Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 10 nº 20 (outubro/2010-março/2011) - pág.193-211
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

NICOMEDE E OS TRÊS PROBLEMAS CLÁSSICOS GREGOS

Eduardo Sebastiani Ferreira
IMECC-UNICAMP – Brasil

Resumo

Existem três problemas clássicos na matemática grega, que influenciaram enormemente no desenvolvimento da geometria: a quadratura do círculo, a duplicação do cubo e a trissecção de um ângulo. Em algum sentido este último é o menos importante dos três. Certamente na época grega antiga a duplicação do cubo foi o mais famoso e na época moderna a quadratura do círculo ocupou esse lugar, especialmente entre os matemáticos amadores. Minha razão para escrever sobre Nicomede é que ele foi o primeiro matemático grego a apresentar uma solução para os três problemas, evidentemente não com as ferramentas euclidianas (régua e compasso).

Palavras-chave: Três problemas clássicos gregos. Nicomede

Abstract

There are three classical problems in Greek mathematics, which greatly influenced the development of geometry: squaring the circle, doubling the cube and trisection of an angle. In some sense the latter is the least important of the three. Certainly in ancient Greek times doubling the cube was the most famous in modern times to square the circle occupied this place, especially among amateur mathematicians. My reason for writing about Nicomedes is that it was the first Greek mathematician to present a solution to three problems, of course, by Euclidean tools (ruler and compass).

Keywords: The three Greeks classics problems. Nicomede

Introdução

Começarei minha exposição pelo terceiro desses três problemas:

Trissecção de um ângulo

O problema da trissecção de um ângulo arbitrário é um dos que apresentaram maior número de falsas provas. É fácil dizer que uma "prova" foi "mostrada" para certificar que é incorreta a hipótese de que o interceptor de um ângulo arbitrário possa ser construído usando a régua e o compasso. O problema é se é possível. Evidentemente afirmar que uma prova é incorreta e encontrar o erro são duas tarefas diferentes: esta última é quase sempre muito difícil.

Existe um grande número de razões pelas quais o problema da trissecção de um ângulo difere dos outros dois problemas gregos clássicos. Primeiramente ele não tem uma relativa real história considerada fidedigna, que levaria a estudar esse problema. Depois é um problema de um tipo diferente: não podemos quadrar um círculo, nem duplicar um cubo, usando somente régua e compasso; entretanto é possível para certos ângulos achar outro que seja três vezes menor que eles, somente com esses instrumentos. Por exemplo, em um ângulo reto CAB dado, traçamos um círculo de centro em A e raio qualquer, que vai cortar AB em E. Um segundo círculo de mesmo raio é traçado, com centro em E, cuja interseção com o primeiro é o ponto D. Então, DAE é um triângulo eqüilátero; logo o ângulo DAE é 60^0 e o ângulo DAC é 30^0 ;portanto, o ângulo CAB foi trissectado.

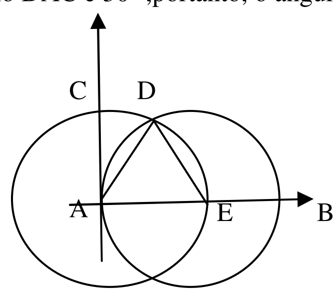


Figura 1

O problema é a trissecção de um ângulo qualquer. Papus escreveu:

> Quando os antigos geômetras procuraram dividir um dado ângulo retilíneo em três partes iguais estavam perdendo tempo. Dizemos que tem três tipos de problemas na geometria, os chamados de problemas "planos", "sólidos" e os "lineares". Os que podem ser resolvidos com retas e círculos são os chamados de problemas planos, porque as linhas usadas na solução estão em um plano. Aqueles problemas são resolvidos por uma ou mais seções cônicas por isso são chamados de problemas "sólidos". Para isto é necessários nas suas construção o uso de superfícies de figuras de sólidos, isto é de cones. Ficando o terceiro tipo chamado de problemas "lineares". Na construção neste caso outras curvas ainda não mencionadas são requisitadas, curvas tendo uma maior variedade em origens específicas em superfícies irregulares e de movimentos complexos. Por isso, as curvas características descobertas no chamado "lugar geométrico" e numeras outras podem ser envolvidas...

