Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 10 nº 19 (abril/2010-setembro/2010) – pág 1-38
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

UM ESTUDO SOBRE AS ORIGENS DOS ESPAÇOS VETORIAIS

Plínio Zornoff Táboas
Universidade Federal do ABC - Brasil

(aceito para publicação em fevereiro de 2010)

Resumo

Este artigo apresenta uma reflexão sobre as origens da estrutura axiomática dos espaços vetoriais a partir de obras sobre geometria e álgebra vetorial como o Cálculo do Baricentro de Möbius, o Cálculo de Equipolência de Bellavitis, os Quaternions de Hamilton e a Teoria da Extensão de Grassmann, levando-se em consideração, ainda, as concepções de Leibniz a respeito de uma junção entre as geometrias sintética e analítica.

Palavras chave: Espaços Vetoriais; Álgebra Vetorial; Teoria da Extensão; Quaternions; Cálculo de Equipolência.

Abstract

This paper presents a reflection to the origin of the axiomatic structure of the vector space from geometric and vector algebra works as Möbius' Baricentric Calculus, Bellavitis' Equipollences, Hamilton's Quaternions and Grassmann's Extension Theory, throughout the Leibniz conception respect to synthetic and analytic geometry.

Key words: Vector Spaces; Vector Algebra; Extension Theory; Quaternions; Calculus of Equipollence.

A Álgebra Vetorial e as Filosofias da Ciência e da Matemática de Grassmann

A palavra *vetor* tem sido utilizada, em um sentido algébrico mais moderno, ou seja, como diferença entre dois pontos no espaço, a partir do trabalho de Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) com os seus *quaternions*:

> ... para uma linha reta com direção no espaço, e com x, y, z para suas componentes retangulares, ou projeções sobre os três eixos retangulares, ele tem sido induzido a chamar a expressão trinomial, assim como a linha que representa, um VETOR. Um quaternion deve consistir assim de uma parte real e um vetor. ... (CROWE, 1994, p.31)

No entanto, o emprego dessa palavra aparece um pouco antes em outros trabalhos, mas em um sentido mais físico que leva em consideração, inclusive, sua etimologia, como se vê no verbete vetor, que é variação de vector, que por sua vez vem do Latim e quer dizer conduzir, transportar.

> O uso explícito de vetores ocorre mesmo antes nos trabalhos de Wessel (1797) e de Argand (1806). O termo mais antigo "raio vetor" ("rayon vecteur") é encontrado na física matemática Francesa, como em Théorie mathématique des phénomènes électrodinamiques (1826) de Ampère. Este termo aparece já em 1776 na célebre Encyclopédie, editada por Diderot, no artigo Rayon vecteur pelo astrônomo J.-J. de la Lande. (MOORE, 1995, p.265)

Os conceitos de vetor e soma de vetores (regra do paralelogramo), associados a entidades físicas tais como velocidades e forças, já eram utilizados por pensadores da Grécia antiga. Ainda que esses conceitos sejam muito pouco do que se precisa para a criação e o desenvolvimento da estrutura de Espaços Vetoriais, eles sempre tiveram, por outro lado, apelo geométrico e intuitivo muito forte para auxiliar a análise de problemas físicos. Além disso, a diversidade, surgida após o evento da Renascença, desses problemas associados a uma estrutura analítica mais técnica de abordagem matemática suscitou o desenvolvimento da concepção de espaço físico conectado a uma estrutura de espaço geométrico, dotado de certas ferramentas e propriedades matemáticas que pudessem servir de suporte adequado para sua análise, como atesta Michael J. Crowe:

> Entretanto, no curso do século XVII, as entidades físicas a serem representadas passavam por uma transformação. Esta transformação consistia na mudança de ênfase, a partir da qual, quantidades escalares representavam posição e peso, e quantidades vetoriais representavam velocidade, força, momento e aceleração. A transição não foi abrupta nem ficou confinada ao século XVII. Mais tarde, desenvolvimentos em eletricidade, magnetismo e ótica agiram ainda mais para transformar o espaço da física matemática num espaço dotado de vetores. (CROWE, 1994, p.1)

Nesse caminho, o matemático August Ferdinand Möbius (1790-1868) parece ter captado toda a essência do conceito de vetor associado à evolução, desde Arquimedes, dos problemas da física, principalmente aqueles relativos a centro de gravidade. E, imbuído dessa percepção, criou um sistema geométrico quase vetorial no seu *Barycentrishe Calcul*, de 1827[1], fruto de ideias amadurecidas e esboçadas desde 1818:

> As pesquisas apresentadas também procedem do mesmo conceito elementar e puramente geométrico de centro de gravidade. O que primeiro estimulou estas pesquisas foi a consideração da fecundidade da lei que diz que cada sistema de pontos associados com pesos tem somente um centro de gravidade, e que assim, em qualquer sequência de pontos apresentada em conexão com o sistema, o resultado é que cada ponto, a partir do anterior, pode sempre ser encontrado. A simples técnica, por meio da qual tenho provado mais leis geométricas, estimulou-

[1] Há um exemplar dessa obra na Biblioteca "Prof. Achille Bassi", no Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC) da USP em São Carlos – SP.

> me a encontrar um algoritmo conveniente para ainda maior simplificação de tais investigações. (CROWE, 1994, p.49)

A grandeza dessa obra de Möbius está não na sua possibilidade de apenas resolver problemas físicos, mas na sua capacidade de expandir o conhecimento matemático através de abstração, construindo técnicas, neste caso, para aumentar o poder da análise geométrica. Essa tendência à abstração se compara com o estilo de matemática desenvolvida por Leonard Euler (1707-1783), por exemplo, quando da ampliação das técnicas de resolução de certas equações diferenciais, gerando novas classes de equações que não possuíam, em princípio, quaisquer ligações com a realidade física, embora fossem passíveis de aplicações.

Com toda certeza Möbius não criou o conceito de vetores, ou mesmo o de segmentos orientados, mas os fatos revelados até hoje confirmam que ele foi o primeiro a formular matematicamente tais segmentos como a diferença entre dois pontos, trazendo na notação a diferenciação entre os segmentos AB e BA, por serem opostos, ou seja, BA = −AB. A partir dessas ideias, desenvolveu também uma orientação no espaço para figuras com mais de dois pontos. Por exemplo, como AB + BA = 0, Möbius propôs o seguinte: se B, C e D são três pontos de uma reta, para todo ponto A fora dela tem-se que a soma das áreas dos triângulos ABC + ACD + ADB = 0 (Figura 1). Ele propôs algo semelhante também para pirâmides.

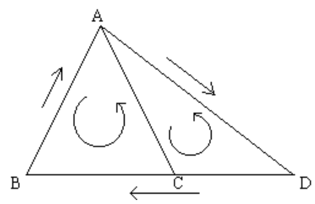
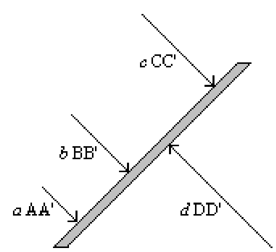


Figura 1

A apresentação que Möbius faz nesse trabalho segue, influenciado ainda por uma forte tendência do século XVIII, uma linha de "problemas propostos", ampliando paulatinamente as possibilidades de aplicação a problemas semelhantes mais complexos e deixando a abstração para um segundo momento. Dessa maneira, uma motivação para o cálculo de baricentro é dada pela busca de uma força resultante capaz de equilibrar um sistema de forças atuantes sobre uma barra (Figura 2).



AA', BB', CC' e DD' são vetores unitários afetados de coeficientes modulares *a*, *b*, *c* e *d*, respectivamente, de tal forma que *d*DD' equilibra o sistema. Nesse caso específico $d = a + b + c$.

Figura 2

Esse tipo de ideia física fez com que Möbius desenvolvesse seu método geométrico de análise, como segue:

> Por dois pontos A e B traçam-se duas paralelas quaisquer. Sejam a e b dois números numa dada razão, tal que $a + b \neq 0$. Achar a transversal A'B' às paralelas tal que
>
> $$a \cdot AA' + b \cdot BB' = 0.$$
>
> Trace a linha AB e encontre um ponto P tal que $AP/PB = b/a$, ou $AP/BP = -b/a$. Assim, todas as retas por P (e somente elas) que interceptam as paralelas terão a propriedade requerida. Como triângAA'P ~ triângBB'P, então
>
> $$AA':BB' = AP:BP = AP:-PB = b:-a;$$
>
> e daí,
>
> $$a \cdot AA' + b \cdot BB' = 0.$$
>
> Se colocarmos pesos em A e B, proporcionais aos números a e b respectivamente, P será o centróide dos pontos A e B com pesos a e b. (SMITH, 1959, p.670-1)

Então, Möbius generaliza esse método e apresenta o seguinte resultado, aqui chamado de Teorema 1:

> Dado um sistema de n pontos A, B, C, … N com coeficientes a, b, c, … n, respectivamente, com $a + b + c + \ldots + n \neq 0$, é sempre possível encontrar um ponto e somente um ponto, o centróide S, tendo a seguinte propriedade: se retas paralelas são traçadas pelos pontos dados e pelo ponto S, em qualquer direção, e essas retas são intersectadas por qualquer plano nos pontos A', B', C', … N' e S' respectivamente, então
>
> $$a \cdot AA' + b \cdot BB' + \ldots + n \cdot NN' = (a + b + \ldots n) \cdot SS'.$$
>
> Em particular, se o plano passa pelo ponto S então
>
> $$a \cdot AA' + b \cdot BB' + \ldots + n \cdot NN' = 0.$$
>
> Por outro lado, se $a + b + \ldots n = 0$ então o centróide é infinitamente remoto na direção determinada pelas retas paralelas. (SMITH, 1959, p.671)

Agora sim ele inicia o processo de abstração que o leva a um sistema de coordenadas geométricas, que por sua vez permite as tais técnicas que implementam sua análise geométrica. Então, Möbius observa a independência do sistema de pontos com seu centróide relativamente ao feixe de paralelas e o plano que o corta. Assim, ele pode fazer uma simplificação de notação e a tese do teorema acima toma a seguinte forma:

$$a \cdot A + b \cdot B + \ldots + n \cdot N = (a + b + \ldots n) \cdot S. \qquad \text{(I)}$$

Mais ainda, como o coeficiente de S é a soma dos coeficientes do sistema inicial de pontos, então:

$$a{\cdot}A + b{\cdot}B + \ldots + n{\cdot}N \equiv S.$$

Depois, ele observa que outro sistema de pontos pode ter o mesmo centróide de um sistema já conhecido. Portanto, é possível encontrar

$$a{\cdot}A + b{\cdot}B + c{\cdot}C + \ldots = f{\cdot}F + g{\cdot}G + h{\cdot}H + \ldots \qquad \text{(II)}$$

Além disso tudo, a igualdade

$$a{\cdot}A + b{\cdot}B + c{\cdot}C + \ldots = 0 \qquad \text{(III)}$$

indica que o sistema não possui centróide finito.

A partir das equações (I), (II) e (III), que são as únicas equações que aparecem no cálculo do baricentro, Möbius constrói relações para encontrar pontos em uma reta, em um plano ou no espaço. Se $a{\cdot}A + b{\cdot}B \equiv C$ então C estará sobre a reta que passa por A e B e $a:b = BC:CA$. Se $a{\cdot}A + b{\cdot}B + c{\cdot}C \equiv D$ e A, B, C não estiverem em uma mesma reta, então $a:b:c = BCD:DCA:DAB$, sendo BCD, DCA e DAB as representações das áreas dos triângulos dados pelos pontos B, C e D; D, C e A; D, A e B; respectivamente. Se $a{\cdot}A + b{\cdot}B + c{\cdot}C + d{\cdot}D \equiv 0$ então A, B, C, D estarão num mesmo plano e $a:b:c:d = BCD:-CDA:DAB:-ABC$. Se $a{\cdot}A + b{\cdot}B + c{\cdot}C + d{\cdot}D \equiv E$ e os pontos A, B, C, D não estiverem num mesmo plano, então $a:b:c:d = BCDE:CDEA:DEAB:EABC$, sendo BCDE, CDEA, DEAB e EABC as representações dos volumes das pirâmide geradas pelos pontos B, C, D e E; C, D, E e A; D, E, A e B; E, A, B e C; respectivamente. Essas relações permitem vislumbrar sistemas de coordenadas unidimensional, bidimensional e tridimensional, a partir de, respectivamente, dois, três e quatro pontos chamados sistemas de pontos fundamentais. A essência da equação (II) é prover mudança de coordenadas para a estrutura, o que flexibiliza a escolha do sistema fundamental. Através da mudança de coordenadas, Möbius define afinidade entre figuras, que nada mais é do que a correspondência ou, melhor ainda, equivalência entre figuras em sistemas que são transformados um no outro por tal mudança, e define também colinearidade, que é o seguinte: se um conjunto de pontos de um plano corresponder a um conjunto de pontos de outro e o primeiro conjunto estiver sobre uma reta, então o segundo conjunto também estará sobre uma reta do outro plano.

Toda a atenção de Möbius é voltada, agora, à investigação em profundidade dos invariantes geométricos de um sistema, tendo em vista principalmente a colinearidade. Assim, ele constrói uma rede de pontos, tomando as interseções geradas pelas retas que passam pelos pontos fundamentais de um sistema e repetindo essa operação iteradamente, como segue.

