares de escalas de cálculo: uma escala em cada perna, partindo do centro e sendo utilizada com um compasso com pontas secas (Figura 4).



Figura 4. Imagem do compasso geométrico e militar

Fonte: Firenze, Istituto e Museo di Storia della Scienza, Inv. 2430

As linhas aritméticas, divididas em 250 partes iguais, eram usadas para dividir uma linha, mudar a escala de um mapa, realizar cálculos com a regra de três ou calcular câmbio de moedas e até juros. Para dividir uma linha, segundo um exemplo dado por Galileu, em 5 partes iguais, bastava tomar o seu comprimento com um compasso com pontas secas, em seguida fazer com que esse comprimento correspondesse à abertura do compasso de proporção ao nível. A partir da centésima graduação dos ramos, a abertura do compasso no nível das graduações 20-20 dava, então, o comprimento dividido por 5.

As linhas geométricas eram divididas em progressão geométrica até 50, ou seja, se a primeira graduação estava localizada a uma distância x do centro que correspondia ao lado de um quadrado de referência, a n ésima graduação estava localizada em uma distância y do centro que correspondia ao lado de um quadrado de área n vezes maior que aquele de referência.

Para Frémontier-Murphy (2013), o modelo de Galileu também ficou conhecido inicialmente como o quarto de círculo (quadrante de círculo) ou setor, devido à inserção de um pequeno quadrante que foi fixado na abertura do compasso, para assim ser usado com um fio de prumo preso à dobradiça com a finalidade de medir a inclinação de canhões ou de muralhas de uma fortificação, bem como para medir alturas, torres ou montanhas.

O instrumento também servia para calcular distâncias inacessíveis como era feito com o quadrado de sombras, inscrito nas costas dos astrolábios e munido de uma régua com miras, que focavam, por exemplo, no topo de um edifício. O triângulo formado pela régua com mira e os lados do quadrado das sombras era proporcional ao formado pela altura e pela distância que separava o observador do edifício, conforme representado na figura 5.

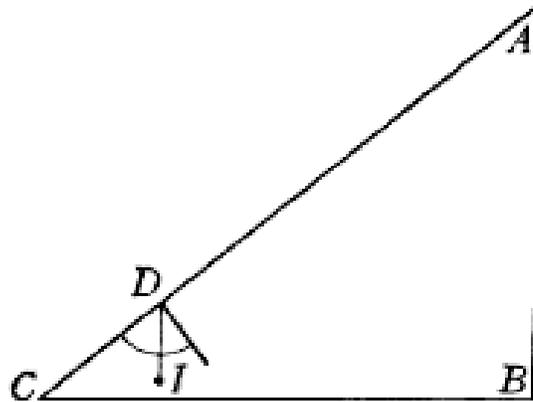


Figura 5. Representação de medição por observação sobre as alturas de objetos, com auxílio do compasso de Galileu.

Fonte: Operações do compasso geométrico e militar de Galileu (1606).

De acordo com as descrições apresentadas por Bernaggieri (1741) e posteriormente por Drake (1978, 1999), o *setor* de Galileu era um instrumento melhor para homens que não tinham uma preparação sofisticada em matemática, uma vez que no setor a maioria dos problemas geométricos poderia ser resolvida sem traduzi-los para números e depois traduzir as soluções de volta para grandezas geométricas. As operações com o setor eram executadas com mais facilidade do que suas sugestões verbais pudessem indicar. Basicamente existiam apenas três operações: fixar a separação das pernas, medir a separação do centro até um ponto ao longo de uma de suas escalas e medir a distância transversalmente entre um ponto e o ponto correspondente na outra perna. Quando fosse necessário essas distâncias eram medidas em um par de divisores de forma que elas pudessem ser transportadas com maior precisão para outra posição no setor, para o papel, ou para um objeto físico envolvido no problema.

Assim, o setor poderia resolver problemas de áreas sobre figuras formadas por linhas retas e por círculos ou semicírculos, de modo a generalizar princípios da tradição geométrica euclidiana, por meios mecânicos que explorassem experimentalmente medidas de figuras formadas por linhas retas e arcos circulares em qualquer número e qualquer arranjo. Com base nessas interrogações Galileu propôs que através das *Linhas Adicionadas* descritas por ele, poderia ser criada uma escala dupla, marcada ao longo de ambos os lados das mesmas linhas, com um par de números sendo para a corda de um segmento circular e o outro par para a altitude do segmento.