> Estas curvas têm muitas propriedades bonitas. Os mais recentes escritores têm de fato considerado algumas delas merecedoras de um tratamento extenso, uma delas foi chamada de “curva paradoxal” por Menelau. Outras curvas do mesmo tipo são as espirais, quadratris, conchóide e cissóide. ...Tais problemas diferem, dessa maneira, da geometria primeira que não era possível resolver que previamente em relação a ângulos, ou por sólidos naturais; elas não eram provenientes de seções cônicas e, por isto, seria uma perda de tempo procurar soluções por estes caminhos. Mais tarde, entretanto, eles trissectavam um ângulo por através de cônicas usando na solução continuada descrita abaixo...(1982)

Descreveremos o método que foi inventado para resolver este problema, mas antes veremos como o problema aparece de maneira natural. Talvez a mais óbvia maneira para chegar ao problema seja examinando uma régua e um compasso na construção da bissecção de um ângulo. Isso é fácil. Dado um ângulo CAB. Em que marcamos comprimentos iguais AB e AC, completando o paralelogramo CABD e traçando a diagonal AD, é fácil ver que ela bissecta o ângulo CAB.

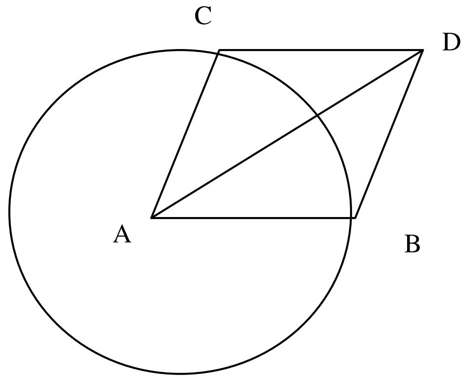


Figura 2

Os antigos gregos esperavam poder dividir ângulos em qualquer razão por ser possível construir um polígono regular com qualquer número de lados. A construção do polígono regular usando régua e compasso era certamente a maior conquista da matemática grega até a descoberta de Gauss que alguns polígonos não eram construtíveis com régua e compasso pelo processo grego.

A construção de polígonos de n lados foi estudada pelos gregos dividindo um círculo em n lados. O problema é chamado de construção de um n-ágono. Os gregos antigos conseguiram construir os n-ágonos usando régua e compasso, processo chamado de euclidiano, para:

n=3,4,5,6,8,10,12,15,16,20.... O primeiro positivo que não aparece na lista é o 7, isto é, a construção do heptágono. Isso foi realizado por Arquimedes (287-212 aC.), mas não pelas ferramentas euclidianas, isto é, não com régua e compasso. Muito tempo depois Gauss (1777-1855) publicou seu teorema:

> "O n-ágono regular pode ser construído pelas ferramentas euclidianas se e somente se, $n=2^r p_1 p_2 ... p_s$, onde $p_1<p_2<...<p_s$ são números primos da forma $p=2^m+1$, onde $r \geq 0$."

Fazendo r=0 e m=3 temo n=9, que não é um número primo, e o 9-ágono (eneágono) não pode ser construído com as ferramentas euclidianas. (Holme,p.: 346)

Embora seja difícil dar uma data precisa de quando o problema da trisseção de um ângulo apareceu pela primeira vez, sabemos que foi Hipócrates (por volta de 430 aC.), quem fez a primeira contribuição aos problemas de quadratura de um círculo e duplicação de um cubo, e também estudou a trissecção de um ângulo. Existiu um esforço muito grande dele para resolver esse problema, pelo que se sabe. O trabalho é o seguinte: dado um ângulo ABC, traçar a perpendicular AC a BC. Completar o retângulo CBF. Estender FA a E, e traçar BE para corta AC em D, tendo escolhido o ponto E tal que AE= 2AB. Então o ângulo EBC é $\frac{1}{3}$ do ângulo ABC.