> Teorema: Se A, B, C e $D = a{\cdot}A + b{\cdot}B + c{\cdot}C$ são os quatro pontos fundamentais de uma rede plana, qualquer ponto P dessa rede pode ser representado por
>
> $$P \equiv \varphi a{\cdot}A + \chi b{\cdot}B + \psi c{\cdot}C,$$

> sendo φ, χ, ψ números racionais incluindo zero, que dependem somente da construção do ponto P e não dos quatro pontos fundamentais. (SMITH, 1959, p.674-5)

De posse da caracterização de um ponto qualquer da rede, a conclusão a que chega Möbius é que a questão da afinidade entre figuras se resume à discussão das razões entre os coeficientes dos pontos correspondentes, pois esses já trazem consigo toda a "herança genética" das "bases" ou sistemas de pontos fundamentais nos quais as tais figuras estão representadas, como é atestado pelo teorema: Toda razão anarmônica formada numa rede plana é racional e depende somente da construção de retas e não dos quatro pontos fundamentais. (SMITH, 1959, p.675)

Por fim, Möbius diz:

> [...] colinearidade pode ser definida por meio de igualdade entre razões anarmônicas: duas figuras são ditas colineares se toda expressão da forma ACD/CDB:AEF/EFB é igual à mesma expressão formada pelos correspondentes pontos na segunda figura. (SMITH, 1959, p.676)

Assim, tem-se construída uma estrutura precursora de algo que envolve o conceito de vetores, mas que não indica um caminho para o desenvolvimento paulatino em direção aos espaços vetoriais:

> Möbius teve o reconhecimento de vários matemáticos famosos, inclusive Gauss, Cauchy, Jacobi e Dirichlet. Ele criou um eficiente e prático método para resolver problemas geométricos; mas apesar de pontuar alguns aspectos fundamentais da geometria vetorial, sua teoria, baseada numa percepção intuitiva do espaço, falhou em oferecer a possibilidade de uma extensão para um conceito mais geral de espaço vetorial (ou baricêntrico). (DORIER, 1995, p.236)

Para acompanhar, ou melhor, consolidar a criação e o desenvolvimento de uma estrutura de espaços vetoriais, é fundamental também reconstruir os passos que geraram a ideia de produto de vetores. Möbius teve dificuldades em conceber algo que viesse a se transfigurar nessa ideia, ou mesmo numa sua precursora. A primeira contribuição efetiva nesse sentido foi dada pelo italiano Giusto Bellavitis (1803-1880) no seu *Calcolo delle Equipollenze*, de 1833. Ainda que Bellavitis tome a definição de vetores segundo a visão de Möbius, a forma de apresentação do seu texto, comparada com a deste último em seu *Barycentrishe Calcul*, se aproxima de um estilo mais euclidiano (conceituando os elementos de análise e estabelecendo relações e operações entre estes, para só então desenvolver aplicações), como pode ser observado a seguir:

> 1º Uma linha reta designada usualmente por duas letras é entendida como tomada a partir da primeira letra até a segunda, assim AB e BA não podem ser considerados a mesma entidade, mas como duas quantidades iguais com sinais opostos.
>
> 2º Duas linhas retas são chamadas equipolentes se elas são iguais, paralelas e dirigidas no mesmo sentido.
>
> 3º Se duas ou mais linhas retas são relatadas de tal forma que a segunda extremidade de cada linha coincide com a primeira da seguinte, então a linha, que juntamente com estas forma um polígono (regular ou irregular), e que é traçada a

> partir da primeira extremidade da primeira linha até a segunda da última, é chamada soma equipolente (composta equipolente). Esta é representada pelo sinal + interposto entre as linhas combinadas, e o sinal $\bumpeq$ indica a equipolência. Assim temos
>
> $$AB + BC \bumpeq AC,$$
> $$AB + BC + CD \bumpeq AD, \text{ etc.}$$
>
> Tais equipolências continuam verdadeiras quando substituídas pelas suas linhas ou por linhas respectivamente equipolentes a elas ...
>
> 5º Em equipolências, como em equações, uma linha pode ser transferida de um lado para outro, desde que o sinal seja trocado ...
>
> 6º A equipolência $AB \bumpeq n\cdot CD$, sendo n um número positivo, indica que AB é paralelo a e tem mesma direção [sentido] da linha CD, e que seus comprimentos têm uma relação dada pela equação $AB = n\cdot CD$.
>
> 5. Vamos nos restringir, agora, à linhas situadas no plano. A inclinação da linha AB é o ângulo HAB, que este forma com a horizontal AH traçada da esquerda para a direita, qualificando positivo os ângulos medidos da direita para cima e de 0º a 360º ...
>
> 2º O ângulo ou inclinação de CD sobre AB é igual à inclinação de CD menos a de AB.
>
> 3º A equipolência
>
> $$AB \bumpeq CD\cdot EF \div GH$$
>
> não requer somente os comprimentos de AB, BC, etc., mas também a verificação da equação em que a equipolência é trocada pela conversão do sinal de equipolência em um sinal de igualdade como segue:
>
> $$\text{inc.}AB = \text{inc.}CD + \text{inc.}EF - \text{inc.}GH \ldots$$
>
> A linha equipolente a 1 é considerada como horizontal, ou seja, não possui inclinação ...
>
> 6. Teorema Fundamental: Em equipolências, termos são transpostos, substituídos, somados, subtraídos, multiplicados, divididos, etc., ou seja, todas as operações que são executadas poderiam ser legitimadas se elas fossem tratadas como equações, e as equipolências resultantes são sempre exatas. ... (CROWE, 1994, p.52-3)

Dessa forma, Bellavitis construiu uma estrutura que leva em consideração o produto de vetores, que de certa maneira está associado com a ideia de produto de números complexos vistos em suas formas trigonométricas; embora ele próprio relutasse em aceitar essa categoria de números como entidades geométricas. A despeito dessa relutância, os exemplos de aplicação que seu método apresentou restringiram-se a questões bem discutidas ([...] por exemplo, ele deduziu o teorema de Pitágoras [...] (CROWE, 1994, p.54)) por outras técnicas até então muito eficientes. Entretanto:

> Bellavitis admitiu que sua descoberta foi baseada na leitura do trabalho de Buée, mas por toda sua vida ele recusou aceitar números complexos como parte da matemática. De fato, sua apresentação é especialmente original por duas principais razões: os objetos sobre os quais o cálculo é efetuado são entidades puramente geométricas (não como números complexos), e a primeira parte do cálculo pode ser aplicada ao espaço geométrico, apesar disso, como muitos outros,

> Bellavitis falhou em generalizar o produto de segmentos de reta direcionados para o espaço. (DORIER, 1995, p.236)

A generalização desse produto de vetores foi feita por William Rowan Hamilton:

> [...] a multiplicação em três dimensões poderia tomar em consideração a razão dos comprimentos e a rotação entre as direções dos dois vetores. A primeira é um valor unidimensional e a segunda depende da direção do eixo de rotação (um valor bidimensional) e do ângulo (um valor unidimensional). (DORIER, 1995, p.237)

Daí a aparição dos famosos quaternions: [...] Os quaternions são números algébricos que permitem uma representação no espaço. A multiplicação representa, ao mesmo tempo, o produto escalar e o produto vetorial. (DORIER, 1995, p.237). Essa estrutura havia sido totalmente intuída por Hamilton em 16 de outubro de 1843, quando de um passeio em companhia de sua esposa. Seu entusiasmo com a descoberta foi tanto que fixara a fórmula que representa a não comutatividade algébrica na ponte sobre o Royal Canal em Dublin, próxima à Royal Irish Academy.

O trabalho de Hamilton, apresentado à Royal Irish Academy em novembro de 1833 e publicado em julho de 1844 em *Philosophical Magazine 25* sob o título *On Quaternions or a New System of Imaginaries in Algebra*, que continha as ideias sobre a multiplicação de números complexos, rivalizou cronologicamente com a primeira edição do *Ausdehnungslehre* de Hermann Günter Grassmann (1809-1877), de Junho de 1844, em que foram abordados também produtos de vetores. Mas são trabalhos independentes, na medida em que o primeiro expande de certa maneira as ideias e conceitos já trabalhados por Buée, Möbius e Bellavitis, e o segundo cria um sistema todo original a partir de uma concepção filosófica da ciência e da matemática. Ainda assim, muitas vezes se reconhecem ferramentas semelhantes num e noutro depois de um ajuste semântico, já que o trabalho de Grassmann parte de uma perspectiva filosófica totalmente nova. Esse formato filosófico impediu uma apreciação mais profunda do Ausdehnungslehre por parte das comunidades matemática e científica da época, o que demandou um esforço muito grande por parte de Grassmann em gerar novas versões para que o trabalho pudesse encontrar aceitação. No entanto, e com certo atraso, em 1852, Hamilton tomou conhecimento da obra de Grassmann e foi suficientemente sensível para reconhecer sua grandeza, ressaltando no prefácio do seu *Lectures on Quaternions*, de 1853, a importância e a independência da obra de Grassmann:

> É conveniente afirmar aqui que uma espécie de multiplicação não comutativa para linhas inclinadas (aüssere Multiplikation) aparece num trabalho notável e muito original do Prof. H. Grassmann (Ausdehnungslehre, Leipzig, 1844) [...], e que apesar de algumas coincidências, o sistema do Prof. Grassmann e o meu parecem ser perfeitamente distintos e independentes um do outro em suas concepções, métodos e resultados. Pelo menos, no tempo de sua publicação, o profundo e filosófico autor de Ausdehnungslehre não teve em sua posse a teoria dos quaternions, a qual tinha aparecido no ano anterior (1843). [...] (CROWE, 1994, p.87)

E, numa carta de 2 de Fevereiro de 1853 a De Morgan, Hamilton diz:

> [...] Seu produto externo (aüssere) eu penso ter entendido; [...] E mesmo seu produto interno, publicado subseqüentemente ao externo (em 1847), eu posso aceitar razoavelmente bem. De fato, o “produto interno” de Grassmann tem muita analogia com a minha “parte escalar” de um quaternion, e o seu “produto externo” com a minha “parte vetorial”. [...] (CROWE, 1994, p.86)

Agora, dois são os motivos para acreditar que a obra de Grassmann supere a de Hamilton: primeiro por estar imbuída de uma visão mais refinada de espaço, como algo que não se limita às três dimensões do espaço físico, e segundo, por apresentar uma visão filosófica original e completa de toda a ciência e da matemática como sua parte integrante.

Na introdução do seu *Ausdehnungslehre*, Grassmann divide a ciência em duas partes: uma Real e outra Formal. A Ciência Real tem por objeto de estudos tudo aquilo que tem existência real, concreta ou é sensorialmente perceptível e suas verdades são inferidas por pensamentos acerca desses objetos, já a Ciência Formal estuda tudo aquilo que tem existência apenas a partir do pensamento e suas verdades são inferidas através de uma segunda linha de pensamento encadeada ao primeiro. A Ciência Formal é subdividida em Geral, aquela que estuda lógica (lógica formal), ou seja, as propriedades universais do pensamento, e em Particular, que é a matemática, ou ainda, aquela que estuda as propriedades de cada pensamento em particular. À matemática é dado o nome de Teoria das Formas.

> O nome “teoria das grandezas” não é apropriado para toda a matemática, já que não se encontra uso para grandeza num ramo substancial da matemática que é a teoria da combinação, e mesmo em aritmética, somente de maneira incidental. Por outro lado, a expressão “forma” parece ser bem mais abrangente, e a “forma pensada” mais apropriada, pois a forma em seu sentido puro, desprovida de conteúdo real, é precisamente nada, assim a forma pensada é a expressão mais conveniente. (GRASSMANN, 1995, p.24)

Uma das grandes surpresas para um matemático do século XX, herdeiro do legado de David Hilbert (1862-1943), é ver a Geometria catalogada como Ciência Real, e isso é não só o que Grassmann faz, mas defende persuasivamente.

> A partir dos conceitos apresentados acima, é evidente que a geometria, como a mecânica, refere-se à existência real [...] Isto é claro, já que o conceito de espaço não pode ser produzido pelo pensamento, mas antes, emerge como alguma coisa dada. Qualquer um que queria manter o contrário deve assumir o compromisso de deduzir a necessidade das três dimensões para o espaço a partir das leis do pensamento puro, um problema cuja solução é claramente impossível. (GRASSMANN, 1995, p.24)

Mesmo deixando de lado, por um só momento, as concepções modernas da geometria do século XX, não se pode deixar de atentar para o fato de que seu suporte teórico já estava lançado quando da primeira publicação do *Ausdehnungslehre* de Grassmann. Desde 1826, Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856) vinha divulgando e publicando suas novas pesquisas sobre o 5° Postulado de Euclides, nas quais apresentava uma geometria em que é permitido traçar mais de uma paralela a uma dada reta por um ponto fora dessa. Um tratamento detalhado dessas ideias apareceu numa publicação de

1840: *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*. Essas pesquisas com geometrias não euclidianas impõem uma dosagem mais elevada de abstração na concepção dos entes analisados e rompem, em princípio, com uma visão de que o objeto de estudo da geometria é, necessariamente, o espaço físico tridimensional. Isso parece, então, derrubar a perspectiva de Grassmann, mas uma análise mais cuidadosa revela coerência, ainda que não totalmente consciente ou intencional, da sua catalogação, já que hoje não se fundamenta mais o espaço físico segundo uma ótica Newtoniana e o próprio modelo relativista de espaço requer uma percepção sensorial mais complexa, inclusive ligada a uma compreensão psicológica dos limites da consciência acerca do que é, efetivamente, a percepção sensorial.

> A posição da geometria relativamente à teoria das formas depende da relação entre a percepção do espaço e o pensamento puro. Apesar de apenas agora dizermos que a percepção se confronta com o pensamento acerca de alguma coisa independentemente dada, não é portanto certo que a percepção do espaço emirja somente da consideração dos objetos sólidos, ao contrário, a percepção fundamental é transmitida a nós pela abertura dos nossos sentidos ao mundo sensível, o qual adere a nós como o corpo à alma. (GRASSMANN, 1995, p.24-5)

Posto isso, Grassmann começa a discutir a matemática a partir de dois pares dicotômicos de conceitos, que permitem a sua inferência analítica. Um dos pares diz respeito à transformação da existência particular pelo pensamento através de um ato de geração ou de dois atos sequenciais, que são o arranjo e a conjunção. O outro par diz respeito à comparação entre existências particulares feita pelos conceitos de diferente, na medida em que uma está coordenada com outra existência particular, e de igual, na medida em que uma está subordinada a um mesmo universo de outra existência particular. Com relação ao primeiro par, uma forma matemática pode ser considerada uma forma contínua (grandeza), se produzida por um ato de geração, ou uma forma discreta (forma conjuntiva), se gerada por arranjo e conjunção. Dependendo da maneira como se define o pensamento primeiro da existência particular, os papéis das formas contínua e discreta podem ser invertidos, bastando para isso, por exemplo, considerar um instante fixo na transformação de uma forma contínua para que ela tome o lugar de uma forma discreta, ou, de outro lado, considerar como um único processo o arranjo e a conjunção de uma forma discreta, tornando-a uma forma contínua. Agora, com relação ao segundo par, uma forma matemática pode ser considerada forma combinatória, se for a coordenação (diferente) entre existências particulares, ou pode ser considerada forma algébrica, se for a subordinação (igual) de existências particulares a um mesmo universo. Da mesma maneira como as formas contínua e discreta, as formas combinatória e algébrica podem inverter seus papéis através de um jogo lógico. Por fim, a interação entre tipos de geração (transformação) e elementos de geração (comparação) determina quatro formas distintas em que a matemática se divide:

1. Forma Algébrica Discreta ⇔ Número;
2. Forma Combinatória Discreta ⇔ Combinação;
3. Forma Algébrica Contínua ⇔ Grandeza Intensiva;

4. Forma Combinatória Contínua ⇔ Grandeza Extensiva.

> Número é a forma algébrica discreta; ou seja, é a unificação daquilo estabelecido como igual. Combinação é a forma combinatória discreta; ou seja, é a unificação daquilo estabelecido como diferente. As ciências do discreto são, portanto, a teoria dos números e a teoria das combinações (teoria das relações). (GRASSMANN, 1995, 26)

A teoria dos números é vista nessa obra de maneira muito próxima com o que se entende hoje por esse tema, salvaguardando-se, é claro, as devidas diferenças de profundidade analítica em função dos progressos conquistados em mais de um século; já a teoria das combinações engloba um misto dos princípios da álgebra com as ideias ligadas às probabilidades, ou ainda, a manipulação das formas que devem atingir necessariamente uma meta numérica. O próprio Grassmann enfatiza, por estar mais interessado em apresentar um novo ramo de estudos, que:

> Cada conjunto de coisas (existências particulares) requer pouca menção.
> A grandeza intensiva é aquela que surge a partir da geração de iguais e a grandeza extensiva, ou extensão, é aquela que surge a partir da geração de diferentes. As grandezas variáveis da primeira representam a fundação da teoria das funções, ou seja, o cálculo diferencial e integral, e a última, a fundação da teoria da extensão. (GRASSMANN, 1995, p.27)

Então, Grassmann chega ao objetivo central da sua obra: desenvolver a Teoria da Extensão. Antes disso, são oferecidos dois exemplos para uma preliminar elucidação do novo conceito.