Essa escala dupla ficava mais bem posicionada perto das bordas externas das pernas, onde Galileu havia colocado sua *escala poligráfica*, abandonando a escala de Guidobaldo por polígonos regulares que haviam sido colocados lá anteriormente, pois a

construção de polígonos regulares poderia ser bem executada com uso das *Linhas Poligráficas*, com apenas uma operação adicional simples, conforme explicado por Galileu. Finalmente, na outra face do setor, a velha escala para divisão de uma linha em um dado número de segmentos foi substituída pelas *Linhas Aritméticas*. Elas resolviam o problema original com apenas um passo simples adicional, e ao mesmo tempo expandia grandiosamente a gama de divisões que poderiam ser feitas.

Logo na Operação I do seu livro sobre o compasso militar e geométrico Galileu descreveu procedimentos que determinariam divisões mais precisamente do que fazemos simplesmente com uma boa régua. Mas a maior vantagem era que as *Linhas Aritméticas*, substituindo a escala de partes iguais, habilitariam o usuário do setor a resolver mecanicamente qualquer problema de regra de três com precisão suficiente para propósitos práticos e com mais rapidez.

Essas linhas aritméticas correspondiam ao desenvolvimento natural das linhas geométricas e estereométricas que as haviam precedido, como foi mostrado pelas suas instruções originais para seu primeiro modelo, do qual, atualmente, não se sabe da localização ou da existência de nenhum exemplar. Em seguida adicionou seções de escala de mapas, extração de raiz quadrada e cúbica, aplicações de problemas de proporcionalidade e coisas afins. Com essa configuração o compasso galileano mostrou ser possível realizar operações aritméticas sem problemas de dados geométricos e físicos, e talvez seja isso que o autor quis dizer ao associar no título de sua publicação as palavras *operações e geometria*, o que evidenciava algumas interconexões das quais este artigo trata.

Para justificar tal aspecto, na Operação IV, denominada *A regra de três resolvida por meio de um compasso e dessas mesmas Linhas Aritméticas*, Galileu se referiu a Euclides afirmando que as linhas aritméticas seriam usadas não só para resolver vários problemas lineares, mas também para algumas regras aritméticas, entre as quais aquela que corresponde ao que Euclides menciona nos *Elementos*: dados três números, encontre o quarto proporcional. Para Galileu tratava-se da *Regra de Ouro*, chamada de *Regra de Três* pelos homens de prática, que consideram o quarto número proporcional aos três, fornecidos (Frémontier-Murphy, 2013). Aqui novamente se enviam as interconexões que envolvem aritmética e geometria nas operações do compasso.

Contudo, ao trazer a definição dos *Elementos* (definição 2 do Livro VI), relacionadas aos triângulos semelhantes Galileu aproximava da regra de três, significando que não distinguia a definição de proporcionalidade relativa às grandezas geométricas daquela referente aos números, como fez Euclides. Com isso Galileu demonstrou assimilar a ideia de que os números envolvidos nesse tipo de operação poderiam ser associados às medidas dos lados de triângulos semelhantes.

Desta maneira, experimentou pela primeira vez propor o cálculo da regra de três, de raízes quadradas e cúbicas de triângulos semelhantes ou encontrar duas retas proporcionais a outras duas. Neste sentido sua operação proposta distinguia-se do que estava posto pela geometria euclidiana, que permitia apenas adição, subtração e multiplicação por números inteiros de quantidades geométricas, em que a multiplicação e a divisão dessas quantidades colocavam o problema da mudança de dimensão, entre outras coisas, comprimentos de superfícies, uma vez que um comprimento multiplicado por um

comprimento resulta o valor da medida de uma superfície e não de outro comprimento (Figura 6).