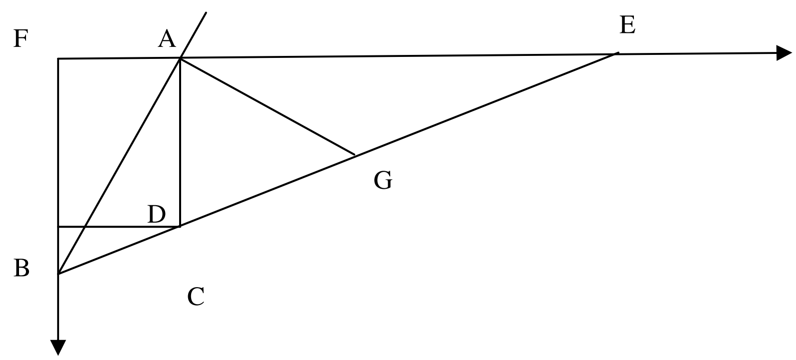


Figura 3

Para ver isso, seja G o ponto médio de DE, logo DG=GE=AG=AB.

Como o ângulo DAE é reto, DE considerado como diâmetro de um semicírculo de centro G, então DG=GE=GA. Agora o ângulo ABG= ângulo AGB=2.ângulo AEG=2.ânguloDBC. Também, FE e BC são paralelos, então ângulo DBC=$\frac{1}{3}$ângulo ABC.

Um dos motivos que o problema da trissecção de um ângulo não atraiu, pela solução acima, os matemáticos gregos antigos, foi que essa construção não é possível com as ferramentas euclidianas. Uma justificativa é que marcar o comprimento 2AC e colocar sobre a reta AE, de maneira que EH tenha tal medida é impossível com régua (não graduada) e compasso. A trissecção tinha sido encontrada por um processo mecânico fácil. Como problema prático foi deixado de lado pelos gregos, pelo interesse deles do ponto de vista da matemática pura. Como disse Platão(427-347 aC.) : "No processo mecânico se perde irremediavelmente o melhor da geometria."

No entanto, existe outro processo mecânico dado por Arquimedes (287-212 aC), cuja construção é a seguinte:

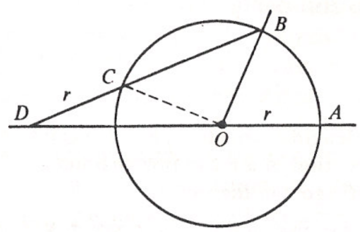


Figura 4

Seja AOB o ângulo dado que vamos dividir em três partes iguais. Traçamos um círculo de raio r e centro O, com AO=BO=r. Por B construímos uma reta BD que corta o círculo em C e o prolongamento de AO em D, de maneira que o comprimento CD = r. Esse é o problema que não podemos construir com régua e compasso. Então, o ângulo CDO é um terço do ângulo AOB. Vamos mostrar essa afirmação: como DC = DO = OB = r, os triângulos DCO e COB são isósceles, logo ângulo ODC = ângulo COD e ângulo OCB = ângulo CBO. Como a medida do ângulo externo de um triângulo é igual á soma das medidas dos dois internos opostos ângulo AOB = ângulo OCD + ângulo CBO = ângulo ODC + ângulo OCB = ângulo ODC + ângulo ODC + ângulo COD = 3 ângulo ODC = 3 ângulo ADB.