> O melhor exemplo que podemos oferecer para a grandeza extensiva é o segmento de reta (deslocamento), cujos elementos prosseguem à parte um do outro e, assim, constituem precisamente a linha como extensão; por outro lado, um exemplo de grandeza intensiva é um ponto associado a uma força específica, já que neste caso seus elementos não são removidos, mas ao contrário são apresentados somente como uma intensidade, formando assim uma específica ordem de intensificação. (GRASSMANN, 1995, p.27-8)

E, ainda, apresenta uma interpretação da ordem de aparecimento cronológica para os elementos constituintes de sua nova teoria:

> Historicamente, dentre os quatro ramos da matemática, o discreto aparece mais cedo que o contínuo (já que o primeiro é mais fechado num sentido analítico do que o segundo) e o algébrico mais cedo que o combinatório (já que igual é mais fácil de ser entendido do que o diferente). Assim, a teoria dos números é a primeira, teoria da combinação e cálculo diferencial aparecem simultaneamente e a teoria da extensão na sua forma abstrata é necessariamente a última de todas, apesar da sua imagem concreta (mas limitada) – a teoria do espaço – já pertencer a um tempo bem antigo. (GRASSMANN, 1995, p.28)

O desenvolvimento da Teoria da Extensão passa pelo conceito de evolução contínua, que nada mais é do que a possibilidade de observar cada estágio, como um instantâneo fotográfico, da combinação de elementos na geração da extensão. O primeiro passo é separar uma forma elementar da combinação de elementos e, em seguida, buscar uma lei que represente todos os estágios por que passa essa forma no processo de construção de um sistema ou domínio da extensão.

> Na teoria do espaço, o ponto aparece como um elemento, o lugar de evolução ou movimento como sua evolução contínua, e as várias posições do ponto no espaço como seus diferentes estados. [... Ainda] Na teoria do espaço, a uniformidade de direção é uma lei singular que governa as evoluções individuais; assim, o deslocamento representa uma extensão elementar na teoria do espaço e a linha reta o sistema todo. (GRASSMANN, 1995, p.29)

Se forem utilizadas duas leis diferentes para geração de uma extensão, então a coleção de todos os elementos gerados por essas duas leis é um sistema de segunda ordem. Se for adicionada uma terceira lei independente das duas iniciais, então o sistema é de terceira ordem; e assim por diante.

> A teoria do espaço pode novamente servir de exemplo. Aqui a coleção dos elementos de um plano são gerados a partir de um elemento singular e de duas direções quando o elemento gerador progride por quantidades arbitrárias nas duas direções, e a totalidade dos pontos (elementos) assim gerados são colocados juntos como um simples objeto. O plano é, então, um sistema de segunda ordem; nele existe um conjunto infinito de direções dependentes das duas direções originais. Se uma terceira direção independente é adicionada, então por meio desta direção, todo o espaço infinito (como o sistema de terceira ordem) é produzido. Neste exemplo, não se pode ir além de três direções independentes (leis de evolução); mas, na teoria pura da extensão, seu número pode ser infinitamente incrementado. (GRASSMANN, 1995, p.29-30)

Ainda que o conceito de independência linear não tenha sido desenvolvido por Grassmann (longe disso, ele já era utilizado desde o século XVIII no auxílio de construção de soluções gerais de equações diferenciais), no *Ausdehnungslehre* ele ganha um formato bem estruturado em termos axiomáticos e ganha, também, contexto numa visão global da matemática; ou seja, uma visão independente de uma particular técnica desenvolvida para algum de seus ramos, permitindo, isto sim, aplicação nos diferentes ramos bastando realizar a associação adequada entre os elementos da teoria abstrata e os elementos do ramo escolhido. Essa concepção supera as realizações até aqui analisadas. Além disso, é marcante a apresentação didático/pedagógica dessa obra de Grassmann. Lembrando que matemática e filosofia são ramos da ciência formal, ele faz uma comparação entre ambas e observa que deve ser mantida uma estrutura lógica mínima para adotar-se um método que as caracterizem como ciência. A diferenciação entre ambas está na abordagem e no tratamento das ideias. A última parte do todo para o particular, ou seja, a partir de uma verdade universal desenvolvem-se pensamentos que vão refinando e ramificando ideias através de conceitos novos que não contradizem a verdade primeira. Já a matemática, segue o mesmo caminho, mas no sentido oposto: parte do particular para o todo, ou ainda, a partir de uma simples ideia desenvolvem-se pensamentos que buscam a sua generalização, a unificação de todas as ideias que trazem consigo a essência da mesma verdade que se traduz da primeira. Assim, Grassmann concebe um método, para o estudo da matemática, que incorpora não só o princípio da causalidade, afetado às últimas consequências pelo rigor lógico, que caracteriza as ciências como um todo, mas também a utilização da intuição como suporte para todo desenvolvimento, já que esta traz consigo uma compreensão do todo ou, pelo menos, uma percepção geral da matéria em questão. Embora o uso da intuição já começasse a ser relegado a uma posição de menor importância e não condizente com a atividade científica, Grassmann o defendia, insistindo que não se chega a lugar algum apenas manipulando corretamente regras lógicas nem tampouco se apreende um novo conceito ou se desenvolve o pensamento livre repetindo exaustivamente um receituário técnico/científico.

> Para cada parte dessa apresentação, a natureza de seu desenvolvimento adicional é essencialmente fixado pela ideia dominante de que ela é nada mais que uma suposta analogia com ramos cognatos e já familiares do conhecimento ou, e este é o melhor caso, ela é uma intuição direta da próxima verdade. [...] Intuição parece estar alienada do domínio da ciência pura e mais ainda de toda a matemática; mas sem ela, é impossível descobrir qualquer nova verdade. (GRASSMANN, 1995, p.31)

Grassmann foi ainda mais radical apresentando sua visão de que uma obra cuja finalidade é divulgar novos conceitos deve apenas apoiar a construção do conhecimento e forçar o leitor a assumir a posição de (re)descobridor dos tais conceitos. Isso permite a consolidação da independência e liberdade de pensamento.

> Como uma conseqüência do método de apresentação, o leitor deve esperar ser possível progredir independentemente, sem ser guiado por determinadas linhas de pensamento, se considerando com autonomia de descobridor de verdades e, assim, revertendo sua relação com o autor, pelo que a composição inteira do trabalho se mostra supérflua. (GRASSMANN, 1995, p.32)

Estrutura Algébrica do *Ausdehnungslehre*

A investigação realizada aqui tenta preservar ao máximo o espectro analítico matemático, ainda que a tentação da interpretação muitas vezes tenha sido mais forte e, revelando-se nas discussões, tenha transcendido no tempo a busca das incidências imediatas na construção de novos conceitos. A maior evidência disso é a tentativa de ver já realizadas na Obra de Grassmann as estruturas de Corpo e de Espaço Vetorial, antecipando a confecção da estrutura axiomática moderna em pelo menos cinquenta anos. A licença solicitada com essa observação visa possibilitar a apresentação de toda a beleza essencial e a força das aplicações da obra analisada, mesmo que o leitor perca parte da satisfação de redescobri-las por si só através do original.

Grassmann começa sua obra com o objetivo de apresentar uma teoria abstrata com ampla aplicação matemática, principalmente em relação ao estudo da teoria do espaço. Nesse sentido, especificamente, ele afirma que o propósito é criar uma linguagem que faça a ligação entre a Geometria Sintética e a Análise Geométrica.

> Na teoria da extensão aparece um método característico de cálculo que, transposto para a geometria, é frutífero e inexaurível, e aqui (na teoria do espaço) consiste em sujeitar estruturas espaciais (pontos, retas e assim por diante) diretamente ao

> cálculo. [...] O propósito desse método de cálculo em geometria é unificar os métodos sintético e analítico, ou seja, transportar as vantagens de um para o campo do outro, assim, toda construção é acompanhada por uma operação analítica elementar e vice-versa. (GRASSMANN, 1995, p.285)

Para isso, Grassmann constrói uma teoria geral baseada nos conceitos filosóficos apresentados anteriormente. Esses conceitos filosóficos serão explorados para gerar as leis que regem as operações entre formas matemáticas. A partida é dada com a análise dos conceitos de igualdade e de diferença. Como a negação de um é o outro, a análise restringir-se-á a igualdade. Antes, e como sempre, Grassmann exemplifica algumas ideias que podem representar tal conceito para aguçar a intuição do leitor e, só então, defini-lo com precisão.

> Assim, por exemplo, para dois deslocamentos igualmente longos não podemos dizer que eles são iguais, mas somente que seus comprimentos são iguais e que, então, esses comprimentos ficam na relação absoluta de igualdade. Portanto, temos preservado a simplicidade do conceito de igualdade e podemos defini-lo: Daqueles que são iguais pode-se sempre afirmar o mesmo, ou mais geralmente, que em qualquer julgamento pode-se substituir um pelo outro. [...]
> Obviamente segue disso que se duas formas são iguais a uma terceira, elas são também iguais entre si; e aquelas geradas num caminho idêntico, são ainda iguais. (GRASSMANN, 1995, p.33)

Em seguida, Grassmann apresenta os conceitos opostos e complementares de conjunção e separação. Da mesma maneira como foi feito para a igualdade e a diferença, basta conceituar apenas um; neste caso a conjunção. Quando duas formas matemáticas a e b são conjugadas, elas são chamadas fatores da conjunção e a forma produzida por essa conjunção, $a \cap b$, é o seu produto; produto que só é conhecido depois de estabelecida a natureza particular da conjunção. Se houver a necessidade de distinção, as formas conjugadas levarão os nomes de pré-fator e de pós-fator. Além disso, o produto de conjunção pode ser gerado por mais de dois fatores. Nesse caso, deve-se tomar o cuidado de conjugar duas formas de cada vez tomando-se o produto das duas primeiras conjugado com terceira, e assim por diante, resguardando-se a prioridade indicada pelos parêntesis quando esses ocorrerem.

Caso o produto de uma dada conjunção independa da associação entre duas de três formas conjugadas, ou seja $(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c)$, e independa da ordem de dois fatores (formas), ou ainda $a \cap b = b \cap a$, então a conjunção é chamada elementar.

Utilizando raciocínio lógico, Grassmann prova o seguinte Teorema 2:

> Se uma conjunção for do tipo que se pode trocar os lugares dos parêntesis em torno de três de seus fatores e alterar a ordem de dois de seus fatores sem mudar o produto, então é também verdade que a posição dos parêntesis e a ordem dos fatores não importa para o produto resultante de qualquer número de fatores. (GRASSMANN, 1995, p.35)

Além da busca do produto de dois fatores conjugados, pode-se buscar, através de um processo analítico, um dos fatores em função do outro e do produto da conjunção. Esse processo revela duas novas conjunções inversas: uma relativa ao pré-fator e outra ao pós-fator. Caso a conjunção original permita a troca de fatores sem a alteração do produto, as duas inversas serão, na verdade, uma só, que também aceita a permutação de fatores sem alteração desse produto inverso. A conjunção original recebe o nome de sintética e a(s) inversa(s), o nome de analítica(s).

Para uma conjunção sintética elementar, denotada por $\cap$, as conjunções analíticas associadas serão, em função da comutatividade da sintética, uma única conjunção analítica, representada pelo símbolo $\cup$. Assim, $a \cup b$ representa a forma que conjugada sinteticamente com b, gera a. Daí $a \cup b \cap b = a$. Segue, ainda, que $a \cup b \cup c$ é a forma que gera a quando conjugada sinteticamente com c e depois com b. Como a conjunção original $\cap$ é elementar, então

(1) $$a \cup b \cup c = a \cup c \cup b = a \cup (b \cap c).$$

Por outro lado, $a \cup (b \cup c) = a \cup b \cap c$. De fato, pela definição $(b \cup c) \cup c \cap c = b \cup c$, tem-se:

$$a \cup (b \cup c) = a \cup (b \cup c) \cup c \cap c.$$

Agora, usando (1), vem

$$a \cup (b \cup c) = a \cup (b \cup c \cap c) \cap c.$$

E, novamente pela definição,

$$a \cup (b \cup c) = a \cup b \cap c.$$

Grassmann, fazendo uso do Teorema 2, extrapola essa operação algébrica analítica de símbolo $\cup$ para muitos fatores conjugados sob os parêntesis, sintetizando-a no seguinte teorema:

> Se a conjunção sintética é elementar, então a ordem na qual conjuga-se sinteticamente ou analiticamente não é importante para o produto. Pode-se também inserir ou omitir parêntesis depois de um símbolo sintético se a conjunção contiver somente fatores sintéticos; mas, depois de um símbolo analítico pode-se inserir ou omitir parêntesis somente se os fatores sob parêntesis forem invertidos, ou seja, símbolos analíticos são trocados por sintéticos e vice-versa. (GRASSMANN, 1995, p.36-7)

Se o produto da conjunção analítica é assumido como único, então $a \cap b \cup b = a$; pois $a \cap b \cup b$ é a forma que gera $a \cap b$ quando conjugada sinteticamente com b. Obviamente, a é uma tal forma, e única em função da hipótese acima. Assim, vale a igualdade $a \cap (b \cup c) = a \cap b \cup c$. De fato:

$$a \cap b \cup c = a \cap ((b \cup c) \cap c) \cup c = a \cap (b \cup c) \cap c \cup c = a \cap (b \cup c).$$

Dessa forma, Grassmann conclui mais um Teorema 3:

> Se a conjunção sintética é elementar e a conjunção analítica correspondente é única, então, pode-se inserir ou omitir parêntesis depois de um símbolo sintético. Nesse caso (provado que a unicidade é geralmente válida), chamamos a conjunção sintética de adição e a sua analítica correspondente de subtração. (GRASSMANN, 1995, p.37)

Ainda sob as condições desse Teorema 3, pode-se concluir que, da mesma forma que a troca de fatores não altera o produto sintético, a troca de ordem das conjunções também não altera o produto, ou seja, vale uma espécie de lei comutativa para as conjunções sintética e analítica correspondentes. De fato,

$$a \cap b \cup c = b \cap a \cup c = b \cap (a \cup c) = a \cup c \cap b.$$

Com as conjunções sintética e analítica correspondentes operacionalmente bem estruturadas, Grassmann parte para analisar as formas que estão sendo conjugadas analiticamente. Essa análise gera duas formas muito especiais: a forma indiferente, $(a \cup a)$, e a forma analítica pura, $(\cup\, a)$. A primeira independe do valor de a, pois $b \cup b$ é a forma que conjugada sinteticamente com b gera o próprio b; e $a \cup a$ é uma tal forma, já que $b \cap a \cup a = b$. Assim, para preservar a independência de valores e o significado absoluto único da forma indiferente, adota-se o símbolo ~. A forma indiferente goza, ainda, da seguinte propriedade: $(a \cup \sim) = a = (a \cap \sim)$. Para sua comprovação basta dispor da definição de conjunção analítica e da tese do Teorema 3 acima. Já a segunda, a forma analítica pura, é definida a partir da anterior: $(\cup\, a) = (\sim \cup\, a)$. Valem as propriedades: $\cap\, (\cup\, a) = \cup\, a$ e $\cup\, (\cup\, a) = \cap\, a$, que podem ser demonstradas como segue abaixo.