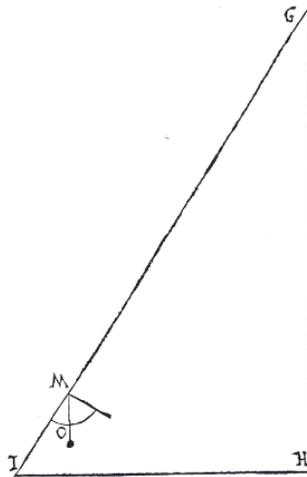


Figura 6. Representação do modo de uso do quadrante.

Fonte: O livro *Operações do compasso geométrico e militar* de Galileu (1606).

Com a incorporação de todos os tipos, tanto aritméticos, geométricos e de natureza física, seu instrumento foi então chamado de compasso de proporção, especialmente na França e nas regiões germânicas, onde se disseminou muito rapidamente. Na verdade, era usado alternadamente com o uso de quantidades geométricas ou físicas, como números e como quantidades geométricas ao explicitar que deveria se fazer um exercício de medição de determinado comprimento ao longo da escala, de modo a encontrar o quarto número procurado, por meio da operação de regra de três (Drake, 1978; Frémontier-Murphy, 2013).

Portanto, foi assim que o compasso mostrou a vantagem de resolver o problema da extensão do domínio dos números e da aplicação das operações aritméticas às grandezas geométricas do ângulo exclusivo de proporções, ou relações trigonométricas, que se provou muito eficaz, mostrando a excepcionalidade da invenção de Galileu.

Sobre práticas matemáticas e verdades experimentais no compasso de Galileu

Um aspecto a ser destacado neste ensaio, considerado um episódio revelador das posições práticas e experimentais de Galileu, refere-se à sua forma de conceber a natureza da matemática. Seus comentadores asseveram que Galileu estava familiarizado com a demonstração de Christopher Clavius (1538-1612) sobre a equivalência das regras de proporção das grandezas numéricas e geométricas, e que nela se inspirou muito diretamente em seu projeto de diálogo sobre as proporções de 1641, pois queria adicioná-la ao seu

discurso e demonstrações matemáticas sobre duas novas ciências de 1638. No entanto, ele nunca o citou explicitamente (Drake, 2003).

Assim, pode-se admitir que as manipulações matemáticas de Galileu, na verdade, nem sempre foram canônicas, pois além do raciocínio matemático, Galileu não hesitava em apelar para suas verdades experimentais, que por muitos dos estudiosos sobre sua obra foram consideradas capazes de lançar luz sobre uma falsa crença vigente em sua época ou de contradizer o raciocínio filosófico de muitos pensadores que foram seus críticos.

A respeito das suas potencialidades práticas relacionadas à geometria e à trigonometria plana identificadas no compasso, é importante reiterar que o compasso foi utilizado para fins militares na medida em que foi se observando sua eficácia nesse tipo de operação, além de sua vocação operacional envolvendo aritmética associada às medições geométricas e trigonométricas. Foi, portanto nessas atividades militares e de construção civil (obras atualmente relacionadas ao campo das engenharias) que a vocação trigonométrica do compasso se evidenciou, embora as experiências realizadas ou indicadas no livro sobre esse instrumento estivessem sempre apontadas diretamente para o campo da geometria ou da goniometria, conforme já mencionado anteriormente neste artigo.

Nas operações XXXI e XXXII presentes no livro sobre o compasso identifiquei que Galileu incorporou orientações e encaminhamentos experimentais que envolvem processos de triangulação, medição e operações por meio do quadrante (linhas de quadratura) associadas ao compasso, envolvendo observações e problematizações sobre medição de distâncias inacessíveis, caracteristicamente trigonométricas, com indicações de procedimentos variados para a medição por meio do exercício da observação visual, com recurso às relações de proporcionalidade entre ângulos e lados do triângulo retângulo, tomando como base as proposições estabelecidas nos Elementos de Euclides (Figura 7).

Conforme já mencionei, essas operações contêm um forte potencial experimental para a construção de conceitos geométricos e trigonométricos básicos que podem ser reorganizados por meio de problematizações históricas para o ensino de matemática na forma de Unidades Básicas de Problematização - UBP (Miguel; Mendes, 2010; 2021), desde que o texto seja adaptado de modo a contextualizar situações problematizadoras que provoquem o espírito indagador, curioso e investigativo nos estudantes, para assim construir os conceitos almejados pelo professor.

