Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 10 nº 19 (abril/2010-setembro/2010) - pág.39-65
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

LA CATEGORICIDAD DE LOS REALES EN HILBERT[1]

Guillermo Ortíz Rico & Sergio Iván Valencia Marín

Universidad del Valle- Cali - Colombia

(aceito para publicação em janeiro de 2010)

Resumen

Presentamos una visión del panorama estructuralista alrededor de 1900 para apreciar que en la presentación axiomática de los reales por Hilbert, su noción de completez estaba fuertemente influenciada por la obra de Dedekind y el pensamiento filosófico de la época, el cual lo representamos en Husserl. Para caracterizar desde una perspectiva formal esta completez, haremos una lectura desde la teoría de categorías para la axiomática de los números reales de Hilbert. Para tal efecto, formaremos la categoría de todos los cuerpos arquimedianos totalmente ordenados y probaremos que los números reales son el objeto final de dicha categoría y así tendremos inmediatamente los teoremas de categoricidad e inmersión de los números reales. Esperamos dar una amplia sustentación para validar nuestra presentación que contrasta con las habituales lecturas conjuntistas, y proporciona una aproximación a los inicios del estructuralismo en las matemáticas en las cercanías de 1900.

Palabras claves: Completez de Hilbert, Categoricidad

Abstract

We present an interpretation of structuralist thought around 1900 to show that Hilbert's ideas about completeness and the axiomatization of the real numbers were greatly influenced by the work of Dedekind and the philosophers of the time, represented here by Husserl. To characterize this completeness formally, we interpret it from the point of view of Hilbert's category theory for the axiomatization of real numbers. To this end, we form the category of all Archimedean totally ordered fields and prove that the real numbers are the final object of this category and thus we immediately have categoricity theorems and immersion of real numbers. We hope to provide ample arguments in support of our

[1] El presente trabajo se realizó en el marco del proyecto de investigación "Completez y Categoricidad en Hilbert. El caso de los números reales" financiado por Colciencias y la Universidad del Valle, Cali-Colombia.

presentation that contrasts with the usual set-theoretical readings and provides a rough idea of the beginnings of structuralism in mathematics around 1900.

Keywords: Hilbert, Completeness, Categoricity

1. Introducción

No hay dudas en señalar la cercanía de las primeras axiomáticas, alrededor de 1900, de Hilbert con la obra de Dedekind. Una amplia sustentación puede leerse en el trabajo de Sieg-Schlimm [30], quienes hacen una fuerte crítica a Corry y a Ferreirós. A Corry, por considerar a Dedekind un matemático no moderno que nada aporta al estructuralismo; a Ferreirós por considerar a Dedekind un lógico no moderno y de cierta forma anti-axiomático. Esta crítica de Sieg-Schlimm, en el caso Ferreirós, produce un acercamiento entre ellos, de lo cual da constancia Ferreirós en [13] , donde fija una amplia sustentación de la importancia de Dedekind en los fundamentos de las matemáticas. Sin embargo, a nuestro parecer, hace una interpetación lógico-conjuntista de las tempranas axiomáticas de Hilbert la cual no le permite apreciar la génesis del estructuralismo a través del método axiomático. Nuestro objetivo es controvertir dicha interpretación, desde una perspectiva diferente, apelando a nuevas fuentes antes no consideradas, junto a un enfoque histórico y conceptual distante del lógico-conjuntista.

En el presente documento mostraremos que Hilbert recoge, en sus trabajos de las axiomáticas para los números reales y la geometría, la noción fundamental de categoricidad de Dedekind y del ambiente filosófico de la época. Noción que, como lo muestran ampliamente Awodey-Reck [1], juega un rol fundamental en el surgimiento del método axiomático, y que constituirá un paso significativo hacia el estructuralismo en las matemáticas. A fin de contrastar y validar nuestra lectura de Hilbert, presentaremos un par propuestas de formalización para la completez de Hilbert. La primera de Cohen-Goffman [7] y [16] que captura la idea de maximabilidad de Hilbert en su axioma de completez, a través de grupos ordenados arquimedianos y además muestra ciertas fortalezas de la axiomatización de Hilbert respecto a las tradicionales de Cantor y Dedekind. La segunda de Erlich [11] que da una satisfactoria respuesta a la pregunta inmediata que emerge cuando se estudia el axioma de continuidad de la recta geométrica de Dedekind: si la completez de los reales brinda (para Dedekind) el "fundamento científico para la investigación de *todos* los dominios continuos" [9], entonces, de modo concreto ¿Cuál es la relación entre completez (continuidad) con la geometría? La respuesta es que el axioma de continuidad (completez) permite dar una prueba de la categoricidad de la geometría euclidiana, es decir, la unicidad salvo isomorfismos de dicha teoría.

Empezamos describiendo el ambiente filosófico en torno al momento en el cual Hilbert elabora estas axiomáticas, en particular nos acercaremos al pensamiento de Husserl[2].

[2]Seguiremos aquí a Hill [21] quien exhibe una defensa de la influencia de Husserl en el desarrollo de la filosofía analítica, y fundamentalmente en las escuelas matemáticas contraponiéndose a una tradición Fregeana.

Haremos una lectura de la axiomática de Hilbert para los números reales desde la teoría de categorías. Para ello recurriremos a un análisis teleológico[3], que nos permitirá una mejor visión, en contraste con las habituales lecturas conjuntistas que resultan limitadas y no permiten ver la gestación del estructuralismo en las matemáticas. Esta lectura permite una formulación abreviada y precisa de la completez de Hilbert. Para ello fijaremos como referencia el sistema axiomático de Hilbert para los números reales[4] incluyendo sólo el axioma arquimediano dentro del grupo de los axiomas de continuidad, es decir, los axiomas de Hilbert para los números reales exceptuando el axioma de continuidad. Formemos a continuación la categoría cuyos objetos son todos los modelos de dicho sistema, y cuyos morfismos son los monomorfismos (de cuerpos) monótonos de un modelo a otro. El axioma de completez postula que dicha categoría tiene un objeto final, de donde inmediatamente se demuestran los teoremas de inmersión y categoricidad, como lo mostraremos al final de este trabajo.

Introduciremos la categoría de todas las álgebras tipo uno-cero para mostrar que el sistema básico de los números naturales es el objeto inicial de dicha categoría; así exhibiremos de manera inmediata el resultado clásico de Dedekind sobre la categoricidad de los números naturales. Además daremos los principios de inducción y recursión sobre los números naturales. Al final presentaremos la categoría de los cuerpos arquimedianos totalmente ordenados para exhibir a los números reales como objeto final, y así obtener los teoremas de inmersión y categoricidad de forma inmediata. Gracias a la dualidad se obtendrán los principios de co-inducción y co-recursión sobre los números reales, que aportan a la comprensión de los procesos de límites[5]. Ahora bien, por ser los números racionales el objeto inicial de la categoría de los cuerpos arquimedianos totalmente ordenados, obtenemos también su categoricidad.

2. Un bosquejo del ambiente alrededor de 1900

En las cercanías de 1900 se dan grandes discusiones filosóficas y científicas sobre la "buena definición" de los conceptos, formándose un gran movimiento que busca apartar los desarrollos científicos del psicologismo. Las matemáticas son permeadas desde dos frentes: el científico matemático y el filosófico, sin una clara separación entre ellos. Dado el vasto abanico de contribuciones, esperamos al tomar como referencia algunos de los autores más representativos, bosquejar el ambiente de la época. Dejaremos por fuera personajes tan significativos como Hölder, cuyo trabajo ha sido traducido del alemán al inglés por Michell-Ernst ([26],[27]), y los fundacionistas americanos Veblen y Huntington.

Hecha esta salvedad, empecemos con George Cantor, quién sentaba la existencia de colecciones de objetos en un todo (completamente determinado) y sin la necesidad de un método efectivo para inventariar sus elementos. Agrega la restricción que los nuevos

[3]Es decir, una revisión del pasado desde el punto de vista de una teoría moderna, o bien, desde una teoría posterior a la revisada.
[4]Algo similar podría hacerse para la geometría, y aunque los detalles técnicos se escapan del alcance de este artículo nos permitiremos algunos paralelos sin las debidas sustentaciones.
[5]Los aspectos puntuales de los principios de co-inducción y co-recursión no serán abordados en el presente escrito. Sin embargo, se trabajarán en un artículo posterior sobre la caracterización operativa de $\boldsymbol{R}$ a través de las co-álgebras.

conceptos deben estar en relaciones firmes, ordenadas mediante definiciones, con los conceptos previamente formados, ya existentes y probados.

> En particular, en la introducción de nuevos números [la matemática] sólo está obligada a dar de ellos definiciones que les confieran una tal determinación y, eventualmente, una tal relación con los números anteriores, que, dado el caso, se puedan distinguir entre ellos de un modo determinado. En cuanto un número satisface todas estas condiciones se puede y se debe considerarlo como existente y real en las matemáticas.[6]

Más aún, considera que la matemática "en la elaboración de su caudal de ideas, tiene que considerar *únicamente* la realidad *inmanente* de sus conceptos, y no tiene *ninguna* obligación de examinarlos en lo que respecta a su realidad *trascendente*."

En contraste, Kronecker exigía que toda definición matemática incluyera un método para decidir efectivamente a cuáles objetos se aplicaba y a cuáles no. Del lado de Kronecker, también están los intuicionistas liderados por Brouwer quienes rechazaban el Principio del Tercero Excluido en demostraciones referentes a colecciones infinitas. Como consecuencia de ello tenían la no aceptación de: (i) los irracionales como sucesiones de racionales no convergentes en los racionales, y, (ii) los ordinales transfinitos de Cantor.

H. Weber, quién en 1882 había trabajado conjuntamente con Dedekind en cuerpos de funciones algebraicas, profesor de Hilbert entre 1883 y 1884, podría haber sido el gestor del interés Hilbert por Dedekind, especialmente su interés por los *Zalhen*[7] en 1888, durante su viaje a Berlín, cuando se estableció como Privatdozent. Hilbert recordaba que todos en Berlín hablaban del libro, en su mayoría en términos críticos; por ejemplo, du Bois-Reymond lo tomaba por "horrendo". Ello contrastaba fuertemente con la reacción positiva de Hilbert. Aún, muchos años después, en el contexto de las observaciones críticas motivadas por las paradojas de la teoría de conjuntos, él mantenía las palabras de elogio, al decir que la teoría de Dedekind era "extremadamente sagaz", o que su idea de basar lo finito sobre lo infinito era "deslumbrante y cautivante" [13].