1. Para qualquer forma b:

$$b \cap ((a \cup a) \cup a) = b \cap (a \cup a) \cup a = b \cap a \cup a \cup a = b \cup a \cap a \cup a = b \cup (a \cup a \cap a) = b \cup a.$$

2. Para qualquer forma b:

$$b \cup ((a \cup a) \cup a) = b \cup (a \cup a) \cap a = b \cup a \cap a \cap a = b \cap a \cup a \cap a = b \cap a.$$

Se a conjunção sintética é a adição, de acordo com a definição dada no Teorema 3 acima, então Grassmann chama a forma analítica pura de forma negativa e a forma indiferente de zero. Além disso, as regras 1 e 2 provadas imediatamente acima asseguram, no caso da adição como conjunção sintética, que podem ser operadas formas e formas negativas num mesmo produto de várias conjunções (sintéticas ou analíticas), pois elas resultam de um mesmo método de geração, mas observadas em sentidos opostos. Assim, todas essas formas (formas e formas negativas) são chamadas similares. Portanto os resultados mostrados são verdadeiros para produtos resultantes de quaisquer dois fatores similares. Interpretando-se o desenvolvimento teórico até aqui, pode-se concluir que Grassmann já havia concebido aquilo que, depois de uma posterior reestruturação semântica e de uma adequação algébrica, torna o conjunto dessas formas similares, munido da adição (conjunção sintética elementar cuja analítica correspondente é única), um Grupo Abeliano. Os elementos neutro e o oposto são representados pelo zero e pela forma negativa, respectivamente. A comutatividade da operação é assegurada pelo fato da conjunção ser elementar. O passo mais delicado é mostrar que essa operação está fechada no conjunto das formas similares escolhidas. O próprio Grassmann resolve o problema, observando que o produto advindo da adição é similar aos seus fatores geradores.

> Especificamente, se considerarmos duas grandezas (formas) que resultam da continuação de um mesmo método de geração, e que portanto chamamos de “geradas num mesmo sentido”, então é claro que podemos arranjá-las para que duas delas compreendam um único todo, de tal maneira que o seu conteúdo inteiro, ou seja, as partes das duas em conjunto, se torne um só, correlato em pensamento. Este todo pode ser considerado como gerado no mesmo sentido que aquelas duas grandezas. Agora é fácil mostrar que essa conjunção é um adição, ou

> seja, que ela é elementar e que a sua analítica é única. Primeiro, eu posso arbitrariamente combinar e trocar, já que as partes que são correlatas em pensamento permanecem os mesmos desse modo, e seu resultado não pode mudar já que elas são todas semelhantes (sendo produzidas pela mesma geração). Sua analítica é também única; se este não for o caso, ao passo que o produto e um fator da conjunção sintética permanecem fixos, o outro fator poderia assumir um valor diferente. Mas um desses dois valores seria então maior que o outro, e assim mais partes já deveriam ter sido somadas a ele. Essas mesmas partes deveriam ter sido somadas ao produto, que deveria então ter mudado, contradizendo a afirmação. (GRASSMANN, 1995, p.39)

Até aqui Grassmann trabalhou com uma conjunção sintética e com a sua analítica correspondente. Agora ele observa a interação entre duas conjunções diferentes $\frown$ e $\frown'$ e diz que uma deve ser definida a partir da outra. O próprio tradutor (do original para o inglês), Lloyd C. Kannenberg, notou uma restrição não explicada:

> Não está claro por que um método de conjunção deve ser especificado a partir do outro; em qualquer caso a sentença nada contribui para esclarecimento total e pode ser omitida sem prejuízo. Deve-se, então, trocar "definição" (Begriffsbestimmung) por "relação" (Beziehung) na sequência do material. (GRASSMANN, 1995, p.302)

Uma suspeita para isso é o fato de que embora Grassmann tivesse a intenção de construir uma estrutura lógica para a matemática, totalmente abstrata e desprovida de qualquer conteúdo real, talvez ele tenha permitido uma incursão um tanto mais intensa da intuição nessa concepção. Assim, a ideia da multiplicação de números como um processo iterativo de somas de mesmas parcelas pode tê-lo guiado quando da exigência de subordinação de uma a outra conjunção. Grassmann afirma ainda que essa subordinação depende da transformação gerada na expressão $(a \frown b) \frown' c$ pela distribuição, quando possível, do fator da conjunção $\frown'$ em relação ao outro, que é produto resultante de dois fatores conjugados através de $\frown$. Então, ele apresenta a Definição 1:

> Se essa transformação puder ser considerada sem alteração do produto combinado, ou seja, se
>
> $$(a \frown b) \frown' c = (a \frown' c) \frown (b \frown' c),$$
>
> então chamaremos a segunda de conjunção de ordem superior em relação à primeira. (GRASSMANN, 1995, p.40)

Grassmann permite que se vislumbre uma estrutura de Corpo, estabelecendo condições para o fechamento dessa nova conjunção $\frown'$ no conjunto das formas similares (já dotado de adição), com a seguinte colocação:

> Em particular, se ambos fatores desta segunda conjunção dependerem da primeira no mesmo caminho, ou ainda, se a definição da nova conjunção for válida tanto para o pré-fator quanto para o pós-fator, e além disso a primeira conjunção for elementar e sua analítica correspondente for única, então chamaremos a segunda de multiplicação já que a primeira leva o nome de adição. (GRASSMANN, 1995, p.40)

Então, a adição é considerada de primeira ordem e a multiplicação, de segunda ordem. Grassmann observa, também, que a potenciação pode ser considerada uma conjunção de terceira ordem. Além disso tudo, a interação da multiplicação com a subtração (analítica única da adição) segue o mesmo padrão da interação multiplicação/adição, ou seja,

$$(a \pm b)c = ac \pm bc$$

e

$$c(a \pm b) = ca \pm cb.$$

> Se os fatores de um produto forem construídos por adições e subtrações, então, sem alterar o produto combinado, pode-se multiplicar cada termo de uma pelos termos da outra, conjugando-se a seguir os produtos resultantes e prefixando símbolos de adição ou de subtração para mesmos ou diferentes símbolos precedentes aos fatores, respectivamente. (GRASSMANN, 1995, p.41)

Por último Grassmann observa que a divisão (analítica da multiplicação), mesmo não sendo única em função da análise do pré-fator ou do pós-fator, também se distribui em relação à adição ou à subtração. Assim, a existência de elemento inverso e a lei associativa da multiplicação estão garantidas. Só não se chega à estrutura de Corpo por não estarem asseguradas a lei comutativa para a multiplicação e a unicidade do elemento inverso, devido à falta de unicidade da divisão. Não se deve acreditar, entretanto, que definir um Corpo era o objetivo de Grassmann, até mesmo porque isso está carregado de interpretação à luz do que se desenvolve hoje em matemática e da própria busca desse trabalho, que é traduzida pela investigação sobre a origem e a evolução do conceito de Espaços Vetoriais. Na verdade, o que Grassmann pretendia era consolidar uma linguagem que fizesse a ligação entre a Geometria Sintética e a Análise Geométrica como já dito anteriormente. E a consolidação dessa linguagem passa pela concepção de vetores (deslocamentos ou extensões para Grassmann) e, também, de operações como soma e produtos entre eles.

Com o propósito de manter o equilíbrio entre intuição e rigor lógico, Grassmann apresenta o conceito de extensão precedido pela seguinte observação:

> [...] para evitar o desgaste do leitor com abstrações contínuas e, ao mesmo tempo, pelo contato com material familiar, colocá-lo numa posição de proceder com liberdade e independência, eu sempre relatarei a derivação de um novo conceito a partir da geometria, a qual é a base da nossa ciência. Entretanto, já que eu sempre apresento o conceito abstrato como a base para a derivação das verdades que formam o conteúdo dessa ciência – sem contar com qualquer verdade geométrica, sou capaz, então, de conservar o conteúdo da ciência completamente puro e independente da geometria. (GRASSMANN, 1995, p.45-6)

A representação geométrica mais evidente de uma extensão é uma linha reta; e é a partir dessa representação que Grassmann abstrai o conceito de extensão linear. No lugar de ponto ou de uma posição particular, e esvaziado de qualquer sentido, coloca-se um elemento, que é um ente singular da ciência abstrata diferente de quaisquer outros entes singulares, embora sejam essencialmente os mesmos, pois podem ser vistos como estados diferentes de um mesmo elemento gerador. Este é o modus operandi da Forma Combinatória Contínua, um dos ramos de estudo da matemática conforme classificação de

Grassmann. A transição de um elemento gerador de um estado (uma posição) para outro(a) é uma evolução. O estado inicial é chamado de elemento inicial e o estado final, elemento final (ver GRASSMANN, 1995, p.46).

Assim, depois dessa argumentação pode-se sintetizar a definição: "Por uma estrutura extensiva de primeira ordem entendemos a coleção dos elementos nos quais o elemento gerador é transformado por uma evolução contínua." (GRASSMANN, 1995, p.47)

A cada estrutura extensiva associa-se uma oposta que possui os mesmos elementos gerados em ordem inversa, ou seja, a evolução contínua se dá a partir do elemento final chegando no elemento inicial, passando pelos mesmos estados da primeira estrutura.

Nesse ponto, Grassmann cria o conceito de estrutura extensiva elementar a partir de uma evolução fundamental. Uma tal evolução gera, por uma única ação (constante) aplicada de maneira iterada e contínua a partir do elemento inicial, todos os elementos da estrutura extensiva; elementos que podem estar separados por uma distância infinitesimal, dada a continuidade da ação. Então: "A estrutura extensiva elementar é aquela que resulta da ação contínua de uma mesma evolução fundamental." (GRASSMANN, 1995, p.47)

Considerando-se, agora, apenas o caminho pelo qual as estruturas extensivas elementares são geradas, tem-se a possibilidade de compará-las independentemente dos elementos que as compõem. Assim, uma estrutura extensiva elementar de primeira ordem será chamada, levando-se em conta somente sua evolução, de grandeza extensiva ou extensão de primeira ordem, ou ainda, de deslocamento. Portanto, duas extensões serão iguais (diferentemente de duas estruturas extensivas, que não prescindem da igualdade entre seus elementos) se forem geradas a partir de mesma evolução. "Finalmente, a coleção de todos os elementos gerados pela continuação da mesma evolução fundamental e de sua evolução oposta é chamada de sistema (ou domínio) de primeira ordem." (GRASSMANN, 1995, p.47-8)

Tomando-se uma extensão como um vetor, duas ideias fundamentais para a construção de um Espaço Vetorial começam a ser esboçadas: classes de equipolências (como subconjunto de um domínio de primeira ordem), no mesmo sentido definido por Bellavitis, e existência de elemento oposto, contemplando a visão de Möbius, embora esse último deva estar ligado à soma, que sequer foi definida. Mas a soma que Grassmann assumirá através de conjunções levará em consideração o princípio evolutivo das extensões, derivando daí (conjunção sintética elementar e Teorema 3) as propriedades já validadas pela análise realizada anteriormente, e fixará definitivamente a ideia de equipolência. O desenvolvimento proposto por Grassmann passa primeiro pela análise de deslocamentos similares, ou ainda, aqueles pertencentes a uma mesma reta; depois é generalizado para dois deslocamentos quaisquer.

> Se a geração contínua de um deslocamento é interrompida no meio do seu curso e então continuada, o deslocamento inteiro aparece como a conjunção de dois deslocamentos adjacentes, um dos quais é a continuação do outro. Os dois deslocamentos são os fatores dessa conjunção e são gerados num mesmo sentido, então o produto da conjunção é o deslocamento que parte do elemento inicial do primeiro e chega no elemento final da segunda; ressaltando ainda que eles são contíguos, ou seja, que o elemento final do primeiro é simultaneamente o elemento inicial do segundo. (GRASSMANN, 1995, p.48)

O processo evolutivo que gera deslocamentos determina deslocamentos opostos de forma única, o que permite concluir que a conjunção acima é adição e sua analítica associada é a subtração. Assim,

$$[\alpha\beta] + [\beta\gamma] = [\alpha\gamma] \text{ e } [\alpha\beta] = [\alpha\gamma] - [\beta\gamma].$$

Tomando α e β iguais na última igualdade: $[\alpha\alpha] = [\alpha\gamma] - [\alpha\gamma] = 0$. Essa é a forma indiferente da adição e, em linguagem moderna, pode-se chamá-la de elemento neutro. Além disso, usando o conceito que Grassmann fornece para negativo – forma analítica pura, tem-se:

$$(-[\alpha\beta]) = 0 - [\alpha\beta] = [\beta\beta] - [\alpha\beta] = [\beta\alpha],$$

ou seja, a forma analítica pura está caracterizada pelo deslocamento oposto de $[\alpha\beta]$. Daí $[\alpha\gamma] + [\gamma\beta] = [\alpha\beta] + (-[\beta\gamma]) = [\alpha\gamma] - [\beta\gamma] = [\alpha\beta]$, o que significa que a operação de adição está fechada não só para os deslocamentos gerados no mesmo sentido, mas também para os gerados em sentido oposto.

> Se dois deslocamentos similares são contíguos, ou seja, o elemento final do primeiro é o elemento inicial do segundo, então o deslocamento que parte do elemento inicial do primeiro e vai até o elemento final do segundo é a soma dos dois. (GRASSMANN, 1995, p.49)

Agora, Grassmann mostra que a adição de deslocamentos similares pode ser estendida para outros deslocamentos – que não contíguos – num sistema de primeira ordem, já que se pode igualar deslocamentos distintos. Se $[\alpha\beta]$ e $[\alpha'\beta']$ são deslocamentos de um mesmo sistema, com $[\alpha\alpha'] = [\beta\beta']$ (também no mesmo sistema – figura 3), então $[\alpha\beta] = [\alpha'\beta']$.