Temos então que ângulo ADB = $\frac{1}{3}$ ângulo AOB. Por outro lado se quisermos achar o um terço do ângulo, no próprio ângulo, basta traçar por O uma paralela a reta BD. (Bunt, p.104)

É fácil ver que o problema se resolve por equações cúbicas. Suponhamos que na figura 3, se FA está no eixo do x, FB no do y, FA = a e FB = b, então a solução da trissecção, como mostrado por Papus pela interseção de duas cônicas que em coordenadas são: $xy = ab$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = 4(a^2 + b^2).$$

Da segunda equação podemos escrever:

$$(x+a)(x-3a) = (y+b)(3b-y)$$, e da primeira:

$$\frac{x+a}{y+b} = \frac{a}{y}$$

ou $$(x-3a)y = a(b-3y).$$

Por outro lado, eliminando x das equações:
$a^2(b-3y) = y^2(3b-y)$, desenvolvemos
$y^3 - 3by^2 - 3a^2y + a^2b = 0$. Supondo que o ângulo ABC seja θ, então tg $\theta = \frac{b}{a}$ e supondo que a tangente do ângulo DBC seja t, então $y = at$, sendo y a ordenada do ponto D. Substituindo na equação acima $a^3t^3 - 3ba^2t^2 - 3a^3t + a^2b = 0$, dividindo por a^2 $at^3 - 3bt^2 - 3at + b = 0$, ou $b(1-3t^2) = a(3t-t^3)$. Ora:
$tg\theta = \frac{b}{a} = \frac{3t-t^3}{1-3t^2} = tg\alpha$, onde $\alpha = \frac{1}{3}\theta$. Logo o ângulo DBC trissecta o ângulo ABC. (Heath,1981 p.235,236).

Nicomede, matemático grego (século II AC.), apresentou também uma solução para o problema da trissecção. Para isso construiu uma curva especial que ficou conhecida como Conchoide de Nicomede. Trataremos dessa solução no capítulo dedicado a este matemático.

Quadratura do Círculo

Este problema, como já apontamos no inicio do texto, constitui um dos três problemas clássicos gregos, já tem uma história conhecida. Ele aparece pela primeira vez no papiro de Rhind, que foi escrito pelo escriba Ahmes por volta de 1650 aC. e que era cópia de um antigo documento de 200 anos antes. Nesse papiro, os problemas que tratam da quadratura do círculo são: 41, 42, 43, 48 e50. A solução apresentada era considerar como lado do quadrado $\frac{8}{9}$ do diâmetro do círculo. Supondo um círculo de raio 1, então sua área seria π, e o quadrado teria área $\left(2-\frac{2}{9}\right)^2 = \frac{256}{81} \cong 3{,}1605$, que é uma boa aproximação para o π. O problema grego de quadratura do círculo é o de construir um quadrado que tenha a mesma área de um círculo dado, com as ferramentas euclidianas. Na classificação de Papus era um problema "linear", ou seja, que faz uso de construção de curvas especiais.

O primeiro matemático grego que apresentou uma solução foi Anaxágoras (499-428 aC), foi considerado por Papus o maior filósofo grego que viveu por volta de 450 aC. Não conhecemos a construção de Anaxágoras, mas o que se tem é o que escreveu Plutarco que ele se ocupou desse problema quando estava preso. Em 1964, Gershenson e Greenber questionaram tal afirmação no livro: "*Anaxagoras and the birth of Physics*" publicado pela Baisdell, N.Y. Por outro lado, os pitagóricos disseram ter sido resolvido o problema por Sextus, o que também foi facilmente refutado, pois, no período em que Sextus viveu não poderia ter frequentado a escola de Pitágoras.

O primeiro tratado que temos da tentativa de quadratura de um círculo é do século V aC, em que Aristófanes escreveu que Meton resolveu o problema, o que também é contestado por Heath (1081,p.220). No entanto, Hipócrates de Chios ($\sim$470-$\sim$410 aC) foi o primeiro matemático grego que deixou sinais de suas tentativas de quadrar um círculo. Esse autor conseguiu quadrar certas luas, isto é achar a área de figuras de lados circulares, mas infelizmente não foi capaz de achar a quadratura de um círculo. É importante citar Hipias($\sim 460 - \sim 400$aC) e Dinostratus($\sim 390 - \sim 320$ aC) que construíram a famosa curva "quadratriz", que foi mais tarde usada por Nicomede para a solução desse problema. Veremos o processo no capítulo dedicado a este matemático.