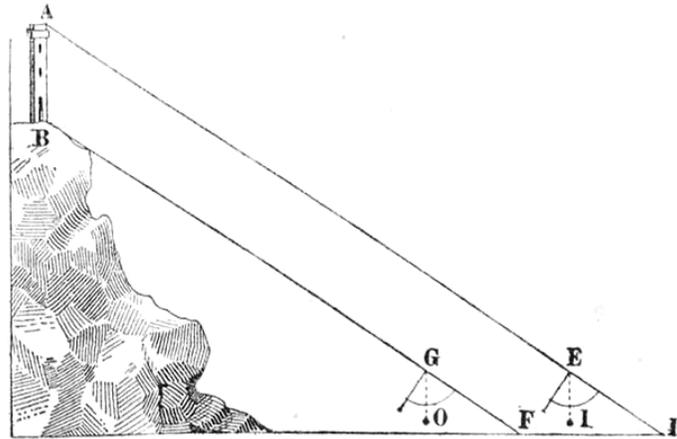


Figura 7. Representação do modo de uso do quadrante em uma experiência de medição envolvendo operações trigonométricas.

Fonte: O livro *Operações do compasso geométrico e militar* de Galileu (1606).

Talvez seja esse o foco central de todo trabalho elaborado por Galileu no livro que orienta a construção e uso do compasso em operações práticas de medição, cálculo e experimentação em mecânica relacionada a balística e a construção de fortificações, dentre outras construções civis. Tanto se percebe em seu discurso no final do seu livro, quando expressa suas conclusões da seguinte maneira:

“Gentil Leitor, eu julguei suficiente por ora ter descrito essas regras para medição através da visualização – não que somente elas possam ser trabalhadas no instrumento [compasso], existindo muitas outras – mas a fim de não me envolver desnecessariamente em longos discursos, estando eu certo de que qualquer um com inteligência média terá entendido aquelas já explicadas e pode encontrar outras para si mesmo, adequadas para qualquer caso particular que possa surgir. Não apenas eu posso ter me estendido muito mais sobre as regras para medição através da visualização, mas poderia me expandir em muito, muito mais regras mostrando a solução de (posso dizer) infinitamente muitos outros problemas de geometria e aritmética que podem ser resolvidos com as outras linhas de nosso instrumento, pois quantos problemas existirem em Os Elementos de Euclides e em outros autores, eles são assim resolvidos por mim muito rápida e facilmente. Mas como foi dito no início, minha presente intenção tem sido apenas falar aos homens militares, e sobre poucas coisas além daquelas que dizem respeito àquela profissão, reservando para outra ocasião a publicação da construção do

instrumento e uma descrição mais ampla de seus usos” (Galileu, 1606, tradução livre nossa).

Tais conclusões apresentadas por Galileu deixam claro o objetivo do seu trabalho, e que neste artigo procurei evidenciar com minhas descrições comentadas e indicações para abordagem de temas aritméticos, geométricos e trigonométricos.

Apontamentos Finais

Ao final do que foi descrito, interpretado e comentado neste artigo, o livro de Galileu explica os usos do seu compasso na solução de diversos problemas matemáticos que, em sua época, envolviam grandezas e medidas em suas relações comparativas e correlativas. Historicamente, sua origem, desenvolvimento e uso posterior após a publicação do livro refere-se a algumas observações gerais sobre seu *setor* como suficientes, antes de proceder às operações sobre a medição de coisas mais variadas possíveis. As escalas eram marcadas com uma precisão de cerca de um por cento. O livro mostra o quanto o compasso de Galileu era um bom instrumento de medição para resolver problemas práticos da sua época.

Alguma relação tecnológica sobre a importância de uma invenção para a sociedade, tal como a apresentada naquele momento, por Galileu, pode ser mencionada e compreendida quando pensamos no momento da introdução das primeiras calculadoras. Antes delas foram criados e utilizados os diversos tipos de ábacos, o compasso de Galileu e as régua de cálculo, usadas principalmente em problemas de engenharia e requerendo certa quantidade de entendimento matemático técnico das suas operações. Posteriormente houve também calculadoras mecânicas de mesa, que como o ábaco, não eram muito eficientes na extração de raízes, o que era requisitado na solução de muitos problemas geométricos e algébricos que foram surgindo posteriormente.