Figura 3

"De acordo com a definição de soma, temos $[\alpha'\beta'] = [\alpha'\alpha] + [\alpha\beta] + [\beta\beta']$ e, desde que $[\alpha'\alpha] = -[\alpha\alpha'] = -[\beta\beta']$, a adição remove $[\alpha\alpha']$ e $[\beta\beta']$, e, portanto, $[\alpha'\beta'] = [\alpha\beta]$." (GRASSMANN, 1995, p.50)

Antes de definir a adição de deslocamentos dissimilares como expansão da definição dada acima para deslocamentos de um mesmo sistema evolutivo, Grassmann constrói sistemas de ordens superiores com base na ideia de evoluções independentes, o que premia sua estrutura com o conceito do que hoje se conhece por "dimensão". Assim, escolhendo-se duas evoluções fundamentais dissimilares e transportando-se um elemento através da primeira (ou sua oposta) e depois seu resultado através da segunda (ou sua oposta), constroem-se infinitos novos elementos. A coleção de todos os elementos gerados a partir dessas duas evoluções fundamentais é chamada sistema de segunda ordem. Ao se transportar um elemento do sistema de segunda ordem para um novo elemento fora desse sistema, a partir de uma terceira evolução fundamental independente das duas primeiras, cria-se um sistema de terceira ordem. Raciocinando-se dessa maneira, pode-se conceber sistemas de ordem arbitrariamente grande.

> [...] eu providenciarei alguns exemplos para auxiliar a intuição. O plano claramente corresponde a um sistema de segunda ordem e ele é assim considerado quando todos os pontos de uma linha reta são movidos numa nova direção (ou sua oposta) não incluída nela; a coleção dos pontos assim gerados forma um plano infinito. Um plano aparece como uma coleção de paralelas que intersectam a linha dada; e certamente, desde que paralelas não se intersectam e a linha original não se intersecta consigo mesma, todos os pontos assim gerados diferem entre si e, consequentemente, a analogia é perfeita. Da mesma forma, todo o espaço infinito é considerado um sistema de terceira ordem pelo movimento dos pontos do plano numa nova direção (ou sua oposta) não incluída no plano. Além disso a geometria não pode progredir, mas a ciência abstrata não conhece limites. [...]
> Retornando ao nosso problema, se eu deixar um elemento evoluir primeiro por um deslocamento a e depois por um deslocamento b, o resultado das duas evoluções é equivalente ao resultado de uma simples evolução dada pela conjunção das duas primeiras, que se forem similares, aparecerá como soma. (GRASSMANN, 1995, p.51)

Grassmann pretende que essa conjunção seja a soma de deslocamentos dissimilares, mas para isso deve resolver o problema da troca de ordem dos fatores da conjunção. Esse problema surge em função de que um elemento gerado pela m-ésima evolução depende das (m−1)-ésimas primeiras evoluções. Assim, como aceitar que $(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c)$? Grassmann desenvolve a seguinte linha de raciocínio para contornar o problema (Figura 4): sejam $[\alpha\beta] = a$ e $[\alpha\alpha'] = [\beta\beta'] = b$, então $[\alpha\beta'] = a \cap b$. Mas $[\alpha\beta'] = [\alpha\alpha'] \cap [\alpha'\beta'] = b \cap [\alpha'\beta']$.

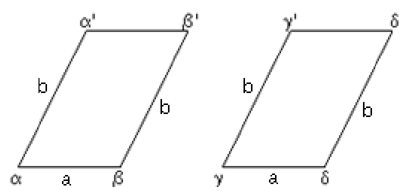


Figura 4

Segue daí que, se os fatores podem ser trocados de posição ($a \cap b = b \cap a$), então $[\alpha'\beta'] = [\alpha\beta]$. Por outro lado deve-se garantir que $[\alpha'\beta'] = [\alpha\beta]$ e a partir daí concluir obviamente a comutação dos fatores da conjunção $\cap$. Entretanto, os deslocamentos são resultados de evoluções pré-estabelecidas, coisa que não ocorre com $[\alpha'\beta']$. Assim, $[\alpha'\beta']$ deve ser definido univocamente através dos processos evolutivos que determinaram a e b.

> Para finalizar consideremos dois deslocamentos iguais:
> $$[\alpha\beta] = [\gamma\delta] = a,$$
> cujos elementos extremos são todos sujeitos à evolução b e transformados em α', β', γ' e δ', ou ainda, que
> $$[\alpha\alpha'] = [\beta\beta'] = [\gamma\gamma'] = [\delta\delta'] = b.$$
> Como $[\alpha'\alpha] = [\gamma'\gamma] = (-b)$, temos para as evoluções $[\alpha'\beta']$ e $[\gamma'\delta']$ as equações
> $$[\alpha'\beta'] = [\alpha'\alpha] \cap [\alpha\beta] \cap [\beta\beta'] = (-b) \cap a \cap b$$
> $$[\gamma'\delta'] = [\gamma'\gamma] \cap [\gamma\delta] \cap [\delta\delta'] = (-b) \cap a \cap b;$$

> e então as evoluções são iguais. (GRASSMANN, 1995, p.52-3)

Agora essas evoluções podem ser definidas como $[\alpha'\beta'] = [\gamma'\delta'] = a$, já que foram caracterizadas pela evolução fundamental a. Além disso, Grassmann expande essas conclusões, por um raciocínio análogo, a um sistema de ordem m qualquer. Portanto, num sistema de ordem m é válido $a \cap b = b \cap a$, ou seja, que a conjunção é elementar e deve ser chamada de adição. Assim:"Se $[\alpha\beta]$ e $[\beta\gamma]$ representam evoluções quaisquer, então $[\alpha\gamma] = [\alpha\beta] + [\beta\gamma]$." (GRASSMANN, 1995, p.54)

Grassmann toma o cuidado de mostrar que esse resultado não se restringe aos elementos inicial e final do produto da conjunção, mas é válido para todo deslocamento. De maneira mais clara, ele mostra que existe apenas um único sistema de primeira ordem entre os elementos inicial e final do produto, já que os fatores da conjunção foram gerados por evoluções fundamentais e, portanto, que o produto da conjunção é gerado por uma evolução fundamental. "Se se juntarem dois ou mais deslocamentos contíguos, então o deslocamento que parte do elemento inicial do primeiro e chega no elemento final do último é sua soma." (GRASSMANN, 1995, p.57)

Daqui pode-se observar que um múltiplo qualquer de um deslocamento pertence ao mesmo sistema de primeira ordem, pois todo deslocamento pode ser continuado pela evolução fundamental (ou sua oposta). Mais do que isso, o resultado acima permite observar, também, que vale a propriedade distributiva de grandezas numéricas relativamente à soma de deslocamentos; ou seja, se n é uma grandeza numérica e a e b são deslocamentos quaisquer de um sistema de ordem m, então $n(a\cap b)=na\cap nb$.

Além disso, é mostrado que a adição de deslocamentos de um sistema de ordem m pode ser efetuada por deslocamentos contíguos ou não contíguos, seguindo um raciocínio análogo ao efetuado para deslocamentos em sistemas de primeira ordem, mas considerando-se os m métodos evolutivos independentes. "Se todos os elementos de um deslocamento são evoluídos por uma mesma grandeza, então o deslocamento resultante dessa evolução é igual ao original." (GRASSMANN, 1995, p.58)

Por fim, Grassmann mostra que um sistema de ordem m não depende de determinados m métodos de evolução fundamental, ou seja, a escolha de m métodos independentes de evolução não interfere nas operações que envolvem adição de deslocamentos desenvolvidas anteriormente. O raciocínio é praticamente indutivo e é apresentado através da seguinte técnica: sejam a, b, c, ..., m os métodos que geram um sistema de ordem m. Uma evolução p pertencente ao sistema e independente de b, c, ..., m pode ser vista como $p = a_1 + b_1 + c_1 + \ldots + m_1$, e um elemento q qualquer desse sistema pode ser representado por $q = a_1 + b_2 + c_2 + \ldots + m_2$ a partir de um dado elemento do sistema. Fazendo $a_1 = p - b_1 - c_1 - \ldots - m_1$, tem-se $q = p + (b_2 - b_1) + (c_2 - c_1) + \ldots + (m_2 - m_1)$. Assim q pode ser escrito também como resultado de um novo conjunto de evoluções aplicados a um mesmo elemento inicial do sistema.

> Todo deslocamento de um sistema de ordem m pode ser representado pela soma de m deslocamentos pertencentes a m métodos independentes de evolução do sistema, sendo única para cada conjunto de tais evoluções. (GRASSMANN, 1995, p.60)

E, além disso:

> Todo sistema de ordem m pode ser gerado pelos mesmos m métodos independentes de evolução a partir de um elemento qualquer; ou seja, todos os outros elementos podem ser gerados a partir de um simples elemento por aqueles métodos. (GRASSMANN, 1995, p.60)

Toda a apresentação feita nesse capítulo parece ter sido a grande influência recebida por Giuseppe Peano (1858-1932) quando da elaboração de uma estrutura axiomática que pode ser reconhecida como de Espaços Vetoriais em seu *Calcolo Geometrico* de 1888. Nessa sua obra, Peano expressou o reconhecimento público mais contundente, até então, relativamente ao *Ausdehnungslehre* de Grassmann. Após enumerar, no prefácio de seu *Calcolo Geometrico*, as influências marcantes para o desenvolvimento dessa obra e de todo esse campo de estudos matemáticos, a saber, algumas ideias de Leibniz, o cálculo do baricentro de Möbius, as equipolências de Bellavitis, os quaternions de Hamilton e o *Ausdehnungslehre* de Grassmann, Peano enaltece o trabalho de Grassmann e dá um parecer sobre as dificuldades enfrentadas para sua disseminação:

> Destes vários métodos, o último citado, pela sua grande extensão, incorpora os outros e é superior em seu poder de cálculo e na simplicidade de suas fórmulas. Mas os conteúdos excessivamente eruditos e confusos impediram a difusão daquela ciência; e mesmo suas aplicações à geometria ainda são pocuo apreciadas pelos matemáticos. (PEANO, 2000, p.ix)

Mas, isso ocorreu após a morte de Grassmann e após terem passados mais de cinquenta anos da primeira e fracassada edição do *Ausdehnungslehre*. O desgaste desse fracasso também é atestado pelas observações de Michael Crowe:

> Assim Grassmann experimentou o que deve ser a mais dolorosa experiência para o autor de um novo trabalho: seu livro de parte alguma recebeu atenção; o público foi completamente silencioso sobre ele; não houve um que o discutisse ou mesmo tornasse pública alguma falha. Os matemáticos para os quais ele tinha enviado o trabalho expressaram-se nada frios em relação a ele, alguns até mesmo benevolentes, mas ninguém realmente o estudou. (Grassmanns Leben, compreendido no volume III, parte II da obra 'Hermann Grassmanns Gesammelte mathematische und physicalische Werke', Leipzig, 1894-1911). (CROWE, 1994, p.78)

Por fim, dois aspectos pareceram determinantes para a pequena aceitação da obra de Grassmann: ausência de raciocínio intuitivo e caráter altamente filosófico.

> [...] Ernest Nagel sugeriu que uma razão maior para a pobre recepção do trabalho de Grassmann é que "a cena contemporânea foi dominada pela visão Kantiana de que a intuição é indispensável para a matemática..."
>
> À visão de Nagel pode ser adicionada a opinião de A. E. Heath. Escrevendo em 1917, Heath argumentou que a maior razão para a pobre recepção foi a natureza filosófica do livro, condição composta por uma reação contra uma forma filosófica de apresentação que aparecia para os matemáticos como o resultado de "exageros da unificação metafísica do conhecimento nas escolas de Schelling e Hegel". (CROWE, 1994, p.79)

Análise Geométrica de Leibiniz a Grassmann e a Estruturação de Produtos Vetoriais

Mediante a fraca recepção ao *Ausdehnungslehre* por parte dos seus contemporâneos, Grassmann ainda tentou encontrar algum interlocutor que pudesse apreciar a obra e resenhá-la numa revista de divulgação científica. O próprio Möbius, que fora indagado por Grassmann sobre a possibilidade de realizar tal tarefa, tendo em vista – segundo o próprio Grassmann – que ele era a pessoa que estava na melhor posição para o julgamento do mesmo, recusou-a dizendo-se incapaz de contemplá-la dada a sua densidade filosófica, estando portanto fora do seu campo de atuação. Em contra partida, Möbius procurou outros matemáticos com formação filosófica que pudessem fazer a resenha. Sem sucesso, chegou a propor a Grassmann que ele próprio a fizesse! (ver CROWE, 1994, p.78-9)

No entanto, Möbius, ainda que não tenha apreciado ou desfrutado profundamente da obra de Grassmann, soube compreender que ele poderia ganhar o prêmio oferecido pela *Jablonowiskische Gesellschaft der Wissenschaft* para desenvolver as ideias esboçadas por Leibniz na sua carta, de 1679, destinada a Christian Huygens (1629-1695), publicada pela primeira vez em 1833. Möbius notificou Grassmann, que deu cabo do desafio. Surgiu daí, com o apoio (e como prêmio) da *Jablonowiskische…*, a publicação, em 1847, de *Geometrische Analyse geknüpft und die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik*, com um apêndice escrito por Möbius. Com o trabalho, Grassmann obteve reconhecimento, ainda que recaísse sobre ele críticas semelhantes às dirigidas ao *Ausdehnungslehre*. (ver CROWE, 1994, p.80-1)

Logo após Grassmann apresentar a estrutura algébrica do seu *Ausdehnungslehre*, ele faz uma crítica ao modelo axiomático da geometria, nos moldes propostos por Euclides, e que era assumido quase que como uma verdade suprema e absoluta até seu tempo.

Uma das observações feitas por Grassmann diz respeito à afirmação segundo a qual uma reta que possui dois pontos de um plano está contida nele: “Agora, ou ela é assumida tacitamente (conforme Euclides), ou ela está implícita na definição de plano ou, finalmente, ela é afirmada como um postulado em separado.” (GRASSMANN, 1995, p.61)

Grassmann descarta a primeira por não condizer com uma postura científica e opta pela segunda vislumbrando uma simplificação da estrutura axiomática.