Vejamos agora a contribuição de Arquimedes (287-212 aC.) para esse problema. Ele usou a espiral que leva seu nome para encontrar a solução. Vale notar que Arquimedes também resolveu o problema da trisseção usando essa curva. Sua definição para esta curva é mecânica: duas semiretas com o mesmo ponto fixo, uma permanece fixa e outra gira ao redor desta origem. Nesta segunda um ponto percorre o seu comprimento, ambos os movimentos uniformes. O ponto percorrido por essa segunda semireta descreve a curva chamada de Espiral de Arquimedes.

Sua equação em coordenadas polar é: $\rho = a\theta$. Sendo o ponto fixo O, encontramos P o ponto da curva que completou uma volta. Nesse ponto traçamos sua tangente, que corta a perpendicular OP em T. Arquimedes provou que OT é o comprimento da circunferência do círculo de raio OP. Isso, é claro, não mostra como

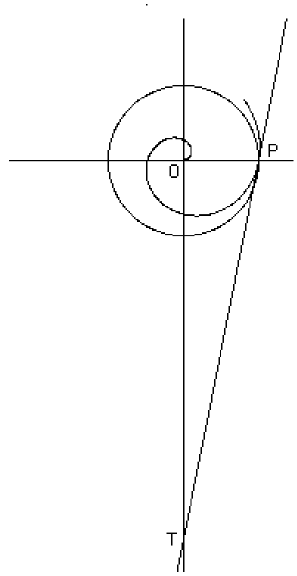


Figura 5

achar a quadratura do círculo, mas ele já tinha mostrado que a área de um círculo é igual á área de um triângulo retângulo cujo cateto menor é igual ao raio e o maior é igual ao comprimento da circunferência, isto é, a área da circunferência de centro O e raio OP é igual à área do triângulo OPT. Agora é fácil mostrar como achar a área de um quadrado que seja igual à de um triângulo. A área do triângulo é $\frac{1}{2}$ OT.OP, se h é a média geométrica entre $\frac{1}{2}$ OT e OP, isto é, $h^2 = \frac{1}{2}$OT.OP, então h é o lado do quadrado.

A demonstração de que OT é a circunferência do círculo de centro O e raio OP é a seguinte: um ponto de coordenadas (x, y), onde o eixo x é a reta OP e y a ortogonal, tem como expressão como parâmetros polares θ *e* r o ângulo de rotação e o raio:

$$x = \frac{r}{2\pi}\theta cos(\theta) \; ; \; y = \frac{r}{2\pi}\theta sen(\theta)$$

Suas diferenciais em relação a θ:

$$dx = \frac{r}{2\pi}\left(-\theta sen(\theta) + cos(\theta)\right)d\theta \; ; dy = \frac{r}{2\pi}\left(\theta cos(\theta) + sen(\theta)\right)d\theta.$$

A inclinação da tangente será: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{r}{2\pi}\left(\theta cos(\theta) + sen(\theta)\right)d\theta}{\frac{r}{2\pi}\left(-\theta sen(\theta) + cos(\theta)\right)d\theta}$, no ponto $\theta = 2\pi$ temos $[\frac{dy}{dx}]_{\theta=2\pi} = 2\pi$. Então a equação da tangente nesse ponto será: $y = 2\pi(x - r)$, para o ponto T (0, $2\pi(-r)$); logo o comprimento do segmento OT será $2\pi r$. (Holme, p.89)

Podemos ainda citar na história da Matemática antiga os nomes de Papus e Carpus, que usaram curvas mecânicas para resolver o problema. O primeiro usou a curva "Iamblicus", assim denominada por ele, e que ele escreveu ser uma "irmã da cicloide", mas até hoje não se sabe que curva é. Por outro lado, Carpus usou o que chamou de "curva de duplo movimento", também desconhecida, que para alguns historiadores seria a cicloide.