Durante casi los últimos veinte años Sieg ha estado sustentando que la noción de categoricidad en Hilbert es tomada de los trabajos de Dedekind. En [30], Sieg-Schilimm reafirman esta posición y presentan la crítica a Corry y a Ferreirós referida en la introducción. Como ya habíamos señalado posteriormente Ferreirós ([13], [14]) acompaña a Sieg, suscribiendo la aseveración de que algunas de las ideas de Dedekind están presentes en el *Zahlbericht*[8] de Hilbert.

En el teorema 47 de [9] Dedekind presenta "la buena definición" para calcular con los números naturales. Aunque en sus publicaciones sigue el método genético, se pueden apreciar ciertos atisbos de axiomatización. Por ejemplo, respecto a "la buena definición" de las leyes para calcular con los números racionales, si éstas se fundamentan en un principio de recursión, es menester considerar si la recursión sobre los naturales

[6]Esta referencia y la siguiente se encuentran en el §8 del *Grundlagen* de Cantor. En: Ewald, W.: *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics*. Oxford Clarendon Press 1996, pp. 881-920.
[7]Por *Zalhen*, se entiende la obra de Dedekind de 1888, *Was sind und was sollen die Zahlen?* una de sus obras cumbres junto con *Stetigkeit und irrationale Zahlen* de 1872
[8]Este trabajo es considerado como una de las obras más importantes de Hilbert y trata sobre los números algebraicos.

define bien las operaciones. En el *Arithmetische Grundlagen*[9] menciona que en relación a la construcción de la secuencia de los naturales por medio de la noción de cadena:

> La prueba de la correctitud [correctness] del método de prueba de *n* a *n*+1 es correcto; en contraste, la prueba (completez) de la definición de conceptos por el método de *n* a *n*+*a* aún no es suficiente en este punto; la existencia (consistencia) de el concepto deja duda [remains in doubt]. Esto puede ser posible únicamente mediante inyectividad, por la consideración de los fundamentos del sistema [*n*]!!!!![10].

Hilbert [19] intenta evitar las paradojas conjuntistas sin renunciar la teoría de conjuntos. Para tal efecto, él brinda una axiomatización categórica de los números reales siguiendo la obra de Dedekind *Continuidad y números irracionales*. Hilbert afirma que su consistencia (la de la axiomática de los reales) puede ser demostrada por "una deseable modificación de los métodos" y subraya que tal prueba constituye "la demostración de la existencia de la totalidad de los números reales". En terminología de Cantor, dicha prueba recae en la demostración de que el sistema de los números reales es un conjunto consistente (terminado) [29]. El tratamiento con conjuntos consistentes y el uso de terminología de Cantor en [19] muestra que Hilbert estaba al tanto de las dificultades conjuntistas que Cantor había hallado y comunicado a Dedekind, como consta en su famosa carta[10] de 1899.

Por otro lado, Hilbert apela, de modo reiterado, a la terminología que Dedekind emplea en los *Zahlen*, pues se refiere a los conjuntos como "sistemas de cosas" [System von Dingen], que son pensados [denken]. Sin embargo, Hilbert se diferencia de Dedekind en que su axiomática puede tratar no solo con relaciones y operaciones entre los elementos, sino también con condiciones sobre conjuntos de elementos. Esta diferencia, muy significativa a los ojos de un logicista moderno, en este momento era superflua, en la medida que ambos se consideraban implícitamente como métodos lógicos. Lo mismo pasa con el sistema axiomático de Hilbert para los reales: se inicia con un "sistema" de "cosas" y se define axiomáticamente las relaciones y operaciones entre ellos, incluyendo una condición evidentemente conjuntista como lo es el axioma de completez [13]. De modo análogo, Dedekind procede caracterizando estructuras tales como cuerpos numéricos (1871), el cuerpo ordenado y completo de los reales (1872) o la estructura de los naturales (1888).

Sin embargo, el aspecto más influyente de Dedekind en Hilbert radica en el problema de la consistencia de un sistema axiomático. Ello se evidencia en la carta a Keferstein del 27 de febrero de 1890 [9]:

> ¿Cuáles son las propiedades básicas, independientes entre sí, de esta serie N, es decir, aquellas propiedades que no pueden deducirse unas de otras pero de las cuales se siguen todas las demás? Y ¿de qué manera hay que despojar a estas propiedades su carácter específicamente aritmético, de manera que queden

[9]Esta obra inédita hace referencia a los apuntes que dieron orígen a los *Zalhen*, escritos entre 1872 y 1878

[10]Específicamente, la carta de Cantor a Hilbert enviada el 26 de septiembre de 1897, pone en evidencia que Hilbert ya estaba al tanto en 1899 del problema de distinguir entre multiplicidades consistentes e inconsistentes, pues son estas últimas las que implican paradojas en la teoría de conjuntos de Cantor. Esta carta se puede hallar en Ewald, W.: *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics*. Oxford Clarendon Press 1996, pp. 926-927

> subordinadas a conceptos más generales y a actividades del entendimiento tales que sin ellas no es posible en absoluto el pensamiento, pero con ellas viene dado el fundamento para la seguridad y completud de las demostraciones [Vollständigkeit der Beweise], así como la construcción de definiciones libres de contradicción [widerspuchsfreier Begriffs-Erklärungen]?

En este sentido, Dedekind se preocupa por la buena caracterización de un sistema simplemente infinito, cuyo modelo corresponde a ***N***. Dicha preocupación se traduce en la pregunta ¿existe realmente en nuestro universo mental un tal sistema? Sin la demostración lógica de existencia sería siempre dudosa la consistencia interna [9]. Es por ello que se ve en la necesidad de demostrar la existencia de dicho sistema mediante la exhibición de un modelo y la demostración de un teorema que afirma que todos los modelos de dicho sistema son isomorfos (su famoso teorema 132 en [9]). La importancia de este teorema radica en que es un teorema de categoricidad: todos los modelos de los naturales son isomorfos. Así pues, la categoricidad que Dedekind impone a los naturales implica que estos sean vistos desde una perspectiva estructural, puesto que lo que existe es la estructura que permite expresar los teoremas de la aritmética y, así como los naturales lo hacen (es un modelo de dicha estructura), otro conjunto isomorfo a ***N*** también puede expresar dichos teoremas. Asimismo, en la *nota* 134, Dedekind menciona que está determinando los números naturales por medio de la caracterización de una *estructura* (aunque nunca emplea esta palabra) para la cual son válidos "aquellos teoremas en los que se prescinde completamente de las características particulares de los elementos *n*", los cuales "poseen validez también para cualquier otro sistema simplemente infinito Ω ".

Como se reconoce en [14] y [30], los números naturales en [9] están caracterizados axiomáticamente por medio de la existencia de una representación ϕ y un elemento distinguido 1 tales que satisfacen las condiciones (definición 71 de [9]):

$\alpha.\ \phi(\boldsymbol{N}) = \boldsymbol{N}.$

$\beta.\ \boldsymbol{N} = \phi_0(1).$

$\gamma.\ 1 \notin \phi(\boldsymbol{N})$

$\delta.\ \phi$ es similar.

Vale la pena apreciar que estas cuatro condiciones son equivalentes a los cuatro primeros axiomas de Peano. Sin embargo, en la presentación de Peano hay un axioma adicional que Dedekind demuestra: el axioma de inducción[11]. Este teorema es de suma importancia para probar en el teorema 132 que cualquier otro sistema simplemente infinito es similar al sistema ***N*** de los naturales, es decir, que todos los modelos que estén determinados por las condiciones α, β, γ y δ de la definición 71, son isomorfos. Además,

[11][Teorema 126] *Teorema de definición por inducción*. Dada una representación cualquiera θ (similar o disimilar) de un sistema Ω en sí mismo y un determinado elemento ω de Ω, hay una y solo una representación Ψ de la serie numérica *N* que satisface las siguientes condiciones:

I. $\Psi(N) \subset \Omega$.

II. $\Psi(1) = \omega$.

III. $\Psi(n') = \theta\Psi(n)$. Donde *n* denota cualquier número.

permite definir de modo recursivo las operaciones de la aritmética sobre los naturales (Definición 135 para la suma y 147 para el producto).

Ahora bien, en [13] Ferreirós comenta que el axioma de *cadena* de Dedekind (según el cual $N = \phi_0(1)$: el conjunto de los números naturales es la cadena de un "elemento distinguido" [singleton] bajo la aplicación sucesor) es semejante, estructuralmente al axioma de completez de Hilbert. La condición de cadena de Dedekind establece un requerimiento de minimalidad, mientras que el axioma de completez de Hilbert asegura cierta maximabilidad. Pues mientras el axioma de completez de Hilbert afirma que S el conjunto de los números reales es tal que $\forall T$ (si T es un cuerpo ordenado[12] arquimediano y $S \subset \mathrm{T}$, entonces $S = T$), el teorema 47 de Dedekind [9] menciona que $\forall K$ (si K es cerrado bajo ϕ y $A \subset K$ $A_0 = K$).

Así pues, la condición de cadena de Dedekind es un requisito de *minimalidad*, mientras que el axioma de completez de Hilbert apunta a asegurar la *maximalidad*. Pero estructuralmente son condiciones similares. No obstante, Ferreirós afirma que el axioma de Hilbert presupone la existencia de un conjunto universal V que es el dominio de los conjuntos T, mientras que las cadenas K tienen como dominio una estructura S. Pero dicha interpretación constituye una lectura sumamente conjuntista del axioma de completez, pues este presupone que los conjuntos T tienen una estructura dada (pues son cuerpos arquimedianos totalmente ordenados), por tanto, el dominio de variación de estos conjuntos no es el conjunto de todos los conjuntos, sino la clase que define dicha estructura.