> [...] o plano fica definido se ele é uma coleção das paralelas que podem ser traçadas a partir de uma reta numa direção não contida nela ou se ele é a coleção das retas que são traçadas a partir de um ponto até uma reta.
> Assim, se ficamos com a primeira definição, então certamente deve-se provar primeiro que toda reta que intercepta duas retas do plano deve interceptar todas as demais, um resultado que não pode ser provado sem toda uma série de teoremas auxiliares. Se talvez definirmos o plano como uma superfície que contém toda reta que possui dois pontos em comum com ela, isto ilustra como o teorema afirmado previamente é trazido para dentro da geometria, escondendo-se na sua definição. [...] No entanto, se um postulado pode ser eliminado sem que haja a necessidade de introduzir outro, então isso deve ser feito, mesmo que seja requerida uma completa reestruturação da ciência, já que a ciência necessariamente alcança sua característica de simplicidade por tais eliminações. (GRASSMANN, 1995, p.61)

Depois de sugerir esta inadequação nos fundamentos da geometria, Grassmann faz uma proposta de axiomatização para resolver o problema, utilizando-se de subsídios vindos da sua teoria da extensão e argumentando ainda que:

> Assim, restam como postulados em geometria somente aquelas verdades que são atraídas pela percepção do espaço. Estes postulados serão, então, corretamente formulados se em sua totalidade proverem uma completa descrição do espaço e se nada é incluído que não esteja suportado por esse relato. [...]
> No entanto, os postulados da geometria como devemos assumi-los expressam as propriedades fundamentais de espaço como elas são transmitidas à nossa imaginação, ou seja, pela simplicidade e pela relativa limitação. (GRASSMANN, 1995, p.62)

Tudo é então resumido nos dois postulados a seguir: um que expressa a simplicidade do espaço e outro que expressa sua relativa limitação, nessa ordem.

1. O espaço é constituído igualmente em todas as posições e todas as direções; ou seja, iguais construções podem ser transportadas para todas as posições e em todas as direções.
2. Espaço é um sistema de terceira ordem. (GRASSMANN, 1995, p.62-3)

O primeiro postulado é desmembrado em três para facilitar a compreensão de seu significado; assim, de acordo com Grassmann, a estrutura toma a seguinte forma:

1. Os resultados de construções absolutamente iguais e diretamente iguais[2] são ainda absolutamente iguais e diretamente iguais.
2. Os resultados de construções opostas são novamente opostas.
3. O resultado de construções absolutamente iguais (mesmo pensadas em posições e em direções iniciais diferentes) são ainda absolutamente iguais.
4. Espaço é um sistema de terceira ordem. (GRASSMANN, 1995, p.63)

Grassmann justifica, ainda, que a simplicidade da percepção espacial representada pelos três primeiros postulados é indispensável para a concepção de reta, plano e ângulo, respectivamente. Em seguida, ele adota uma caracterização simbólica e resolve alguns problemas elementares de geometria, com bom equilíbrio na apresentação das equações e das construções geométricas, ou seja, uma interferindo diretamente na outra sem a necessidade de "traduções".

O símbolo "#" é aquele utilizado na caracterização anunciada. Ele combina igualdade (=) e paralelismo (//), e significa que duas grandezas são absoluta e diretamente iguais. Assim, "se dois deslocamentos AB e BC são opostos a outros dois DE e EF, ou que AB # ED e BC # FE, então, de acordo com o segundo postulado, AC é oposto a DF, ou seja, CA # DF." (GRASSMANN, 1995, p.64)

[2] *Diretamente iguais* ou *igualdade direta* significa igualdade em direção e sentido.

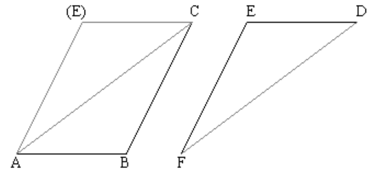


Figura 5

E, diferentemente da apresentação tradicional da geometria tem-se o seguinte teorema: "Se dois dos lados de um quadrilátero conectados contiguamente são opostos, então os outros dois também o são." (GRASSMANN, 1995, p.64)

Então, os problemas acima referidos são apresentados como abaixo e, naquela obra, são resolvidos imediatamente:

> Problema 1: Traçar um deslocamento AX igual e diretamente igual a outro deslocamento BC dado.
> Problema 2: Dividir um deslocamento em um número arbitrário de partes iguais.
> Problema 3: Encontrar o ponto X satisfazendo a equação [AX] = [BC] + [DE].
> Problema 4: Encontrar o ponto X satisfazendo a equação [AX] = [BC] − [DE]. (GRASSMANN, 1995, p.66-7)

Finalizando essas aplicações geométricas, Grassmann introduz o conceito de desvio. O desvio de um ponto A a partir de um ponto B é o deslocamento [BA]. E o desvio coletivo de um ponto R a partir de uma série de pontos A, B, C, ... é [AR] + [BR] + [CR] + … Então é apresentado o teorema:

> Se o desvio coletivo de uma série de m pontos a partir de um ponto R é igual a m vezes o desvio de um ponto S a partir do mesmo ponto R, então isso também é verdadeiro em relação a qualquer ponto colocado no lugar de R e, portanto, o desvio da série a partir de S é zero. Contrariamente: se o desvio coletivo de um ponto S a partir de uma série de pontos é zero, então o desvio de qualquer outro ponto R a partir desta série é igual a m vezes o desvio do mesmo ponto a partir de S. (GRASSMANN, 1995, p.68)

A representação algébrica desse teorema é dada pela expressão matemática:

$$[RA_1] + [RA_2] + \ldots + [RA_m] = m\cdot[RS] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [SR] + [RA_1] + [SR] + [RA_2] + [SR] + [RA_3] + \ldots + [SR] + [RA_m] = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [SA_1] + [SA_2] + \ldots + [SA_m] = 0.$$

Além disso, o ponto S é chamado médio dos pontos da série e esse resultado tem seu paralelo no Cálculo do Baricentro de Möbius, ou ainda, no teorema que generaliza a existência e unicidade do centróide para um sistema de n pontos materiais (Teorema 1). A grande diferença é que Grassmann desenvolve seu raciocínio a partir de uma visão abstrata e Möbius, ao contrário, parte de uma análise empírica.

Agora Grassmann se volta também para a física, mais especificamente para a mecânica, e faz uma leitura das Leis de Newton sob a luz das ferramentas do *Ausdehnungslehre*, adequadas a mais essa aplicação nas ciências reais. Dessa maneira, as três leis tomam as seguintes formas:

> Primeira Lei: Toda ação de uma força sobre a matéria é ao mesmo tempo a comunicação a ela de uma força que resta sempre igual a si mesma (isto é, resta igual em intensidade e paralela a sua direção original).[3]
> Segunda Lei (a): Duas forças transmitidas a um ponto são somadas.
> Segunda Lei (b): Duas partículas materiais sujeitas a ação de uma mesma força motriz também experimentam mesma ação a partir de outra força motriz.
> Terceira Lei: Se duas partículas de igual massa agem uma sobre a outra, a soma de seus movimentos resta o mesmo como se elas não agissem uma sobre a outra. (GRASSMANN, 1995, p.69-70)

Grassmann considera partículas materiais como pontos ou elementos infinitamente pequenos de extensão com mesma massa e conceitua velocidade a partir da análise da Segunda Lei (b):

> [...] desde que colocamos a força igual ao deslocamento que uma partícula material, cuja massa é tomada como a unidade de massa, descreve numa unidade de tempo, e desde que essa força reside permanentemente nela, então a força residente na unidade de massa é igual a sua velocidade. (GRASSMANN, 1995, p.70)

Além disso, Grassmann comenta que essas Leis expressam juntas um mesmo princípio de conservação, ou seja, as forças se mantêm elas próprias na sua totalidade.

A partir dessas considerações, Grassmann combina os princípios da inércia, da soma de forças, da igualdade de massas e da ação mútua para apresentar o seguinte teorema:

> "A força coletiva (ou movimento coletivo) residente numa coleção de partículas materiais em qualquer tempo é a soma das forças coletivas (ou movimentos coletivos) residentes nela em qualquer tempo precedente mais a força líquida comunicada a ela no intervalo de tempo passado; sendo que todas as forças são interpretadas como deslocamentos de direção e de comprimento fixos e que as referidas partículas, como possuindo massas iguais." (GRASSMANN, 1995, p.71)

Como consequência desse resultado, se p for a força residente em qualquer momento num sistema de m pontos materiais, cujas massas são iguais entre si e iguais a unidade, sendo ainda $\alpha_1,..., \alpha_m$ suas posições naquele instante e $\beta_1,..., \beta_m$ suas posições depois de um lapso unitário de tempo, e se a força for constante no transcorrer desse tempo, não havendo outra força externa agindo no sistema, então:

$$[\alpha_1\beta_1] + \ldots + [\alpha_m\beta_m] = p.$$

Tomando-se α e β como as médias das séries $\alpha_1,..., \alpha_m$ e $\beta_1,..., \beta_m$, respectivamente, então

$$[\alpha_1\alpha] + [\alpha\beta] + [\beta\beta_1] + \ldots + [\alpha_m\alpha] + [\alpha\beta] + [\beta\beta_m] = p \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ([\alpha_1\alpha] + \ldots + [\alpha_m\alpha]) + m\cdot[\alpha\beta] + ([\beta\beta_1] + \ldots + [\beta\beta_m]) = p \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow m\cdot[\alpha\beta] = p \Leftrightarrow [\alpha\beta] = p/m.$$

Assim é introduzido, por fim, o conceito de centro de massa, útil para estudos em estática (ou mecânica).

[3] Grassmann usa força como quantidade de movimento e movimento indistintamente.

> A velocidade do centro de massa de um sistema é a mesma como se toda a massa do sistema residisse nele e a força líquida em todo o sistema agisse sozinha sobre ele. [...]
> O movimento do centro de massa de um sistema é o mesmo como se toda a massa do sistema residisse nele e a força líquida em todo o sistema agisse sozinha sobre ele. (GRASSMANN, 1995, p.72)

Depois de apresentar essas aplicações advindas das concepções estruturadas no seu *Ausdehnungslehre*, Grassmann comenta seu método:

> Mas a vantagem essencial do nosso método não é a brevidade, mas é a de que cada passo nos cálculos é simultaneamente a expressão pura do correspondente passo conceitual, ao passo que nos métodos mais antigos o conceito estava relegado completamente a um segundo plano como uma consequência da introdução de três arbitrários eixos coordenados. E, na discussão realizada aqui, eu espero que já tenha trazido para consideração a vantagem da nova análise; apesar de que dada a vantagem da nossa ciência, esta virá mais claramente à luz, e somente depois de toda ela completada é que então se tornará totalmente clara. (GRASSMANN, 1995, p.72)

Até então, todas as técnicas apresentadas por Grassmann, relativamente a operações envolvendo soma de vetores e produto desses últimos por escalares, já eram de alguma forma utilizadas; não necessariamente com a mesma linguagem simbólica. É sempre bom ter em mente que o grande diferencial é o nível de organização técnico/filosófico encontrado na obra de Grassmann, que possibilita de imediato uma padronização da linguagem. O mais profundo e inovador vem agora com o produto entre vetores idealizado no *Ausdehnungslehre* e baseado em resultados obtidos na geometria plana com o estudo de paralelogramos. Essa abordagem mostra mais uma vez, e com toda sua força, a busca de equilíbrio entre intuição e abstração feita por Grassmann na condução do desenvolvimento teórico da matemática. Assim, imbuído do conceito de área é enunciada uma lei:

> Se, no plano, um deslocamento é transladado por uma sequência qualquer de deslocamentos, toda a área assim gerada tem a mesma grandeza como se tivesse sido transladada pela soma desses deslocamentos (contanto que sejam associados sinais aos elementos individuais da área... [, sendo positivos aqueles que forem gerados por uma translação que acompanha o sentido do deslocamento e negativos os demais]). (GRASSMANN, 1995, p.73-4)

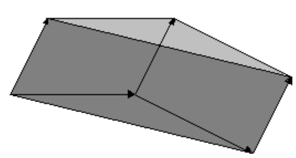


Figura 6

Também é verdade que “a área, num plano, descrita por uma linha poligonal (transladada) é igual àquela da linha com mesmos pontos iniciais e finais.” (GRASSMANN, 1995, p.74)

Esses dois resultados permitem que se veja a conjunção entre dois deslocamentos, preliminarmente denotada por $\cap$, cujo produto é a área gerada pelo movimento de um ao longo do outro, como sendo uma conjunção multiplicativa (ver Definição 1). Os resultados podem ser transcritos, respectivamente, assim:

$a \cap (b + c) = a \cap b + a \cap c$ e $(b + c) \cap a = b \cap a + c \cap a$.

Apesar de construir uma conjunção multiplicativa, Grassmann enfrenta agora o seguinte problema: na Teoria Geral das Formas, apresentada anteriormente no título ESTRUTURA ALGÉBRICA DO *AUSDEHNUNGSLEHRE*, o produto de conjunções entre extensões de mesma espécie é ainda dessa mesma espécie, o que não está ocorrendo aqui. Portanto ele faz um esforço de interpretação e definição rigorosa dessa nova conjunção. O ponto de partida é observar qual é o elemento gerador e sua evolução até a construção da extensão como produto da conjunção.

> O primeiro deslocamento a aparece aqui como o gerador, o segundo b como a medida da geração; e se a e b forem dissimilares, o produto da geração será parte do sistema de segunda ordem gerado por a e b e deverá ser concebido como uma extensão de segunda ordem. (GRASSMANN, 1995, p.76)

Essa ideia é extrapolada para um produto advindo de uma conjunção de n fatores $a \cap b \cap c \cap \ldots$, com a, b, c,… deslocamentos (ou extensões de primeira ordem). Como $a \cap b$ é uma extensão de segunda ordem, então a extensão $a \cap b \cap c$ será concebida como de terceira ordem, e assim por diante até que o produto de n fatores, que será uma extensão de n-ésima ordem.

Agora, apoiado na Teoria Geral das Formas, Grassmann mostra que essa nova extensão de ordem n independe da posição dos fatores que a compõem ($A \cap (b + b_1) = A \cap b + A \cap b_1$) e é, portanto, gerada a partir de uma conjunção multiplicativa em relação à soma de deslocamentos similares. Além disso, ele conclui que: "[...] um produto no qual dois fatores são similares ou, de maneira mais geral, os n fatores são mutuamente dependentes, ou ainda, o produto pertence a um sistema de ordem menor do que n, então ele é considerado zero." (GRASSMANN, 1995, p.78)

Para que a conjunção ganhe um caráter totalmente científico, na sua concepção filosófica Grassmann (GRASSMANN, 1995, p.79-80) mostra que esta relação vale também para a adição de deslocamentos dissimilares, ou ainda, mostra que

$(a + b_1)\cdot b = a\cdot b$ e $b\cdot(a + b_1) = b\cdot a$.

De fato, sejam $a = [\alpha\beta]$, com α e β elementos (Figura 7) e $b_1 = [\beta\gamma]$, então $a + b_1 = [\alpha\gamma]$. Além disso, seja $b = [\alpha\alpha'] = [\beta\beta'] = [\gamma\gamma']$.