Considero, portanto, necessário mencionar que quando pensamos no momento histórico da introdução do compasso de Galileu no contexto social da sua época, compreendemos o grau de importância tecnológica dessa invenção para a sociedade, tal como o que pode ter representado a introdução de instrumentos práticos de cálculo no momento de sua apresentação à sociedade entre os séculos XVI e XVII.

Os dispositivos práticos de cálculo e medição foram instrumentos que despertaram nos estudiosos a necessidade de buscar maneiras de solucionar processos de cálculo, observações e medições de longas distâncias, desenvolvidos em torno de aproximadamente nos últimos 20 séculos, a partir da criação e uso do ábaco, pelos indianos para a resolução de cálculos simples, tais como: adição, subtração, multiplicação e divisão, bem como do astrolábio pelos gregos. Posteriormente passou a se constituir em uma prática cotidiana durante a Idade Média e Renascimento, em algumas regiões do planeta, como foi o caso da introdução do compasso geométrico e militar de Galileu, cuja composição combinou processos operacionais de observação, medição e cálculo. A análise primordial do ábaco como a primeira calculadora reconhecida nessa época, auxiliou bastante para que Galileu e outros estudiosos desenvolvessem equipamentos com princípios operacionais que originaram posteriormente máquinas sofisticadas para o cálculo desde o século XVI até o século XXI.

O compasso de Galileu foi, portanto, uma ampliação das operações aritméticas e geométricas para além do que propunha o ábaco e em seu percurso possibilitou a invenção das calculadoras, sofisticando seus mecanismos e meios operacionais que eram simplesmente manuais, ou seja, requeriam da pessoa certa habilidade mental para a concretização do cálculo fundamental aritmético.

Os efeitos sociais, científicos e tecnológicos dessa criação se tornaram evidentes no decorrer das décadas que sucederam a sua invenção e divulgação social, inaugurando a possibilidade de ampliação das habilidades técnicas computacionais para a sociedade poder lidar efetivamente com quase qualquer problema que surgisse, envolvendo questões práticas e seguindo instruções simples e sofisticadas, de acordo com cada situação apresentada.

Bibliografia Consultada

ARAÚJO FILHO, Walter Duarte de. *A gênese do pensamento galileano*. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2008.

BAUAB, Fabrício Pedroso. *Da Geografia Medieval às origens da Geografia Moderna*. contrastes entre diferentes noções de natureza, espaço e tempo. Tese de Doutorado. UNESP, Presidente Prudente: 2005.

BROMBERG, Carla. *Vicenzo Galilei: contra o número sonoro*. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

CAFFARELLI, Roberto Vergara. Il compasso geometrico e militare. Originalità, valore scientifico e utilizzazione economica dell'invenzione. Prefácio do livro *Il compasso geometrico e militare di Galileo Galilei*. Testi annotazioni e disputa negli scritti di G. Galilei, M. Bernegger e B. Capra, Introduzione, pp. IX-XLI. Pisa, 1992. ETS.

CAMEROTA, Filippo. *Il compasso geometrico e militare di Galileo Galilei*. Firenze: Istituto e museo di storia della scienza, 2004.

CESPEDES, Andres de. *Instrumentos Nuevos de Geometria*. Madri: Juan de La Cuesta, 1606.

CITINO, Rosana. *Galileu Vida e Pensamento*. Martin Claret, São Paulo, 2001.

CSIKSZENTMIHALYI, Mihaly. *Creatividad*. El fluir y la psicología del descubrimiento y la invención. Tradução José Pedro Tosa Abadia. Barcelona: Pàidós, 1998.

DRAKE, Stillman. *Galileo at Work: His Scientific Biography*. New York: Dover Publications, INC. 2003.

DRAKE, Stillman. *Essays on Galileo and the History an philosophy of Science*. V. III. Toronto: University of Toronto Press, 1999.

DRAKE, Stillman. Introduction of *Operations of the geometric and military compass of 1606*. Galileu Galilei. Washington: Dibner Library of the history of science and technology; Smithsonian Institution Press, 1978.