Queremos hacer explícito nuestro desacuerdo con la afirmación de Ferreirós que Hilbert asume la existencia de un conjunto universal. Más aún, creemos que la elección de Hilbert de usar un contexto conjuntista dentro de la clase de los objetos (la estructura) de todos los cuerpos arquimedianos totalmente ordenados es una decisión pragmática hacia el estructuralismo, garantizada por la "buena definición" de los objetos. Pues su tranquilidad, a pesar del conocimiento de las paradojas conjuntistas al permitir colecciones arbitrarias, reposa justamente en precisar la estructura (la "buena definición" de la clase de todos los objetos), y a través del método axiomático definir en ella los números reales como el objeto final.

La buena definición para Hilbert se reduce a la no-contradicción. Asumiendo a Hilbert como seguidor del sueño Luliano[13], encontramos una cercanía entre Hilbert y Dedekind con respecto a la existencia; puesto que, para Dedekind la existencia está garantizada por la exhibición de un modelo, lo cual en un sistema completo equivale a la consistencia sintáctica (es decir, la no-contradicción), que es justo el presupuesto de existencia para Hilbert.

[12]Para ser precisos en la lectura del axioma de completez de Hilbert, T se debe tomar como un elemento de la clase de todos los cuerpos arquimedianos **totalmente** ordenados.

[13] Expresión acuñada en la literatura del nombre de Raimundo Lulio o Ramon Llull (1232-1316). La obra lógica de Lulio consiste en una serie de intentos inacabados de elaborar un *ars combinatoria* o *calculus universalis*. Influencia ampliamente en la juventud a Leibniz, quién creyó en la posibilidad de aplicar a la lógica formal el método luliano. La expresión se refiere a la creencia que se tenía de encontrar unos principios fundamentales y a partir de éstos mostrar todo el conocimiento, si se quiere una creencia en la completez absoluta.

Estamos seguros que estas limitaciones de las lecturas conjuntistas se podrán evitar gracias a nuestra propuesta de reconstruir la axiomática de Hilbert para los números reales usando la teoría de categorías. Naturalmente este hecho nos obliga a usar una suerte de anacronismo, el cual mostraremos que no es forzado, en la medida que utilizaremos la teoría de categorías como herramienta para *interpretar* tanto las axiomáticas de Dedekind, como la de Hilbert.

Nuestro acercamiento a las estructuras por la vía de "la buena definición" nos pone de cara con el pensamiento de Husserl. Según Hill [20]:

> Entender la evolución de las visiones de Husserl sobre las matemáticas resulta esencial para establecer su lugar en la filosofía de la lógica y las matemáticas del siglo XX. Campo con raíces profundas en las ideas austro-alemanas acerca de la lógica y las matemáticas. Las cuales han florecido en todo el mundo de habla inglesa durante el siglo XX, pero sin integrar propiamente las ideas de Husserl.

De acuerdo a Hill, las investigaciones en esta área constituyen el epicentro de la filosofía, lo cual significa que el trabajo de Husserl establece un puente entre la fenomenología y su rival, la filosofía analítica. Lo que podría explicar, a su vez, por qué se han cerrado puertas al pensamiento Husserliano.

Husserl inicia estudios de matemáticas con Karl Weierstrass, dedicándose plenamente a la filosofía después de tomar cursos con Franz Brentano. Sin embargo se ve obligado a revisar radicalmente los métodos de análisis psicologistas de Brentano (ver [22]). En esta búsqueda por la claridad, objetividad, rigor y precisión en el análisis filosófico, Husserl se propone establecer un carácter científico para la filosofía, en contra del psicologismo, que trataba de explicar todo acto y contenido de la mente como si fueran procesos psíquicos. Husserl veía esto como una versión del positivismo. Reducir las leyes lógicas a procesos psíquicos significa la perdida de validez universal, alejándose del conocimiento científico. En esta empresa Husserl propone la fenomenología, entendida como un método para conocer la realidad de una manera objetiva y que supera la mera explicación de los hechos, a su entender el mero alcance del positivismo. Para él los objetos son "ideales" y, por ende, no pueden ser subjetivos; sus nociones de idealidad y ontología reposan en el desarrollo del concepto de "definibilidad," de donde cimienta sus argumentos en contra del psicologismo. Este concepto es inicialmente tratado en su teoría de multiplicidades (Mannigfaltigkeit), específicamente en su teoría de multiplicidad definida (definit Mannigfaltigkeit) presentada, tanto en *La Filosofía de la Aritmética* (1891), como en *Investigaciones Lógicas* (1900-1901); obras señaladas por muchos autores como "antipsicologistas". En la primera parte de *La Filosofía de la Aritmética* argumenta el fundamento de la aritmética sobre colecciones perceptibles de objetos que presentan los números auténticos o números naturales (cardinales finitos), pero se da cuenta que no es posible formular de una manera satisfactoria una teoría que extendiera el dominio de números naturales sobre la base de números cardinales, es así que en la segunda parte cambia su punto de vista, asumiendo la aritmética esencialmente simbólica y como tal aplicable a diferentes dominios. En este período conoce a Cantor que había estudiado también con Weierstrass.

Quizá lo más destacable de Husserl, en los años cercanos a 1900, lo constituye su cercanía con las ideas de Hilbert y Dedekind: del primero debido a su concepción de la completez y del segundo por su caracterización estructuralista (de modo incipiente e implícito, al igual que en Dedekind) de los sistemas numéricos; particularmente cuando se puede considerar, en Husserl, dos tipos de estructuras: las simbólicas y las conceptuales [18]. Son estas últimas las que vislumbran un estructuralismo semejante al de Dedekind. Cabe resaltar que, en Hartimo [18] se reseñan las dos conferencias que Husserl presenta en 1901 a la sociedad matemática de Göttingen, en las cuales da cuenta de la noción de sistema de axiomas definido, lo que modernamente equivale a un sistema de axiomas completo. En Da Silva [8], se hace una amplia sustentación de la cercanía de la completez de Husserl a la noción actual de categoricidad. En esta búsqueda de extensión de dominio, Husserl recurre a una nueva formulación del *Principio de Permanencia de las formas* de Hankel, quién atribuye la formulación original a Peacock en 1833[14]. Además se hace notar que Husserl conocía el texto *Ausdehungslehre* de Hermann Grassmann, el cual presenta una teoría abstracta de magnitudes de la unidad, y en una segunda versión de 1862 muestra que de las magnitudes de la unidad se pueden derivar otras algebraicamente, entre éstas los números enteros, racionales, irracionales e imaginarios.

El principio de permanencia de Hankel es restringido por Husserl imponiendo la condición que la extensión sea consistente. En las ideas de Hankel se trataba de extender el dominio de las magnitudes al de los números, es así que se puede hacer un paralelo entre las magnitudes y los números auténticos de Husserl.

Husserl estaba preocupado por establecer cierto tipo de relación estructural entre los dominios, que podría pensarse desde una especie de equivalencia elemental en el sentido que se satisfacen las mismas proposiciones, hasta un isomorfismo. Su objetivo era capturar un dominio puramente formal de objetos por medio de su teoría. Esperaba describir una teoría *categórica,* es decir, una teoría en la cual todos los dominios que satisfacen la teoría fuesen isomorfos. Tal teoría es la que él denomina *dominio deductivo general* donde los dominios de cardinales, ordinales, vectores y segmentos sean casos especiales[15].

Desde nuestro punto de vista, el desarrollo de la noción de "definibilidad" en Husserl abre la posibilidad de existencia de entidades abstractas, las estructuras, que están por encima de los objetos abstractos en sí mismos. En particular, las construcciones abstractas de Cantor y Dedekind ya daban un nivel de existencia de los números reales, pero estas construcciones se pueden ver como instancias de una entidad abstracta única con

[14]El *Principio de la permanencia de las formas equivalentes* de Peacock afirma en su forma directa que "Whatever form is algebraically equivalent to another when expressed in general symbols, must continue to be equivalent, whatever those symbols denote." En su forma conversa afirma que "Whatever equivalent form is discoverable in arithmetical algebra considered as the science of suggestion, when the symbols are general in their form, though specific in their value, will continue to be an equivalent form when the symbols are general in their nature as well as in their form." [En: Ewald, W.: *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics*. Oxford Clarendon Press 1996, pp. 320]. Por otro lado, el *principio de permanencia* de Hankel afirma que "si dos formas expresadas en el lenguaje simbólico de la aritmética son iguales, entonces ellas seguirán siendo iguales cuando los símbolos dejen de representar magnitudes, y las operaciones tengan un entendimiento de otro tipo."

[15]Al parecer el término categórico aparece inicialmente formulado en este sentido por Veblen, uno de los fundacionistas americanos, en 1904.

un nivel de existencia superior, la estructura de los números reales. Encontramos acá que el ambiente de la época propiciaba una suerte de "solución" al problema de la existencia en las estructuras abstractas. En el caso particular, referido de los números reales, esta puerta es eficazmente aprovechada por Hilbert en su propuesta axiomática a través de la estructura de los cuerpos arquimedianos totalmente ordenados y completos. Esto es, según nosotros, lo que podría explicar la tranquilidad y cierto grado de certeza en la formulación de Hilbert a pesar de las posibles paradojas conjuntistas; pues a pesar de su conocimiento que el fundamento general de las matemáticas, a través de la teoría de conjuntos, no estaba totalmente resuelto, el meterse dentro de la estructura de los cuerpos arquimedianos totalmente ordenados (nivel de existencia con muy buenas perspectivas de consolidarse[16], según el ambiente de la época antes bosquejado) le daba una suerte de legalidad para determinar la existencia de los números reales con un carácter maximal dentro de la estructura donde estaba metido. Más aún, la unicidad estaba dada por la categoricidad tomada de Dedekind. Esta postura de Hilbert es a la que nos hemos referido como un estructuralismo pragmático, que curiosamente aún hoy se preserva en muchas comunidades matemáticas. La mayoría de los matemáticos actuales trabajan en el interior de ciertas estructuras sin gran preocupación por las paradojas y la aparición de posibles indecidibles. Este estructuralismo pragmático dio lugar al amplio desarrollo de la matemática estructuralista de todo el siglo XX.