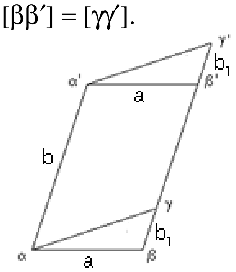


Figura 7

Considerando-se $[\alpha\beta\beta'\alpha']$ como a·b e $[\alpha\gamma\gamma'\alpha']$ como $[\alpha\gamma]\cdot b$ ou $(a + b_1)\cdot b$, então

$$[\alpha\beta\beta'\alpha'] = [\alpha\beta\gamma'\alpha'] - [\alpha'\beta'\gamma']$$

e

$$[\alpha\gamma\gamma'\alpha'] = [\alpha\beta\gamma'\alpha'] - [\alpha\beta\gamma].$$

Como $[\alpha\beta\gamma]$ e $[\alpha'\beta'\gamma']$ são extensões iguais, pois a última resulta da primeira a partir da sua evolução sobre os elementos de b, então está mostrada a relação desejada. Grassmann mostra, ainda, que o resultado não se altera para deslocamentos gerados em sentidos opostos (operação de subtração). De forma totalmente análoga, ele mostra também que $b\cdot(a + b_1) = b\cdot a$.

Daqui segue diretamente a propriedade que diz que dois deslocamentos similares multiplicados dão zero, pois se a = 0 então $b\cdot b_1 = 0$. Segue também que $a\cdot b = -b\cdot a$, pois $(a + b)\cdot(a + b) = 0 \Leftrightarrow a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b = 0 \Leftrightarrow a\cdot b + b\cdot a = 0$.

Esse é o Produto Externo, cujo desenvolvimento Grassmann sintetiza no seguinte teorema:

> Se pelo produto externo de n deslocamentos entendemos a extensão de ordem n que é gerada quando cada elemento do primeiro deslocamento gera o segundo, cada elemento gerado gera o terceiro, e assim por diante, de tal forma que cada grandeza extensiva de ordem n é interpretada como uma dentre as partes similares do sistema de ordem n ao qual pertence, então para ele, levando-se em conta somente produtos de n fatores dentro do mesmo sistema considerado, temos todas as leis que relacionam a multiplicação com a adição, e também a lei que determina mudança de sinal para produtos com troca de fatores elementares. (Grassmann, 1995, p.84)

Agora Grassmann toma esse resultado e aplica-o ao volume de paralelepípedos, confirmando aquilo que Möbius também já havia proposto relativamente a áreas de triângulos e a pirâmides, como exposto no texto sob o título ÁLGEBRA VETORIAL acima:

> Os sinais dos volumes de dois paralelepípedos são iguais ou opostos de acordo com (expressando de maneira figurativa) a ideia de que os corpos estejam colocados sobre a primeira face (com pés no ponto inicial e cabeça no ponto final) virando-se a partir da direção do segundo lado para o terceiro, seguindo mesmos sentidos ou sentidos opostos. (GRASSMANN, 1995, p.86)

A melhor ideia que se pode fazer hoje dessa lei é a famosa Regra da Mão Direita para orientação vetorial, extremamente útil em aplicações na Física, como por exemplo na Teoria Eletromagnética.

Por fim ele fixa a forma, que hoje se tronou mais convencional, para o cálculo da área de um paralelogramo em termos do Produto Externo:

$a\cdot b = \underline{a}\,\underline{b}\,\mathrm{sen}(ab)$,

sendo $\underline{a}$ e $\underline{b}$ comprimentos de a e b, respectivamente, e (ab) o ângulo entre a e b medido a partir do primeiro para o segundo.

Toda estrutura apresentada até aqui é o que subsidia Grassmann para adequar as ideias de Leibniz sobre um método direto de análise geométrica.

A ideia de Leibniz era desenvolver uma caracterização para análise de problemas que descrevesse a construção da solução em termos totalmente geométricos. Hoje, vê-se que a resolução de um problema geométrico passa por duas etapas: a modelagem do problema em termos algébricos e a solução algébrica desse modelo, que passa por uma interpretação geométrica. Leibniz queria, grosso modo, uma caracterização que acabasse com essas duas traduções sucessivas: geométrico/algébrica e algébrico/geométrica. Então, ele esboçou os fundamentos dessa caracterização. Assumiu que as primeiras letras do alfabeto representariam pontos conhecidos e que as últimas representariam pontos desconhecidos ou variáveis, além de declarar 8 como símbolo de congruência.

Assim: ax 8 bc é uma esfera de centro a e raio bc; ax 8 bx é um plano perpendicular ao segmento ab pelo seu ponto médio.

Toda figura do espaço pode ser escrita através das duas representações acima, embora a segunda também possa ser vista como o lugar geométrico dos centros de todas as circunferências que contém a e b. Portanto, toda figura se resume à representação de esferas associadas adequadamente. Uma reta é o lugar geométrico dos centros das esferas que contêm os pontos não colineares a, b e c simultaneamente: ax 8 bx 8 cx. Uma circunferência é a interseção de duas esferas: ax 8 ac e bx 8 bc, ou ainda, abx 8 abc. Por outro lado, dados dois pontos distintos ou três pontos não colineares, a caracterização de Leibniz consegue, como veremos a seguir, representar a reta e o plano determinados por esses pontos, respectivamente.

De fato, dados dois pontos distintos a e b, sejam a′, b′ e c′ três pontos auxiliares não colineares. A reta determinada por a e b deve satisfazer as três expressões seguintes: a′x 8 b′x 8 c′x; a′a 8 b′a 8 c′a; a′b 8 b′b 8 c′b. Combinando-se as duas últimas, temos: aba′ 8 abb′ 8 abc′.

Agora, dados três pontos a, b e c não colineares, sejam a′ e b′ pontos auxiliares distintos. O plano determinado pelos pontos a, b e c deve satisfazer simultaneamente: a′x 8 b′x; a′a 8 b′a; a′b 8 b′b; a′c 8 b′c. Combinando-se as três últimas, temos: abca′ 8 abcb′.

Portanto, as caracterizações da reta determinada por a e b e do plano determinado por a, b e c são, respectivamente:

a′x 8 b′x 8 c′x, aba′ 8 abb′ 8 abc′;

e;

a′x 8 b′x, abca′ 8 abcb′.

Esse foi o esboço da caracterização idealizado e traçado por Leibniz, que ficou devendo o seu desenvolvimento. Ele sabia das dificuldades que essa caracterização possuía em função da impossibilidade de desfazer-se de pontos auxiliares e da quantidade em que eles apareceriam em problemas mais complexos. Ainda que não tenha concluído este sistema de análise geométrica, Leibniz acreditava ser este o caminho ideal. Aí estava o desafio que Grassmann se prestou a vencer, em função da dica de Möbius: desenvolver o sistema de Leibniz.

Grassmann comenta que a congruência, no sentido de Leibniz (8), pretende substituir o símbolo de igualdade em expressões matemáticas. Mas a igualdade preserva a troca de "elementos iguais" nos dois membros de uma expressão matemática, o que não ocorre com a congruência. O seguinte exemplo é uma mostra disso: sejam ac 8 bc e d um ponto fora da perpendicular ao segmento ab pelo ponto c; não é verdade que acd 8 bcd. De fato, para que isso fosse verdade, ad seria congruente a bd, o que não ocorre (Figura 8).

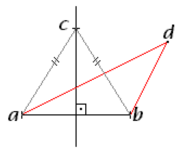


Figura 8

Reside neste fato um dos maiores inconvenientes da caracterização Leibniziana. E é aqui que se inicia a intervenção de Grassmann: se abc é congruente a def, qual deve ser a igualdade satisfeita entre os dois conjuntos de pontos? Começa, assim, a busca de uma função geométrica dos pontos a, b e c que seja igual à correspondente função dos pontos d, e e f. Chamando essa função de figura e representando-a por fig., tem-se a seguinte associação: abc 8 def equivale a fig.(a,b,c) = fig.(d,e,f). Além disso, fig.(a,b) é igual a fig.(c,d) se ab tiver o mesmo comprimento que tem cd. Mas qual será a expressão dessa função, especificamente no caso de dois pontos? Já que a igualdade de deslocamentos implica congruência (não o contrário!), então a igualdade fig.(a,b) = fig.(c,d) será representada por $f(b - a) = f(d - c)$, e a pergunta recai, agora, sobre a expressão de f. Levando-se em consideração que dois deslocamentos, $(b - a)$ e $(d - c)$, que estão numa mesma reta e que possuem mesmo comprimento, mas que são opostos, tornam iguais $f(b - a)$ e $f(d - c)$, então $f(p) = f(-p)$, com p representando um deslocamento. Enfim, essa função deve ser $f(p) = p^2$.

A partir desse raciocínio é que Grassmann desenvolve o conceito de Produto Interno de deslocamentos, que é o mesmo Produto Escalar conhecido ainda hoje. Mas para chegar à definição geral, Grassmann mostra qual é a essência filosófica do seu trabalho apresentando algumas definições e teoremas[4].

> (Definição 1): Uma série de grandezas espaciais A, B, C, … é proporcional a uma série de grandezas numéricas α, β, γ, … se existir alguma grandeza espacial não nula M tal que $A = \alpha M$, $B = \beta M$, $C = \gamma M$, … e assim por diante. Neste caso, as grandezas espaciais são chamadas similares em relação a M. Além disso, se duas séries de grandezas espaciais são proporcionais a uma mesma série de grandezas numéricas, então elas são mutuamente proporcionais. [...]
> (Teorema 1): Se uma série de grandezas espaciais A, B, C, … for proporcional a uma série de grandezas numéricas α, β, γ, …, e essa for proporcional a uma outra série de grandezas numéricas, então a série de grandezas espaciais será proporcional a essa última. (GRASSMANN, 1995, p.332)

De fato, como α, β, γ, … e $\rho\alpha$, $\rho\beta$, $\rho\gamma$, … são grandezas proporcionais, então, seja $M' = M/\rho$. Portanto $A = \alpha\rho M'$, $B = \beta\rho M'$, $C = \gamma\rho M'$, …, o que prova o teorema.

---

[4] Deve-se lembrar que grandezas numéricas e grandezas espaciais são entendidas, respectivamente, como números reais e pontos ou deslocamentos.

Grassmann tem, assim, o caminho preparado para transferir propriedades de grandezas numéricas para grandezas espaciais.

> (Definição 2): Uma equação algébrica homogênea de grandezas espaciais similares será verdadeira se, e somente se, trocando-se essas grandezas pelas grandezas numéricas proporcionais, a equação permanecer verdadeira. (GRASSMANN, 1995, p.333)

É assim que fica consolidada a igualdade $f(p) = f(-p)$, pois p e $-p$ mantêm a mesma relação que 1 e -1, e daí $p^2 = (-p)^2$. Só então Grassmann desenvolve paulatinamente o conceito de Produto Interno, definindo-o primeiro para deslocamentos paralelos:

> (Definição 3): O Produto Interno de quaisquer dois deslocamentos paralelos a e b ($a \times b$) é a medida de um deslocamento de mesma direção, dada pela multiplicação dos números proporcionais às grandezas dos deslocamentos iniciais segundo um mesmo quociente. (GRASSMANN, 1995, p.334)

Das definições 2 e 3 acima vem $a\times(b + c) = a\times b + a\times c$. Numa tentativa de expandir essa ideia de Produto Interno, Grassmann toma dois deslocamentos perpendiculares a e b e realiza o seguinte produto:

$$(a + b) \times (a + b) = a^2 + 2a\times b + b^2.$$

Mas, como a e b são perpendiculares, vale o Teorema de Pitágoras $(a + b)^2 = a^2 + b^2$. Assim, ele conclui que $a\times b = 0$. Agora sim, Grassmann tem a situação propícia para a definição geral:

> (Definição 4): O Produto Interno de dois deslocamentos não paralelos será o Produto Interno de um deles pela projeção ortogonal do outro sobre o primeiro. (GRASSMANN, 1995, p.336)

Grassmann mostra, então, o “bom comportamento” do seu Produto Interno:

> (Teorema 2): Pode-se trocar a ordem dos fatores do Produto Interno sem alterar o seu resultado, ou seja, $a\times b = b\times a$. [...]
> (Teorema 3): Um Produto Interno de dois deslocamentos mutuamente perpendiculares é zero, caso contrário, e desde que nenhum deles seja zero, o Produto Interno não é zero. [...]
> (Teorema 4): Todo teorema algébrico que expressa a relação de multiplicação para adição e subtração é válido para a multiplicação interna de dois deslocamentos. (GRASSMANN, 1995, p.336-8)

Esse último teorema apresentado é menos técnico do que filosófico. Sua justificativa vem da possibilidade de transferir propriedades de grandezas numéricas para grandezas espaciais (Definição 2) e do fato de Grassmann já ter estruturado a operação de multiplicação de números reais e suas propriedades distributivas relativas à soma, como exposto no texto sob o título ESTRUTURA ALGÉBRICA DO *AUSDEHNUNGSLEHRE* acima.

Toda essa estrutura resolve o problema de apresentar a Caracterização de Leibniz numa forma algébrica mais versátil. De fato, pode-se repassar fig.(a,b) = fig.(c,d) ou ab 8 cd para

$$(a - b) \times (a - b) = (c - d) \times (c - d) \text{ ou } (a - b)^2 = (c - d)^2.$$

Em seguida, Grassmann apresenta em sua Análise Geométrica uma série de aplicações na geometria e na física[5].

Considerações Finais

Os objetivos desse trabalho em apresentar uma versão das origens dos Espaços Vetoriais segundo as propostas de Grassmann, não encerram quaisquer buscas com teores semelhantes. Assim, antes de qualquer coisa, vale observar e justificar a insistência, nesse trabalho, em acompanhar a criação do conceito de produto de vetores. Ela é devida pelo fato de que pensar hoje num espaço vetorial é pensar muito além de uma simples estrutura axiomática, é pensar, dentre outras coisas, na caracterização dos seus elementos (vetores) segundo um referencial fixo (base) e nas transformações que levam elementos de um espaço vetorial em outro, ou nele mesmo. Algo que facilita as investigações sobre espaços vetoriais é o conceito de produto interno, pois este gera o conceito de ortogonalidade, que por sua vez auxilia na busca de uma base a partir de um vetor qualquer dado. Mais que isso, o produto interno resgata um ingrediente extra vindo da geometria elementar e que incrementa a ideia mais básica de independência linear: a medição de ângulos entre retas, ou como queiram, vetores. Já o estudo das transformações lineares leva ao estudo de um novo espaço vetorial. No caso específico do conjunto de transformações lineares de um espaço em si mesmo, a estrutura algébrica se torna mais rica "[...] pois a composição usual de funções fornece uma 'multiplicação' dessas transformações." (Hoffman&Kunze, 1979, p.94)

Foram Hamilton e Grassmann os primeiros a alcançarem sucesso na construção de produto de vetores com os quaternions e os produtos externo e interno, respectivamente.