DRAKE, Stillman. Tartaglia's Squadra and Galileo's Compasso. *Annali dell'Istituto e Museo di Storia della Scienza di Firenze*, II, 1977, pp. 35–54.

FAVARO, Antonio (Ed.). *Edizione Nazionale delle Opere di Galileo Galilei*. Tipografia G. Barbera (Florença, 1890-1909); reimpressão entre 1929-1939. “Per la storia del Compasso di Proporzione,” *Atti del Reale Ist. Veneto...*, LXVII (1907-1908), pt. 2, pp. 723–39. <https://archive.org/details/perlaedizioneena00favagoog>.

FRÉMONTIER-MURPHY, Camille. A New Mathematical Vision for an Innovative Calculating Instrument: Galileo's Sector. *Bulletin of the Scientific Instrument Society* 118 (2013), p. 35–43.

GALILEO, Galilei. *Le operazioni del compasso geométrico, et militare*. Pandova: Casa dell'Autore. Per Pietro Marinelli, 1606.

GALILEO, Galilei. *Le operazioni del compasso geométrico, e militare*. Con le annotazioni di Mattia Bernaggieri. Milano: Stampe di Francesco Agnelli, 1741.

GALILEU, Galilei. *Operations of the geometric and military compass of 1606*. Translated, with an introduction by Stillman Drake. Washington: Dibner Library of the history of science and technology; Smithsonian Institution Press, 1978.

HANNAM, James. *A origem da Ciência*. Como os filósofos do mundo medieval lançaram os fundamentos da Ciência Moderna. Tradução Carla Ribeiro. Odivelas (Portugal): Alma Livros, 2021.

HAWKING, Stephen. *Os Gênios da Ciência sobre os ombros de Gigantes*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2005.

JAPIASSU, Hilton. *A Revolução Científica Moderna*. Rio de Janeiro: Imago, 1985.

KOYRÉ, Alexandre. *Do Mundo Fechado ao Universo Infinito*. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2001.

LONGO, Ana Rita. (Collana a Cura di). *Galileo Galilei*. La matematica, linguaggio dela natura. Milano: Edizioni White Star/National Geographic, 2017.

MACLACHLAN, James. *Galileu Galilei*. O primeiro físico. São Paulo: Companhia das letras, 2008. (Coleção Retratos da Ciência).

MIGUEL, Antonio; MENDES, Iran Abreu. Mobilizing histories in mathematics teacher education: memories, social practices, and discursive games. In: *ZDM Mathematics Education* (2010) 42, p.381–392.

MIGUEL, Antonio; MENDES, Iran Abreu. Mobilizando histórias na formação inicial de educadores matemáticos: memórias, práticas sociais e jogos discursivos. *REMATEC*, [S. l.], v. 16, p. 120-140, 2021. DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n.p120-140. id324. Disponível em: <http://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/324>. Acesso em: 20 jul. 2021.

MENDES, Iran Abreu. *História da matemática no ensino: Entre trajetórias profissionais epistemológicas e pesquisas*. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

MOLES, Abraham A. *A Criação Científica*. Tradução Gita K. Guinsburg. 3. ed. São Paulo: Perspectiva, 1998. 1ª Reimpressão, 2007. (Coleção Filosofia da Ciência, 3).

PISANO, Raffaele; BUSSOTTI, Paolo. Galileo in Padua: architecture, fortifications, mathematics and “practical”. In: *science. Lett Mat Int 2*: Springer, 2015, p. 209–222.

RÜSEN, Jörn. *Reconstrução do passado*. Teoria da história II: os princípios da pesquisa histórica. Tradução Asta Rose Alcaide. Brasília: Editora UnB, 2007.

ROSE, Paul L. The Origins of the Proportional Compass from Mordente to Galileo. *Physis* 10 (1968, pp. 53–69).

ROSSI, Paolo. *O Nascimento da Ciência Moderna na Europa*. Bauru, SP: EDUSC, 2001.

SHARRATT, Michael. *Galileu, Inovador*. Tradução Ana Sampaio. Porto: Porto editora, 2010 (Coleção História e Filosofia da Ciência).

Iran Abreu Mendes

Instituto de Educação Matemática e Científica
IEMCI/UFPA – Belém (PA) – Brasil

E-mail: iamendes1@gmail.com