Un análisis detallado sobre las distintas nociones de categoricidad, alrededor de 1900, se encuentra en [1]. En este documento Awodey-Reck discuten algunas nociones de completitud para varios sistemas axiomáticos junto con la noción de categoricidad. En lo que concierne a los números reales se centran en los trabajos de Dedekind, Hilbert y Huntington. Además, relacionan el desarrollo de estas nociones con el surgimiento del método axiomático, señalando lo inadecuado de restringir tales definiciones a la lógica de primer orden desde el punto de vista histórico; más aún, en [2] se proponen mostrar que dicha restricción es inadecuada técnicamente, y que algunos aspectos de las versiones de categoricidad encontrados son más naturales y fructíferos cuando son examinados en lógicas de orden superior dadas las limitaciones de las de primer orden. En esta última referencia (pag. 92) afirman que los números reales proveen un ejemplo de una estructura caracterizada únicamente por una teoría categórica que no está determinada por una conocida propiedad de aplicación universal. Nosotros esperamos dar tal caracterización al final del presente trabajo.

El entorno cercano a 1900 constituye un singular momento histórico para las matemáticas, se trata del regreso del método axiomático tipo aristotélico ahora con los lenguajes universales de Leibnitz y Descartes formalizados y/o a punto de formalizarse (en buena medida el gran logro de Frege). Si se quiere está todo listo para la gestación de una versión del método axiomático fortalecido. No es difícil creer un amplio contexto donde se revive el sueño Luliano y es así que en los diferentes frentes de las matemáticas se buscan con gran urgencia axiomáticas completas, que den cuenta de todas las verdades, para las

[16]A pesar que desde la teoría de conjuntos no se podría garantizar en esos momentos la existencia de la clase de todos los cuerpos arquimedianos ordenados.

diferentes teorías matemáticas, entre otras la teoría de conjuntos, la de los números naturales, la de la geometría euclidiana y la de los números reales.

Bernays [3] nos recuerda que el propio Hilbert establecía muy bien la distinción entre dos métodos, el *genético* y el *axiomático*. El genético permite reconocer las sucesivas extensiones del campo numérico hasta llegar a las cortaduras de Dedekind o a las sucesiones fundamentales de Cantor. Mediante el axiomático, se parte de un dominio de objetos que cumplen un sistema de axiomas que reglan relaciones entre ellos, y se prueba la consistencia y la completitud del sistema. Hilbert se pregunta: ¿Cuál es el método más apropiado si estamos interesados en una investigación lógica de los fundamentos de la mecánica y otras disciplinas físicas? Su apuesta es por la prioridad del método axiomático [19]: "No obstante el gran valor pedagógico y heurístico del método genético, el método axiomático merece la prioridad por la presentación final y la seguridad completamente lógica del contenido de nuestro conocimiento"

Pero una vez se comprende la complejidad del proceso en virtud del cual se constituyen los reales, por sucesivas extensiones a partir del dominio de los enteros positivos, la ventaja principal del enfoque axiomático es la de permitirnos capturar el cuerpo completo de los reales por la sola consideración de su estructura, sin tener que apelar a todos los conceptos y procedimientos que intervinieron en la cadena de extensiones [19]:

> (...) No tenemos que concebir el conjunto de los reales, digamos, como la totalidad de todas las posibles leyes según las cuales proceden los elementos de una sucesión fundamental, sino más bien... como un sistema de cosas cuyas relaciones entre una y otra están dadas por el sistema finito y completo de axiomas... y acerca del cual las nuevas proposiciones son válidas si se pueden deducir de tales axiomas en un número finito de inferencias lógicas.

Hilbert, que disfrutaba de un lugar privilegiado, toma las banderas de este nuevo método axiomático y establece axiomáticas completas para la geometría euclidiana (1899) y los números reales (1900). En años posteriores Bernays (1918) encuentra una axiomática completa para el cálculo proposicional[17], mientras que Gödel (1929) establece una axiomática completa para el cálculo de predicados de primer orden. No obstante, el mismo Gödel (1930) echa abajo el sueño Luliano probando la incompletez de la aritmética. Sin embargo, este sueño de la completez absoluta nos dejó un método axiomático fortalecido como el que más, abriendo las puertas de las matemáticas al estructuralismo. Esto sin lugar a dudas hace del siglo XX el más productivo en los desarrollos matemáticos de toda la historia.

Los axiomas de los números reales en Hilbert [19] están dados en cuatro grupos: axiomas de composición, (II) axiomas de calculo, (III) axiomas de orden, y (IV) axiomas de continuidad. Naturalmente Hilbert conoce las propuestas de continuidad de Dedekind, Bolzano, Weierstrass, Cauchy y Cantor; sin embargo él escoge una opción distinta representada por el grupo (IV) de axiomas: (IV.1) el axioma arquimediano y (IV.2) el axioma de completez [19].

[17]En la literatura es usual atribuir este resultado a Emil Post, quién dio una prueba del mismo en 1920.

> (IV.2) No es posible añadir al sistema de números otro sistema de objetos de modo que los axiomas I, II, III, y IV,1 también se satisfagan en el nuevo sistema combinado; en otras palabras, los números conforman un sistema de objetos que tiene la propiedad de hacer imposible una extensión [propia] del mismo conservando la validez de la totalidad de sus axiomas.

Esto significa que no existe un cuerpo arquimediano del cual los números reales sea un subcampo ordenado propio; es decir, se impone una condición de maximabilidad que garantiza su unicidad, y la inmersión de cualquier otro cuerpo arquimediano. Como habíamos comentado anteriormente en las cercanías de Hilbert a Husserl, la legalidad de la existencia de los números reales está sustentada en su carácter maximal dentro de la clase de los cuerpos arquimedianos ordenados.

En esta axiomática aparece abiertamente la presencia de la categoricidad, pero ahora se hace explícito su uso para establecer existencia en su proyecto fundacional, como se percibe en la siguiente cita tomada de la misma referencia citada [19]:

> (...) las dudas que en general se han hecho valer contra la existencia del agregado de todos los números reales y los conjuntos infinitos en general pierden toda su justificación [...] el conjunto de los números reales no tiene que concebirse, ahora, digamos, como la totalidad de las leyes que pueden gobernar la sucesión de los términos de una sucesión de Cauchy, sino más bien [...] como un sistema de cosas cuyas relaciones mutuas están dadas por el sistema **finito y cerrado** de los axiomas I-IV [que caracteriza un cuerpo arquimediano ordenado completo] y sobre los cuales valen otras aseveraciones sólo si uno puede derivarlas de los axiomas mediante un número finito de inferencias lógica.

Como ya se mencionó, la existencia en Hilbert es simplificada en la no contradicción, como lo expresa en la carta a Frege de 29 de diciembre de l899: “si los axiomas arbitrariamente estipulados, junto con todas sus consecuencias, no se contradicen entre sí, entonces son verdaderos y existen las cosas definidas por ellos. Este es para mí el criterio de existencia y de verdad”. Mientras que en el congreso de Paris de 1900 afirma:

> (...) si a un concepto se le asignan características contradictorias, digo que ese concepto matemáticamente no existe (...) Pero si se logra demostrar que las características asignadas al concepto no pueden conducir jamás a una contradicción mediante la aplicación de un número finito de inferencias lógicas, digo que con ello se ha demostrado la existencia matemática del concepto (por ejemplo, un número o una función que cumple ciertos requisitos)

Esta existencia en Hilbert referida a la no contradicción resulta claramente cercana a la realidad inmanente de los objetos matemáticos en Cantor y su restricción a la no contradicción. Así mismo, es solidaria con las preocupaciones de Dedekind sobre la existencia efectiva de un sistema simplemente infinito por medio de su caracterización axiomática, la cual se ha exhibido arriba.

De otro lado es conocido que Hilbert participó en seminarios sobre los fundamentos de la física en Göttingen con físicos como Minkoswski, Boltzmann y Hertz. En esos momentos Hertz había desarrollado tres criterios básicos a considerar en la fundamentación de la física para evaluar cualquier hecho: *consistencia, correlación y conveniencia.* Sin lugar a dudas, estos principios básicos, la presentación axiomática de la geometría en el texto *Lecciones sobre geometría nueva* de Moritz Pasch, y de la categoricidad tomada de Dedekind, inciden en su programa formalista. Desde su nueva visión de las matemáticas, la existencia se considera independientemente de todo acto o procedimiento de construcción del objeto, formalmente la reduce a la no contradicción. Pero tal existencia debe estar dada sobre una base intuitiva de signos concretos, dominio de la metamatemática o teoría de la demostración por medios finitistas.

Para Hilbert completez y simplicidad son dos atributos necesarios para que un sistema de axiomas pueda fundamentar una construcción deductiva. Recordemos que al comienzo de los *Fundamentos de la Geometría* afirma lo siguiente:

> La presente investigación es un intento nuevo de establecer un conjunto de axiomas para la geometría tan completo y simple como sea posible, y deducir de ellos los teoremas geométricos más importantes, de tal manera que se aclare el sentido de los varios grupos de axiomas, y el significado de las conclusiones que puedan derivarse de los axiomas individuales.

Una vez resuelto el problema de dar una existencia inescrutable para los números reales, sin recurrir al concepto de conjunto de enteros, el fundamento del análisis está sentado para Hilbert. Ideas que en los años posteriores se sumaran a su Programa Formalista de fundamentación de las matemáticas. Esto nos dará un cierto grado de libertad en nuestra lectura de su axiomática, mirando los objetos caracterizado como los cuerpos totalmente ordenados arquimedianos y los criterios de comparación entre ellos como los homomorfismos de cuerpos monótonos.

3. Una lectura moderna de Dedekind

A continuación, queremos hacer una lectura de los trabajos de Dedekind desde una perspectiva bastante moderna, los cuales igualmente nos servirán en la lectura posterior de Hilbert. Es así que nos vemos obligados a introducirnos por un momento en algunos formalismos técnicos propios de las matemáticas modernas. En particular haremos un muy breve acercamiento al álgebra universal, para adentrarse más en este punto recomendamos la lectura de [5], y a la teoría de categorías, tópico en el que existen un sinnúmero de excelentes textos clásicos como el de Saunders MacLane "*Categories for the Working Mathematician*" publicado en 1971, cuya segunda edición la hace la Springer Verlag en 1991, y otros modernos como el de Steve Awodey "*Category Set*" (Carnegie Mellon University, Clarendon Press-Oxford 2006).

3.1 Un bit de álgebra universal

En las matemáticas existe una gran variedad de estructuras algebraicas, entre otras los espacios vectoriales, los anillos, los grupos, y los retículos. Es apenas natural la búsqueda de lenguajes lo suficientemente potentes para hablar de todas ellas, es así que surge el Álgebra Universal, que desarrollaremos brevemente a continuación.