No título A ÁLGEBRA VETORIAL E AS FILOSOFIAS DA CIÊNCIA E DA MATEMÁTICA DE GRASSMANN acima, foi apresentado um reconhecimento, feito por Hamilton, de uma semelhança entre seus quaternions e o produto externo de Grassmann. Agora será apresentada a interpretação que Grassmann faz dos quaternions através da sua Teoria da Extensão, num trabalho de 1877 cujo título é *The Position of Hamiltonian Quaternions in Extension Theory*.

> Os quaternions Hamiltonianos surgem a partir de uma das multiplicações que apresentei no artigo Sur les diffèrents genres de multiplication no Crelle's Journal 49, 136ff., e que estão associadas com os três grupos de equações: (1) $e_r e_s = e_s e_r$, (2) $e_r e_s + e_s e_r = 0$, $e_1^2 = e_2^2 = \ldots = e_n^2$, (3) $e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_n^2 = 0$, com $e_1, e_2, \ldots, e_n$ denotando unidades independentes, e e_r e e_s denotando quaisquer duas diferentes dessas unidades; de fato os quaternions são conectados com o caso n = 3, cujas equações confinam-se ao médio desses três grupos. Chamarei este tipo de multiplicação de multiplicação central. [...] (GRASSMANN, 1995, p.525)

Dados dois deslocamentos a e b, Grassmann identifica o produto externo [ab] com as equações (2) e (3), o produto interno [a|b] com as equações (1) e (3) e o produto central ab como combinação desses dois, ou seja,

[5] Ver, a título de exemplo, TÁBOAS, P. Z.; BARONI, R. L. S., 1999.

$$ab = \lambda[a|b] + \mu[ab],$$

com λ e μ constantes arbitrárias distintas de zero.

Como a análise está restrita ao espaço (n = 3), Grassmann adota e_1, e_2 e e_3 como deslocamentos unitários e dois a dois perpendiculares (base normal) e cuida de mostrar que essa escolha pode ser arbitrária, ou seja, que os três grupos de produtos são invariantes. Assim, basta concentrar-se nessa base para inferir quaisquer propriedades relativas aos produtos. Primeiro ele observa que a expressão do produto central $ab = \lambda[a|b] + \mu[ab]$ é uma equação homogênea de segundo grau, o que permite fixar, por exemplo, $\mu = 1$ sem perda de generalidade. Daí

$$ab = \lambda[a|b] + [ab].$$

Além disso, ele mostra que vale a Lei Associativa para três elementos quaisquer e que, então, $\lambda = -1$. De fato,

$$(e_r e_r)e_s = \lambda e_s \quad \text{e} \quad e_r(e_r e_s) = e_r e_t = -e_s,$$

sendo que r, s e t são uma permutação cíclica dos índices 1, 2 e 3 dos elementos da base ordenada e_1, e_2 e e_3. Portanto, o produto central toma a seguinte forma:

$$ab = -[a|b] + [ab].$$

"A partir dessa equação fundamental derivam todas as leis dos quaternions, e de fato a maior parte delas com grande facilidade" (GRASSMANN, 1995, p.528).

Grassmann, então, chama $-[a|b]$ e $[ab]$, respectivamente, de partes interna e externa de um quaternion; usa letras gregas para números e latinas para deslocamentos, reservando q para quaternions; aí, define conjugado de um quaternion $q = \alpha + a$ como $\alpha - a$. Com isso ele pode fazer a interpretação de algumas das propriedades dos quaternions.

"O produto de uma quantidade arbitrária de quaternions é o conjugado do produto dos conjugados desses fatores tomados em ordem inversa." (GRASSMANN, 1995, p.529) Ou seja, se $(\alpha + a)(\beta + b) = \gamma + c$, então $(\beta - b)(\alpha - a) = \gamma - c$.

Agora, definindo-se o comprimento de um quaternion $q = \alpha + a$ por $(\alpha^2 - a^2)^{1/2}$, tem-se: "O comprimento do produto de quaternions é o produto dos comprimentos daqueles fatores." (GRASSMANN, 1995, p.529) Ou ainda, $(\alpha^2 - a^2)^{1/2}(\beta^2 - b^2)^{1/2} = (\gamma^2 - c^2)^{1/2}$.

Sejam um quaternion $q = \alpha + \beta a$ (a um deslocamento unitário) e $\rho = \alpha^2 + \beta^2$ seu comprimento. Se $\alpha = \rho\cos\gamma$ então $\beta = \rho \operatorname{sen}\gamma$. Daí

$$q = \rho(\cos\gamma + a\operatorname{sen}\gamma).$$

O deslocamento a é chamado medida e γ é o ângulo do quaternion. E, $(\cos\gamma + a\operatorname{sen}\gamma)$ é uma unidade quaternária. Assim, "Multiplica-se unidades quaternárias de mesma medida somando-se seus ângulos" (GRASSMANN, 1995, p.530), ou, $(\cos\gamma + a\operatorname{sen}\gamma)(\cos\varphi + a\operatorname{sen}\varphi) = \cos(\gamma + \varphi) + a\operatorname{sen}(\gamma + \varphi)$. Além disso, "Uma unidade quaternária cujo ângulo está entre π e $-\pi$ é afetado de um expoente ν real se seu ângulo é multiplicado por esse número" (GRASSMANN, 1995, p.530), o que equivale a $(\cos\gamma + a\operatorname{sen}\gamma)^\nu = \cos(\nu\gamma) + a\operatorname{sen}(\nu\gamma)$.

Assim fica claro como se originaram algumas das técnicas da álgebra vetorial que se desenvolvem hoje e, também, o movimento de formalização matemática que permitiu a transcendência dessa última estrutura para a axiomatização dos Espaços Vetoriais.

Um exemplo que comprova em definitivo a não adoção da filosofia de Grassmann para o desenvolvimento da matemática é a sua tentativa de enquadrar o estudo das geometrias não euclidianas na sua Teoria da Extensão Linear. Grassmann, desde a primeira edição do seu *Ausdehnungslehre* em 1844, enfrentou dificuldades no meio matemático para aceitação deste livro (fato já observado no final de ESTRUTURA ALGÉBRICA DO *AUSDEHNUNGSLEHRE* neste trabalho), mas não deixa de buscar interlocutores para a obra. A edição de 1877 traz consigo um apêndice que trata das geometrias não euclidianas: *On The Relation of Non-Euclidean Geometry to Extension Theory* (Grassmann, 1995, p.279-80). Essa discussão é extremamente importante, já que Grassmann propunha uma visão unificadora das ciências através de sua filosofia, na qual a geometria (estudo do espaço) era campo de aplicação de um ramo da matemática: Teoria da Extensão Linear. Ora, qualquer modificação da concepção de espaço deveria estar contemplada como uma sua aplicação. Assim, Grassmann se viu obrigado a mostrá-la, para que sua Teoria fosse tão consistente quanto era apregoada. Embora continuasse havendo dificuldades na compreensão do *Ausdehnungslehre*, pelo menos ele continuaria livre de incongruências. Se alguma incongruência fosse observada, o próprio Grassmann seria obrigado a abandoná-lo, dada a rigidez das concepções envolvidas na sua apresentação filosófica.

Grassmann reclama, no apêndice citado acima, da falta de atenção devotada às soma e subtração de deslocamentos (conforme exposto no final de ESTRUTURA ALGÉBRICA DO *AUSDEHNUNGSLEHRE*) e à proposta de uma nova axiomática para a geometria (de acordo com o exposto no início de ANÁLISE GEOMÉTRICA DE LEIBINIZ A GRASSMANN E A ESTRUTURAÇÃO DE PRODUTOS VETORIAIS).

> Nem Riemann em seu 'Habilitationsschrift' de 1854, publicado a primeira vez em 1867, nem Helmholtz no seu artigo 'Über die Tatsachen, welche der Geometrie zur Grunde liegen' (1868) ou na sua excelente conferência 'Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome' (1876) mencionam-nos [soma de deslocamentos e a proposta de novos axiomas], mesmo que os fundamentos da geometria pareçam mais simples que aqueles publicados anteriormente. (GRASSMANN, 1995, p.279)

Grassmann diz que apenas levando-se em conta seus novos postulados da geometria (por exemplo que um plano é definido por uma reta e um feixe de retas paralelas que a intercepta e que o espaço é definido por um plano e por um feixe de retas paralelas que o intercepta) e utilizando-se de equações homogêneas para gerar extensões elementares, ele pode conceber modelos equivalentes aos propostos por Riemann e Helmholtz.

> Assim, por exemplo, os pontos de um plano são numericamente derivados de três pontos não colineares, e.g. pelos números x_1, x_2, x_3. Estabelecendo-se uma equação homogênea entre estes três números, a coleção dos pontos que a satisfazem é reduzida a um domínio de segunda ordem. Se a equação for de primeiro grau, então o domínio assim definido será elementar, ou seja, uma linha reta; se for de grau superior ela formará uma curva para a qual somente algumas leis longimétricas para a reta serão válidas.

> Voltando ao espaço, cada um dos seus pontos é numericamente derivado de quatro pontos formando um tetraedro, pelos números x_1, x_2, x_3, x_4. Se entre estas grandezas existem duas equações homogêneas mutuamente independentes, nenhuma delas de primeira ordem, obtemos então uma dupla de linhas curvas para as quais, de novo, somente algumas propriedades longimétricas serão válidas. (GRASSMANN, 1995, p.279-80)

Esse raciocínio é expandido para domínios de quarta ordem para observar como descrever uma geometria não euclidiana. Toma-se então um domínio de quinta ordem através de uma base numérica x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 (esse domínio transcende os limites do espaço geométrico entendido por Grassmann).

> [...] se uma equação homogênea de primeiro grau é satisfeita por eles [(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)], então retornamos a um domínio elementar de quarta ordem, que é o espaço Euclidiano. Se por outro lado a eles for imposta uma equação homogênea de grau superior, também será produzido um domínio de quarta ordem mas sem que valham todos os axiomas de Euclides, e assim este será um espaço não-Euclidiano; [...]. (GRASSMANN, 1995, p.280)

Nenhum desenvolvimento mais profundo fora realizado por Grassmann nesse sentido, o que mostra, num primeiro momento, que ele estava mais interessado em chamar a atenção para seu *Ausdehnungslehre* do que discutir as novas concepções de espaço segundo as ideias de Lobachevsky, Bolyai, Helmholtz ou Riemann.

Mais uma interpretação possível para a fraca recepção à Teoria da Extensão Linear é a de que os matemáticos pudessem estar sentindo um "estrangulamento" da matemática por causa da ideia de que ela deveria ser totalmente adaptada ao plano filosófico de Grassmann. O próprio Grassmann não o desenvolve totalmente, priorizando a construção e consolidação do seu *Ausdehnungslehre*. Os que conseguiram vencer essa sensação desconfortável, durante um primeiro contato com a referida obra, não se renderam ao seu convite filosófico. Porém, quando houve compreensão do Ausdehnungslehre, alguma técnica foi incorporada ao fazer matemático. Isso aconteceu, dentre outros, com Elie Cartan (1869-1951) no estudo de Formas Diferenciais (KATZ, 1998, p.795-7), com Felix Klein (1849-1925) no seu *Elementary Mathematics From an Advanced Standpoint - Geometry*[6] e com Giuseppe Peano no seu Calcolo Geometrico. Embora esses entendimentos pareçam um tanto tardios, a história ainda reserva outras surpresas.

> [...] o sistema de Peano com mais de 20 anos tinha sido ignorado. Foi Hermann Weyl (1885-1955), em seu livro Raum-Zeit-Materie de 1918, quem fez uma nova tentativa de dar um tratamento axiomático do [espaço vetorial] como uma base para o seu desenvolvimento da teoria da relatividade desde princípios básicos. Apesar de não existir nenhuma indicação de sua familiaridade com o trabalho de Peano, seu sistema de axiomas era virtualmente o mesmo. [...] Desafortunadamente, o trabalho de Weyl teve ainda menos influência que o de Peano. A noção de espaço vetorial necessitava de uma terceira descoberta, desta vez no contexto da análise. (KATZ, 1998, p. 827)

---

[6] Os capítulos II e III da Parte Um, nas páginas 21 a 38, são dedicados a discutir princípios da geometria segundo a visão de Grassmann.

BIBLIOGRAFIA

CROWE, M. J. A History of Vector Analysis: The Evolution of the Idea of a Vectorial System. New York: Dover. 1993. 270p.

DORIER, J.-L. A General Outline of the Genesis of Vector Space Theory. Historia Mathematica, 22, p.227-61, 1995.

FLAMENT, D. Théorie des forms et avènement d'une nouvelle discipline des mathématiques pures, selon Hermann Günther Grassmann (1809-1877). In: Revista Brasileira de História da Ciência, v.1, n.2, julho/dezembro de 2008. Rio de Janeiro: SBHC, 2008.

GRASSMANN, H. G. A New Branch of Mathematics: The Ausdehnungslehre of 1844, and Others Works. Chicago: Open Court. 1995. 555p.

HAMILTON, W. R. On quaternions, or on a new system of imaginaries in algebra. Edited by David R. Wilkins. Dublin, 2000.

HAMILTON, W. R. Elements of Quaternions. 2 ed. Dublin: Dublin University Press. 1899.

HOFFMAN, K., KUNZE, R. Álgebra Linear. 2 ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos. 1979. 508p.

KATZ, V. A History of Mathematics: An Introduction. 2 ed. New York: Addison-Wesley. 1998. 864p.

KLEIN, F. Elementary Mathematics Form an Advanced Standpoint: Geometry. New York: Dover. 1939. 214p.

MÖBIUS, A. F., Der Barycentrische Calcul: Ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie. Leipizig. 1827.

MOORE, G. H. The Axiomatization of Linear Algebra: 1875-1940. Historia Mathematica, 22, p.262-303, 1995.

PEANO, G. Operazione della Logica Deduttiva. In: Opere Scelte. Roma: Cremonese, 1957. v.1, p.1-19.

PEANO, G. Geometric Calculus. Translated by Lloyd C. Kannenbrg. Boston: Birkhäuser, 2000. 150p.

SMITH, D. E. A Source Book in Mathematics. New York: Dover. 1959. 701p.

TÁBOAS, P. Z. ; BARONI, R. L. S. A resolução de um problema de equilíbrio estático de um sistema de pontos materiais segundo a Análise Geométrica de Grasssmann. In: III Seminário Nacional de História da Matemática, 1999, Vitória-ES. ANAIS do III Seminário Nacional de História da Matemática. Vitória-ES : Universidade Federal do Espírito Santo (UFES), 1999.

Plínio Zornoff Táboas
Centro de Matemática, Computação e Cognição – CMCC
Universidade Federal do ABC – UFABC

E-mail: plinio.taboas@ufabc.edu.br