Una *signatura o tipo de lenguaje* es un un par $\langle \Sigma, \theta \rangle$ donde Σ es un conjunto de elementos llamados símbolos de operación y $\theta : \Sigma \to N$ es tal que para cada $\sigma \in \Sigma$, $\theta(\sigma) = n$ es llamada la *aridad* de σ.

Una Σ-álgebra es un par ordenado $\mathbf{A}=\langle A, \langle \sigma^{\mathbf{A}} : \sigma \in \Sigma \rangle \rangle$, donde A es un conjunto no vacío y $\sigma^{\mathbf{A}} : A^n \to A$ es una función llamada operación fundamental en A, para todo $\sigma \in \Sigma$. Cuando $n = 0$ se entiende $\sigma^{\mathbf{A}}$ como un elemento constante de A.

Un ejemplo típico es el lenguaje $\Sigma = \{\cdot, ^{-1}, e\}$ para hablar de los grupos, donde $\cdot$ es un símbolo de operación binaria (de aridad dos), $^{-1}$ es un símbolo unario (de aridad uno), y e es un símbolo constante (de aridad cero).

Un grupo es una álgebra $\mathbf{G} = \langle G, \cdot, ^{-1}, 1 \rangle$ que satisface las siguientes identidades: $x \cdot (y \cdot z) \approx (x \cdot y) \cdot z$, $x \cdot 1 \approx 1 \cdot x \approx x$ y $x \cdot x^{-1} \approx (x^{-1} \cdot x) \approx 1$.

Los retículos se pueden describir en forma similar. Un retículo es una álgebra con operaciones binarias $\mathbf{L} = \langle L, \vee, \wedge \rangle$ que satisfacen la leyes conmutativas $x \vee y \approx y \vee x$ y $x \wedge y \approx y \wedge x$; las leyes asociativas $(x \vee y) \vee z \approx x \vee (y \vee z)$ y $(x \wedge y) \wedge z \approx x \wedge (y \wedge z)$; las leyes de idempotencia $x \vee x \approx x$ y $x \wedge x \approx x$; y las leyes de absorción $x \approx x \vee (x \wedge y)$ y $x \approx x \wedge (x \vee y)$.

3.2 Dedekind en el lenguaje de teoría de categorías

Dada la signatura $\Sigma = \{f, e\}$ donde f y e son símbolos de operación de aridad uno y cero respectivamente, formemos la categoría $\mathcal{C}$ que tiene por objetos todas las $\Sigma-$álgebras y por morfismos los $\Sigma-$homomorfismo entre ellas. En la literatura es usualmente llamada la categoría de las álgebras tipo uno-cero. Los objetos de $\mathcal{C}$ son F-álgebras, es decir, álgebras de la forma $\mathbf{A} = \langle A, f^{\mathbf{A}}, a^{\mathbf{A}} \rangle$, donde $f^{\mathbf{A}} : A \to A$ es una función y $a^{\mathbf{A}}$ es un elemento distinguido de A. Las cuales por comodidad las representaremos abreviadamente, por una sola aplicación $[f^{\mathbf{A}}, a^{\mathbf{A}}]: A+1 \to A$. Entendiéndose que $a^{\mathbf{A}} : 1 \to A$ toma como distinguido de A al elemento $a^{\mathbf{A}}$. En particular el álgebra $\mathbf{N} = \langle N, s^{N}, 0^{N} \rangle$ de los números naturales, donde s^{N} representa la función sucesor es un objeto de esta categoría $\mathcal{C}$ y que representaremos abreviada según convenimos por $[s^{N}, 0^{N}]$.

Dado $[f^{\mathbf{A}}, a^{\mathbf{A}}]$ un objeto cualquiera de la categoría $\mathcal{C}$ entonces existe una única $h{:}\boldsymbol{N} \to A$ definida por $h(0) = a$ y $h(s(n)) = f(h(n))$ para todo n que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
N+1 \arrow[r, "{[h,id_1]}"] \arrow[d, "{[s^N, 0^N]}"'] & A+1 \arrow[d, "{[f^A, a^A]}"] \\
N \arrow[r, "h"'] & A
\end{tikzcd}$$

Es decir, los números naturales son el objeto inicial de la categoría $\mathcal{C}$.

Observación 3.1 *El objeto inicial, siempre que exista, en una categoría es único salvo isomorfismos.*

Puesto que si A y B son objetos iniciales en una categoría dada, entonces existen morfismos únicos $h: A \to B$ y $k: b \to A$, así $g \circ h: A \to A$ es el único morfismo de A en A, y por tanto es igual $id_A : A \to A$, que siempre existe pues estamos en una categoría. Es decir, $k \circ h = id_A$. Análogamente $h \circ k = id_B$, y así A y B son isomorfos.

Lo cual nos da de inmediato el resultado de categoricidad de los números naturales, es decir, son únicos salvo isomorfismos. Además nos permite exhibir con cierta agilidad los principios de inducción y recursión.

3.3 El principio de inducción.

Intuitivamente, el ser **N** es el objeto inicial[18] en $\mathcal{C}$ está dando cuenta que es el menor objeto inductivo, que es lo análogo a la presentación conjuntista como el menor conjunto inductivo. Veamos ahora que esta caracterización en el lenguaje de categorías para los números naturales nos guarda además *el principio de inducción:* si tenemos que $P(x)$ es una propiedad definida sobre $\boldsymbol{N}$, entonces si $A = \{n \in N : P(n)\}$ cumple que $0 \in A$ y para todo $n \in A$ implica que $s(n) \in A$, entonces $A = \boldsymbol{N}$.

Dadas las características del conjunto A tenemos que el álgebra $\mathbf{A} = \langle A, s^{\mathbf{A}}, 0^{\mathbf{A}} \rangle$; donde $s^{\mathbf{A}}$ representa la función sucesor restringida al conjunto A y $0^{\mathbf{A}}$ es el $0 \in \boldsymbol{N}$ es un objeto de esta categoría $\mathcal{C}$, es decir, $[s^{\mathbf{A}}, 0^{N}]$ es un elemento de $\mathcal{C}$, pero como $[s^N, 0^N]$ es el objeto inicial, entonces existe un único h tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
N+1 \arrow[r, "{[h,id_1]}"] \arrow[d, "{[s^N, 0^N]}"'] & A+1 \arrow[d, "{[s^A, 0^N]}"] \\
N \arrow[r, "h"'] & A
\end{tikzcd}$$

[18]Esta caracterización de los naturales, es usada en el axioma N.N.O. de Freyd [15] y Goldblatt [17], que no es más que una reescritura del axioma 3 de Lawvere [25]; que como afirma Zalamea [31] captura el comportamiento de la estructura de los naturales con respecto a la definibilidad de funciones vía recursión simple. Si la categoría ambiente es, además, una categoría cartesiana cerrada (c.c.c.) se obtiene entonces *recursión primitiva*.

Así como ya teníamos que $0^{\mathbf{A}} = \boldsymbol{N}$ entonces se concluye que $h = id_{N}$ con lo cual $s^{\mathbf{A}}, s^{N}$ y por tanto $A = \boldsymbol{N}$.

3.4 El principio de recursión.
Sea A un conjunto[19] y $a_0 \in A$, entonces para toda función $g : A \times \boldsymbol{N} \to A$ existe una única $h : \boldsymbol{N} \to A$ tal que $h(0) = a_0$ y para todo $n \in \boldsymbol{N}$ se cumple que $h(s(n)) = g(h(n), n)$.

Tomando $a : 1 \to A$, definida como $a(0) = a_0$, y haciendo la suma amalgamada entre los morfismos $g : A \times \boldsymbol{N} \to A$ y $a : 1 \to A$ tenemos que se pueden representar mediante el morfismo $A \times \boldsymbol{N} + 1 \xrightarrow{[g,a]} A$.

Nuevamente usando el carácter de objeto inicial para $\boldsymbol{N}$ tenemos que existe un único morfismo h tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{N} + 1 \arrow[r, "{[<h,\, id_{\mathrm{N}}>,\, id_1]}"] \arrow[d, "{[s^{\mathrm{N}},\, 0^{\mathrm{N}}]}"'] & A \times \mathrm{N} + 1 \arrow[d, "{[g,\, a]}"] \\
\mathrm{N} \arrow[r, "h"'] & A
\end{tikzcd}$$

así $h(0) = h \circ [s^{N}, 0^{N}]\,(0) = [g,a] \circ [\langle h,\, id_N \rangle\, id_1](0) = a(0) = a_0$ y además que
$h(s(n)) = h \circ [s^{N}, 0^{N}]\,(n) = [g,a] \circ [\langle h,\, id_N \rangle\, id_1](n) = g(h(n)n)$.

Ahora veamos el denominado *teorema de recursión paramétrica:*

Teorema 3.1 *Dadas las funciones $a: P \to A$, y $g: A \times \boldsymbol{N} \times P \to A$ existe una única $h: \boldsymbol{N} \times P \to A$ tal que $h(0, p) = a(p)$ para todo $p \in P$ y para todos $n \in \boldsymbol{N}$, $p \in P$ se cumple que $h(s(n), p) = g(h(n,p), n, p)$.*

Este principio de recursión, que no es inmediato para nada en un curso básico de teoría de conjuntos, permite probar la categoricidad de $\langle \boldsymbol{N}, < \rangle$ con las propiedades básicas de no tener elemento final, y que cada conjunto acotado inferiormente tiene un mínimo y que cada conjunto acotado superiormente tiene un máximo (ver [23]). Además nos garantiza la

[19] Es importante notar que nuestra categoría ambiente es *Set* que es c.c.c. y por tanto tenemos esta versión fuerte de recursión.

buena definición de las funciones recursivas, entre las que podemos resaltar la buena definición de las operaciones suma y multiplicación en los números naturales que constituyen parte fundamental en las presentaciones básicas de la estructura algebraica de N. Para garantizar la existencia de una única suma +: $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ tal que $+(m, 0) = m$ para todo $m \in \boldsymbol{N}$ y que $+(m, s,(n)) = s(+(m,n))$ para todos $m,n, \in$ N basta invocar el teorema de recursión paramétrica y escoger $P = A = \boldsymbol{N}$, $a(p) = p$ para todo $p \in \boldsymbol{N}$, y $g(x,n,p) = s(x)$ para todos $p, x, n \in \boldsymbol{N}$. Hoy por hoy, al abordar los fundamentos básicos de la aritmética es tarea obligada sustentar y discutir el principio de recursión.

Una observación interesante es notar que, bajo las hipótesis del teorema de recursión primitiva, para cada $p \in P$ fijo, haciendo $a(p) = a_p$ y $g_p{:}A \times \boldsymbol{N} \to A$, definida por $g_p(a,n) = g(p,a,n)$ tenemos que existe una única h_p tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{N}+1 \arrow[r, "{[<h_p,\, id_{\mathrm{N}}>,\, id_1]}"] \arrow[d, "{[s^{\mathrm{N}},\, 0^{\mathrm{N}}]}"'] & A \times \mathrm{N} + 1 \arrow[d, "{[g_p,\, a_p]}"] \\
\mathrm{N} \arrow[r, "h_p"'] & A
\end{tikzcd}$$

Así las cosas es natural al pregunta: ¿cómo determinar la única h conclusión del teorema?

Para lograr esto es necesario pedir a la categoría subyacente tener potencias, bajo esta condición dada $a{:}P \to A$ tenemos que $a \in A^P$ y dada $g{:}A \times \boldsymbol{N} \times P \to A$, entonces existe $G{:}\boldsymbol{N} \times A^P \to A^P$ definida por $G(n,b)(p) = g(b(p),n,p)$. Luego existe una única k tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{N}+1 \arrow[r, "{[<id_{\mathrm{N}},\, k>,\, id_1]}"] \arrow[d, "{[s^{\mathrm{N}},\, 0^{\mathrm{N}}]}"'] & \mathrm{N} \times A^P + 1 \arrow[d, "{[G,\, a]}"] \\
\mathrm{N} \arrow[r, "k"'] & A^P
\end{tikzcd}$$

Así tenemos que $k(0) = a$ y también que $k(s(n)) = G(n,k(n))$, por lo cual concluimos que $k(s(n))(p) = G(n,k(n))(p) = g(k(n)(p),\ n,\ p)$. Por lo tanto garantizamos la existencia de una única función $h{:}\boldsymbol{N}{\times}P \to A$, definida por $h(n,p) = k(n)(p)$ que satisface que $h(0,p) = k(0)(p) = a(p)$ y $h(s(n),p) = k(s(n))(p) = g(k(n),n,p)$, para todos $n \in \boldsymbol{N}$ y para todo $p \in P$.

En resumen, bajo la existencia de A^P para todos A y P se tiene como resultado el teorema de recursión paramétrica, en particular si estamos en una categoría c.c.c.

4. Completez de Hilbert formalizada

Veamos en forma sucinta dos de las presentaciones formalizadas de la completez de Hilbert. La primera propuesta de Cohen-Goffman [7] y [16], basada en las condición de maximalidad a través de grupos ordenados arquimedianos. La segunda la propuesta de Ehrlich [11], en la cual partiendo del sistema *P* presentado por Tarski, que es equivalente al propuesto por Hilbert, adiciona los axiomas arquimediano (*A*) y de completez (*C*) para estudiar básicamente los teoremas de inmersión y categoricidad.

4.1 Formalización de Cohen-Goffman

En [16] se distinguen entre tres tipos de completez para los números reales, las estándar de Dedekind y Cantor, agregando la Arquimediana o de Hilbert que desarrollaremos más adelante.

- *Dedekind,* completez de órdenes totales: un conjunto *S* con un orden total se dice completo si y sólo si todo subconjunto no vacío de *S* acotado superiormente tiene supremo.
- *Cantor,* completez de espacios métricos: un espacio métrico se dice completo si y sólo si toda sucesión de Cauchy converge.
- *Arquimediana o de Hilbert,* completez como grupo abeliano totalmente ordenado: un grupo abeliano totalmente ordenado se dice completo si y sólo si no tiene extensiones arquimedianas propias.

Dado un grupo abeliano totalmente ordenado *S,* dos elementos $x,y\in S$ con x, $y>0$ se dicen *relativamente arquimedianos* si cada uno es menor que un múltiplo del otro. Si *S* y *T* son grupos totalmente ordenados, con *S* un subgrupo ordenando de *T* tenemos que *T* es una *extensión arquimediana* de *S* si para cada $x \in T$, $x > 0$ existe un $y\in S$ tal que *x* y *y* son relativamente arquimedianos. Un grupo *G* es llamado completo en el sentido de arquímedes ó *a-completo* si no tiene una extensión arquimediana propia.

Un cuerpo *F* cuyo grupo aditivo es abeliano totalmente ordenado *a-completo*, se dice que es un cuerpo ordenado arquimediano completo. Dado que esta definición no presupone que *F* sea arquimediano, tiene sentido preguntarnos sí existen cuerpos no arquimedianos que sean cuerpos ordenados arquimedianos completos. La respuesta es que sí existen y fueron descubierto en 1907 por H. Hahn que los caracteriza con una sencilla definición a través de series formales; posteriormente se han obtenido resultados similares a los teoremas de inmersión y categoricidad sobre estos cuerpos de Hahn.

Ejemplos:

1. Sea $S=\langle Z\times Z,\leq_{Lex}\rangle$ donde $\leq_{Lex}$ representa el orden lexicográfico. Entonces *S* no es arquimediano ya que tomando a $0=(0,0)$, $b=(0,1)$ y $c=(1,0)$ tenemos que $0<b<c$ y para todo $n\in \boldsymbol{N}$ se cumple que $nb=n(0,1)=(0,n)<c$.

2. Sea $T = \langle R \times R, \leq_{Lex} \rangle$ entonces veamos que *T* es una extensión arquimediana de *S:* sea $a = (x, y) \in S$. Luego $0 < a \leftrightarrow (0,0) < (x, y)$ que a su vez es equivalente a $0 < x$ ó $0 = x \wedge 0 < y$.

caso 1: $0 < x$ tomando $b = (1,0) > 0$, con $b \in S$. Como $x, 1$ en ***R*** son relativamente arquimedianos, concluimos que *a, b* son relativamente arquimedianos en *T*.

caso 2: $0 = x \wedge 0 < y$ tomando $b = (0,1) > 0$, con $b \in S$. Como $y, 1$ son relativamente arquimedianos em ***R*** concluimos que *a,b* son relativamente arquimedianos en *T*.

3. *T* no es arquimediano, pues ya habíamos mostrado que *S* no lo es.

4. Si hacemos $A = \{(x, y) : (x, y) < (0, n) \forall n \in N\}$ entonces el conjunto *A* resulta ser igual a $\{(x, y) : x \leq 0\}$. Entonces *A* no tiene mínima cota superior, pues si tenemos que (u, v) es una cota superior para *A* entonces $u > 0$ y así $(u, v-1)$ también es cota superior para *A* y $(u, v-1) < (u, v)$.

Cohen-Goffman [7] demuestran que ***R*** es completo en el sentido de Arquímedes, y como los números enteros son completos en el sentido de Dedekind y de Cantor, pero no lo son el sentido de Arquímedes, afirman que tales definiciones de completez son defectuosas. Más aún, muestran cierta debilidad en la noción de completez de Cantor para grupos totalmente ordenados, la cual modifican considerando sucesiones transfinitas[20] en lugar de lo usual de sucesiones numerables. A las restricciones impuestas las llaman *d*-completez y *c*-completez para la de Dedekind y la de Cantor respectivamente. Además muestran su equivalencia, y que *a*-completo implica *d*-completo, y por tanto *c*-completo.

En esta formalización se captura la idea de maximabilidad propuesta por Hilbert en su axioma de completez, y aparece como una axiomatización mucho más fuerte que las tradicionales de Cantor y Dedekind.

4.2 Formalización de Ehrlich

En [11] la versión del axioma de completez (C) es dada por *"the estructure consisting of the collection of points together with betweenness and equidistance relations defined on it admits no proper extension to a model of* $P \cup \{A\}$." Donde *P* representa los axiomas básicos de la geometría propuestos por Tarski y *A* el axioma arquimediano.

[20]Esta forma de completez puede ser definida en términos de estructuras uniformes, intervalos cerrados anidados o sucesiones transfinitas.

La noción clásica de espacio cartesiano sobre un campo ordenado $\langle F, +, \cdot, \leq \rangle$ es la estructura $C_2\{F\} = \langle A_F, B_F, \equiv_F \rangle$ donde las relaciones B_F y $\equiv_F$ son definidas sobre $A_F = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in F\}$ por las siguientes expresiones:

- $B_F xyz$ si y sólo si existe $\lambda \in F$ con $0 \leq \lambda \leq 1$ y $y_i - x_i = \lambda(z_i - x_i)$ para $i = 1,2$.
- $xy \equiv_F uv$ si y sólo si $\sum_{i=1}^{i=2}(x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{i=2}(u_i - v_i)^2$.

La completez de Hilbert en esta formalización encierra esencialmente los teoremas de inmersión y categoricidad del sistema $P \cup \{A, C\}$. Todo modelo de $P \cup \{A\}$ está inmerso en $C_2\{\boldsymbol{R}\}$ y este es salvo isomorfismo el único modelo de $P \cup \{A, C\}$. Con lo cual se da respuesta a la pregunta inmediata que emerge cuando se estudia el axioma de continuidad de la recta geométrica en Dedekind, acerca de cual era la relación del axioma de completez con la geometría cartesiana, y la respuesta es que garantiza su unicidad via la categoricidad.

5. La categoría arquimediana ordenada

Precisemos para el caso de los números reales, aunque algo similar sucede para la geometría cartesiana, supongamos que tenemos la lista de los axiomas (I) axiomas de composición, (II) axiomas de calculo, (III) axiomas de orden, y dentro de los del grupo (IV) axiomas de continuidad, sólo consideremos el (IV,1) el axioma arquimediano.

Formemos la categoría $\mathcal{C}$ que tiene por objetos todos los modelos de los axiomas seleccionados. Los modelos de dichos axiomas no son otros que los cuerpos arquimedianos totalmente ordenados como detallaremos un poco más adelante. Dentro de éstos objetos tenemos a $\boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{Q}[\sqrt{2}]$[21] entre otros. Dados dos de tales modelos M_1 y M_2 el conjunto de morfismos de M_1 a M_2 está formado por todos los monomorfismos de cuerpos que preservan el orden entre M_1 y M_2 es decir, los monomorfismos monótonos. Para concluir la formulación de la categoría digamos que las identidades y composición son las obvias. En lo que resta del artículo presentaremos en forma detallada la descripción de la categoría $\mathcal{C}$.

5.1 El cuerpo arquimediano inicial

Dado un cuerpo F[22] resulta inmediato mostrar que X la intersección de todos los subcuerpos contenidos en F es nuevamente un cuerpo. Éste es el subcuerpo más pequeño de F usualmente llamado *subcuerpo primo*. Si se quiere en forma más precisa X es el subcuerpo generado por el modulo multiplicativo 1, es decir, el conjunto

---

[21] Si desarrollamos el caso de la geometría tendríamos como objetos las geometrías $C_2\{\boldsymbol{Q}\}$ y $C_2\{\boldsymbol{Q}[\sqrt{2}]\}$ entre otros.

[22] En forma más general, podríamos considerar un anillo con división.

$$X = \left\{ \frac{m1}{n1} : m, n \in Z \wedge n1 \neq 0 \right\}.$$

Observación 5.1 *Cuando F es de característica cero, entonces n1 = 0 si y sólo si n=0 y por tanto la aplicación* $\xi : Z \rightarrow X$ *es inyectiva. Como **Q** es el cuerpo de fracciones de **Z** existe un único homomorfismo h:**Q** $\rightarrow X$ que extiende a* ξ*. Es decir, tal que el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "i"'] & X \\
Q \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

con lo cual $h\left(\frac{m}{n}\right) = h(m)h(n)^{-1} = \frac{m1}{n1}$. Así su cuerpo primo es isomorfo a los números racionales ***Q***.

Observación 5.2 *Dentro de las consideraciones estándar de ordenes se puede mostrar además que existe un único orden total compatible sobre **Q**, que extiende el orden de **Z**.*

Observación 5.3 $\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q}$ *si y sólo si* $mq \leq np$.

Con lo anterior se recibe como resultado[23] el siguiente teorema.

Teorema 5.1 *Si F es un cuerpo totalmente ordenado, entonces existe un monomorfismo monótono f:**Q** $\rightarrow F$.*

Definición 5.2 *Si G es un grupo ordenado y* $x, y \in G$ *entonces diremos que x es* **infinitamente más pequeño** *que y, y escribiremos* $x << y$ *si para todo n∈**Z** se cumple que* $x^n \leq y$. *Diremos que G es* **arquimediano** *si* $1_G << x << y$ *implica que* $x = 1_G$. *Si* $\langle R, +, \cdot, \leq \rangle$ *es un cuerpo entonces diremos que R es* **arquimediano** *si* $\langle R, +, \leq \rangle$ *es un grupo ordenado.*

[23] Es importante recordar la cercanía de este resultado al ya clásico teorema de Hölder (1900) donde demuestra que bajo la hipótesis de ser *G* un grupo totalmente ordenado, ser arquimediano es equivalente a ser isomorfo a un subgrupo aditivo de los números reales, de donde deriva que todo grupo arquimediano totalmente ordenado es conmutativo.

Es importante notar que un grupo totalmente ordenado G es arquimediano si y sólo si para todos $x, y > 0$ tales que $1_G < x \leq y$ existe un $n\in\mathbf{Z}$ tal que $x^n \leq y \leq x^{n+1}$.

Ejemplo 5.3 *El campo de los números racionales **Q** con el único orden total que extiende el orden de **Z**, es arquimediano. Usando la notación aditiva, escribiremos nx en lugar de xn. Si* $0<\frac{m}{n}<\frac{p}{q}$ *en **Q** con n,q<0 entonces* $(n^2p+1)\frac{m}{n} > n^2p\frac{m}{n} = npm \geq np \geq \frac{np}{nq} = \frac{p}{q}$.

Observación 5.4 *De las observaciones 1 y 2, y lo exhibido en el anterior ejemplo podemos concluir que: **Q** salvo isomorfismos, es el más pequeño cuerpo arquimediano totalmente ordenado.*

5.1.1 En lenguaje de teoría de categorías

La observación anterior recogida en términos de nuestra categoría[24] $\mathcal{C}$ nos afirma que $\mathbf{Q}$ es el objeto inicial de $\mathcal{C}$. Es decir, para todo F elemento de $\mathcal{C}$, equivalentemente para todo F cuerpo arquimediano totalmente ordenado, existe un único monomorfismo $h:\mathbf{Q}\to F$.

Así si suponemos que existe otro cuerpo arquimediano totalmente ordenado C que tenga las mismas propiedades que $\mathbf{Q}$ es decir si C es otro objeto inicia de la categoría $\mathcal{C}$, entonces para todo F elemento de $\mathcal{C}$ (es decir, para todo F cuerpo arquimediano totalmente ordenado) existe un único monomorfismo $k: C\to F$.

En tal caso existen monomorfismos únicos $h:\mathbf{Q}\to C$ y $k: C\to F$. Entonces $k\circ h$ es un monomorfismo de C en C y por la condición de unicidad tenemos que $k\circ h$ es la identidad; y análogamente $h\circ k$ es la identidad. Por tanto h es un isomorfismo y así $\mathbf{Q}$ es isomorfo a C. Recibimos que Q efectivamente es único salvo isomorfismos.

En otras palabras hemos sustentado la categoricidad de los números racionales, por ser objeto inicial de la categoría $\mathcal{C}$.

5.2 El cuerpo arquimediano final

Dado un cuerpo F totalmente ordenado, y $x\in F$ definimos el valor absoluto de x por $|x|=\{x,x\}$. No es difícil verificar que se satisfacen las habituales propiedades del valor absoluto en los números reales, es así que las usaremos libremente. Además llamaremos una **sucesión** a una función $a:\mathbf{N}\to F$ y diremos que:

- a es una sucesión de **Cauchy** si para todo $\varepsilon > 0$ en F, existe un $k_0\in \mathbf{N}$ tal que $|a(n) - a(m)| < \varepsilon$ para todos $m,n \in \mathbf{N}$ tales que $m,n \geq k_0$.
- a es una sucesión de **nula** si para todo $\varepsilon > 0$ en F, existe un $k_0\in \mathbf{N}$ tal que $|a(n)| < \varepsilon$ para todos $n\in \mathbf{N}$ tal que $n \geq k_0$.

[24] Esperamos que la categoría $\mathcal{C}$ sea más clara ahora, formada por todos los cuerpos arquimedianos totalmente ordenados como objetos y los homomorfismos (de cuerpos) monótonos entre ellos como morfismos.

- a es una sucesión **positiva** si existen $\varepsilon > 0$ en F, y $k_0 \in \boldsymbol{N}$ tales que $|a(n)| > \varepsilon$ para todo $n \in \boldsymbol{N}$ tal que $n \geq k_0$.
- a es una sucesión **convergente** si tiene un límite en F es decir, existe $b \in F$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ en F, existe un $k_0 \in \boldsymbol{N}$ tal que $|a(n) - b| < \varepsilon$ para todos $n \in \boldsymbol{N}$ tal que $n \geq k_0$.

Usando la notación C y K para los conjuntos de todas las sucesiones de Cauchy y nulas respectivamente. Definiendo la suma y el producto componente a componente, es decir $(a+b)(n) = a(n) + b(n)$ y $(a.b)(n) = a(n)\ b(n)$ se demuestre en la forma estándar que C es un anillo conmutativo con identidad, que K es un ideal de C y que C/K es un cuerpo.

Aunque no es inmediato, usando la maquinaria de los epsilon's (ver por ejemplo [4]) se demuestra C/K es realmente un cuerpo totalmente ordenado que contiene una copia de F.

De nuevo en la forma estándar se muestra que en un cuerpo totalmente ordenado toda sucesión convergente tiene un único límite y es de Cauchy.

Definición 5.4 *Un subconjunto no vacío S de cuerpo totalmente ordenado F se dice* **denso** *en F si siempre que a<b en F, existe x∈ S tal que a < x < b.*

Teorema 5.5 *Un cuerpo totalmente ordenado F es arquimediano si y sólo si su subcuerpo primo es denso.*

Demostración

Como el subcuerpo primo es isomorfo a $\boldsymbol{Q}$ por comodidad identificaremos al subcuerpo primo con $\boldsymbol{Q}$. Supongamos que $\boldsymbol{Q}$ es denso en F y sean $a,b \in F$ tales que $0 < a < b$. Por la densidad existen $n,m \in \boldsymbol{N}$ tales que $0 < \frac{m}{n} < \frac{a}{b}$. Por lo tanto $na = bn\frac{a}{b} > bn\frac{m}{n} = bm \geq b$ y así F es arquimediano.

Ahora, supongamos que F es arquimediano y sean $a,b \in F$ tales que $a < b$. Entonces existen tres casos a considerar:

1. $a < 0 < b$: *T*rivialmente 0 está en $\boldsymbol{Q}$, y cumple lo requerido.
2. $0 < a < b$: En este caso $b - a > 0$ y así $\frac{1}{b-a} > 0$ por lo cual existe $n > 0$ tal que $n1 > \frac{1}{b-a}$ y por lo tanto $\frac{1}{n} > b - a$. Ya que F es arquimediano y $\boldsymbol{N}$ es bien ordenado, existe el mínimo de tales n, digamos que sea m, así $b \leq m\frac{1}{n} = \frac{m}{n}$. Tenemos entonces $b > \frac{m-1}{n} = \frac{m}{n} - \frac{1}{n} > b - (b-a) = a$ y así en este caso $\frac{m}{n} - \frac{1}{n}$ sirve como el elemento requerido de $\boldsymbol{Q}$.

3. $a < b < 0$: En este caso $0 < -b < -a$ y así por caso (2) existe $x \in \boldsymbol{Q}$ tal que $-b < x < -a$ y por tanto $a < x < b$ siendo $-x \in \boldsymbol{Q}$ el elemento requerido. ■

Definición 5.6 *Un cuerpo totalmente ordenado F se dice* **completo**[25] *si toda sucesión de Cauchy en F es convergente.*

De nuevo, usando la maquinaria de los epsilon's (ver por ejemplo [4]) se demuestra *C/K* que es arquimediano y completo.

Definición 5.7 *Por un* **cuerpo arquimediano universal** *entendemos un cuerpo totalmente ordenado R que es arquimediano y tal que, si X es cualquier otro cuerpo arquimediano totalmente ordenado, existe un único monomorfismo $h: X \to R$ tal que el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "j"'] & & X \arrow[dl, "h"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

es conmutativo, donde i y j son las inmersiones canónicas.

El siguiente resultado, cuya prueba se puede ver en [4] página 184, es fundamental para la conclusión de nuestro trabajo.

Teorema 5.8 *Salvo isomorfismos existe un único cuerpo arquimediano universal. Más aún, las siguientes dos condiciones sobre un cuerpo totalmente ordenado F son equivalentes:*

1. *F* es un cuerpo arquimediano universal.

2. *F* es arquimediano y completo.

El teorema anterior prueba que existe esencialmente un único cuerpo arquimediano universal, y que *C/K* es tan solo un modelo de este. Aunque no consideramos pertinente incluir la sustentación aquí, de una forma estándar se puede exhibir otro modelo a través de cortaduras a lo Dedekind. Como es lo usual denotaremos a este un único cuerpo arquimediano universal como $\boldsymbol{R}$, y no es otro que los números reales.

5.2.1 En lenguaje de teoría de categorías

El teorema anterior en términos de nuestra categoría $\mathcal{C}$ afirma que $\boldsymbol{R}$ es el objeto final de $\mathcal{C}$. Es decir, para todo *F* elemento de $\mathcal{C}$, equivalentemente, para todo *F* cuerpo arquimediano totalmente ordenado existe un único monomorfismo $h: F \to \boldsymbol{R}$.

[25] Realmente deberíamos decir Cauchy completo, pues existen otras versiones de completez, pero aquí sólo nos referiremos a esta.

Así usando un argumento dual al del caso de los números racionales tenemos que *R* es único salvo isomorfismos por ser el objeto final de la categoría $\mathcal{C}$.

En otras palabras hemos sustentado la categoricidad de los números reales, más aún tenemos la inmersión de cualquier otro cuerpo arquimediano totalmente ordenado en ***R*** por ser objeto final de la categoría $\mathcal{C}$.

5.3 Comentarios finales

Este único cuerpo arquimediano universal es el que se captura en la definición de números reales dada por Hilbert. El axioma de completez de Hilbert afirma que la categoría $\mathcal{C}$ tiene un objeto final, y dicho objeto final es ***R***. Con lo cual es inmediato que dado cualquier modelo *M* de los axiomas seleccionados existe una única inmersión de *M* en ***R***. Es decir, se cumple el teorema de inmersión. Además, también es inmediato, que ***R*** es único salvo isomorfismos. O sea que se cumple el teorema de categoricidad[26].

Creemos que al igual que las formalizaciones de Cohen-Goffman ([7], [16]) y Ehrlich [11], hemos mostrado ampliamente nuestra formalización corresponde a una lectura legítima de la completez de Hilbert de 1900, al capturar por medio de la teoría de categorías la condición de maximabilidad a través de la existencia de un objeto final en la categoría introducida.

Dualmente al caso de ***N*** tenemos para ***R*** los teoremas de co-inducción y co-recursión que son utilizados recientemente en algunas investigaciones de ciencias de la computación (Pavlovic-Pratt [28]) y que muy seguramente permitirán en un futuro inmediato una mejor apropiación de los conceptos de límites en ***R***. Aspectos que esperamos desarrollar en nuestras próximas investigaciones.

Esperamos, en un próximo trabajo del grupo de investigación, mostrar que la lectura a través de la teoría de categorías de Hilbert permite exhibir su influencia en la escuela Bourbaki. Presentaremos el paralelo de la completez de Hilbert con la completación hecha por los Bourbaki, de un espacio uniforme asociado a un grupo topológico ordenado, lo que nos permitirá sustentar la cercanía estructural entre la construcción de los números reales por Bourbaki y la axiomatización de Hilbert.

Referencias

[1] Awodey, S. and Reck, E. H., *Completeness and Categoricity, Part I: nineteenth-century axiomatics to Twenty-first-Century metalogic* History and Philosophy of Logic, 23 (2002), 1-30.

[2] Awodey, S. and Reck, E. H., *Completeness and Categoricity, Part II: Twentieth-Century Metalogic to Twenty-first-Century Semantics* History and Philosophy of Logic, 23 (2002), 77-94.

[26] Si se hace el desarrollo completo para el caso de la geometría tendríamos como conclusión que la Geometría Cartesiana $C_2\{\boldsymbol{R}\}$ es el objeto final de la respectiva categoría y por tanto se habría demostrado su categoricidad. Además se tendría la inmersión de las otras geometrías en la geometría cartesiana.

[3] Bernays, P., *Hilbert's investigations of the foundations of arithmetic,* Traducción de *Hilbets Untersuchugen Über de Grundlagen der Arithmetik* (1935) a cargo de D. Schlimm y William B. Ewald, como parte del Bernays Project.
[4] Blyth, T. S., *Lattices and ordered algebraic structures,* Springer-Verlag, 2005
[5] Burris S. y Sankappanavar, H. *A Course In Universal Algebra,* Springer-Verlag, New York, 1981.
[6] Cohen, L. W. and Goffman, C., *The topology of ordered abelian groups,* Transactions of AMS, Vol. 67 (1949), pp. 310-319.
[7] Cohen, L. W. and Goffman, C., *On completeness in the sense of Archimedes,* American Journal of Mathematics, Vol. 72 (Oct., 1950), pp. 747-751.
[8] Da Silva, J.J., *Husserl's two notions of completeness, Husserl and Hilbert on completeness and imaginary elements in mathematics.* Synthese, 125 (2000), 417-438.
[9] Dedekind, R., *Qué son y para qué sirven los números. Y otros escritos sobre los fundamentos de las matemáticas.* Edición e Introducción a cargo de José Ferreirós. Alianza Editorial, Madrid, 1998.
[10] Dugac, P., *Richard Dedekind el les fondements des mathématiques.* Vrin, Paris, 1976.
[11] Ehrlich, P., *From Completeness to Archimedean Completeness: An Essay in the Foundations of Euclidean Geometry,* Synthese, Volume 110, Number 1 (January, 1997), pp. 57-76.
[12] Ehrlich, P., *The Rise of non-Archimedean Mathematics and the Roots of Misconception I: The Emergencing of non-Archimedean System of Magnitudes,* Arch. Hist. Exact Sci. 60 (2006) pp. 1-121.
[13] Ferreirós, J., *Hilbert, logicism, and mathematical existence.* Synthese, 125 (2008), 1-38.
[14] Ferreirós, J., *Labyrinth of Thought.* Segunda Edición Revisada. Birkhäuser Verlag, 2007.
[15] Freyd, P., *Aspects of topoi.* Bull. Autral. Math. Soc., Vol 7 (1972), pp. 1-76.
[16] Goffman, C., *Completeness of the Real Numbers,* Mathematics Magazine, (AMS) Vol. 47, No. 1.(Jan., 1974), pp. 1-8.
[17] Goldblatt, R., *Topoi: the categorical analysis of logic.* Dover, 2006.
[18] Hartino, M.H., *Towards completeness: Husserl on theories of manifolds 1890-1891.* Synthese, 125 (2007), 281-310.
[19] Hilbert, D., *On the concept of number,* in W. Ewald (Ed.), *From Kant to Hilbert,* Volume 2, pp. 1089-95. New York, Oxford University Press. W. Ewald, trans.
[20] Hill, Claire Ortiz, *Husserl's mathematical apprenticeship and philosophy of mathematics,* in Phenomenology world-wide: foundations, expanding dynamisms, life-engagements, A Guide for Research and Study, By Anna-Teresa Tymieniecka, World Phenomenology Institute, USA. Kluwer Academic Publisher 2002.
[21] Hill, Claire Ortiz, *Husserl and Hilbert on completeness,* in From Dedekind to Gödel, Jaakko Hintikka (ed), Dordrecht: Kluwer, 1995.
[22] Hill, Claire Ortiz, *Husserl's Mannigfaltigkeitslehre,* in Husserl Or Frege?: Meaning, Objectivity, and Mathematics, Chicago: Open Court, 2000.
[23] Hrbacek, K. and Jech, T, *Introduction to Set Theory,* Third Edition, Marcer Dekker 1999.

[24] Huntington, E., *A Complete Set of Postulates for the Theory of Absolute Continues Magnitude,* Transaction of the American Mathematical Society, Vol. 3, No. 2 (April 1902), pp. 264-279.
[25] Lawvere, F. W., *An elementary theory of the category of sets.* En: Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, Vol. 52, No 6 (Dec. 15, 1964), pp. 1506-1511.
[26] Michell, J. and Ernst, C., *The axioms of Quantity and the Theory of Measurement,* Translated from Part I of Otto Hölder's German Text "Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass (1901)," Journal of Mathematical Psychology 40, pp. 235-252 (1996).
[27] Michell, J. and Ernst, C., *The axioms of Quantity and the Theory of Measurement,* Translated from Part II of Otto Hölder's German Text "Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass (1901)," Journal of Mathematical Psychology 41, pp. 235-252 (1997).
[28] D. Pavlovic, and V. Pratt, *The continuum as a final coalgebra,* Theoretical Computer Science 280 (2002) 105-122.
[29] Sieg, W. *Relative consistence and accesible domains.* En: *The architecture of modern mathematics*, por J. Ferreirós y J. Gray. Oxford University Press, 2006, pp. 339-368.
[30] Sieg, W. and Schlimm, D., *Dedekin's Analysis of Number: Systems and Axioms,* Synthese 147, (2005), pp. 121-170.
[31] Zalamea, F., *Recursión en categorias,* Revista Colombiana de Matemáticas, Volumen 29 [2] (1995) Páginas 127-144.

Guillermo Ortíz Rico

Grupo de Historia de la Matemáticas. Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Cali-Colombia

E-mail: gortizri@univalle.edu.co

Sergio Iván Valencia Marín

Grupo de Historia de la Matemáticas. Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle, Cali-Colombia

E-mail: lopetebu@yahoo.com.ar