Na China temos o nome de Liu Hsiao que trabalhou com esse problema, por volta de 25 dC. Na mesma época, os árabes , como AL-Haytham também estudaram o problema da quadratura.

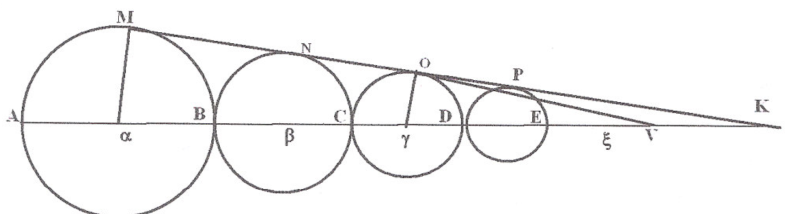
Já em 1050, na Bélgica o matemático Franco de Liège escreveu o livro "*De quadratura circuli"*, em que faz uma aproximação para o π para $\frac{22}{7} \cong 3{,}142857 \ldots$ No ano de 1450, o astrônomo alemão Nicholas de Cusa (1401-1464) argumentou que um círculo poderia ser quadrado construindo-se polígonos inscritos com o número de lados cada vez maior e foi Regiomantanus(1435-1476) quem mostrou o erro de Cusa.

Regiomantanus fez renascer na Europa o fascínio pelo problema e pelas curvas mecânicas. Oronce Fine (1494-1555) um astrônomo e matemático francês na segunda parte de seu livro de astronomia "*Protomathesis"*, dedica-se á quadratura do círculo, mais precisamente numa melhor aproximação do $\pi = \frac{22}{7}$. Suas aproximações eram as seguintes:

$\pi = \frac{22}{7}$	3,142857	1530
$\pi = \frac{22 + \frac{2}{9}}{7}$	3,17460	1544
$\pi = \frac{47}{15}$	3,13333	Logo depois de 1544
$\pi - 3 + \frac{11}{78}$	3,14103	1556, no livro "*De rebus mathematicis"*

Esta última aproximação de Fine foi contestada pelo matemático português Pedro Nunes Salaciense (1502-1578).

Porém, com o advento do cálculo novas provas apareceram; por exemplo, Gregory Saint-Vincent (1584-1667), matemático belga em 1647 escreveu o livro "*Quadraturae circuli"*, que fez um grande sucesso e, dizem alguns historiadores, foi o precursor da integração. Saint-Vincent pretendeu mostrar a quadratura usando o que denominou de "sequência de progressão geométrica", que era uma soma infinitamente geométrica produzindo áreas de superfícies planas. Prova que foi contestada posteriormente (St. Vincent, p. 258).



Prop.134. Fig. 1.

Por outro lado, James Gregory desenvolveu uma prova usando uma sequência infinita convergente, e a idéia de sequência de áreas de polígonos inscritos. Sua prova essencialmente se apóia na conjectura de que π é um número transcendente, isto é, não é raiz de uma equação polinomial de coeficientes racionais, contradizendo o matemático Huygens que achava π era um número algébrico.

O maior feito nesse estudo veio em 1761 com Lambert (1728-1777). Seu argumento mostrou que, se x for racional não nulo então $tg\ x$ não pode ser racional. Como $tg\frac{\pi}{4} = 1$ é racional, então $\frac{\pi}{4}$ não pode ser racional, nem π. (Boyer, p.340)

Isso, entretanto, não resolvia o problema de que um círculo não poderia ser quadrado com régua e compasso, pois certos números algébricos podem ser construídos com ferramentas euclidianas.

De Morgan (1806-1871) em seu livro *Budget of Paradoxes*, publicado depois de sua morte em 1872, e repleto de histórias interessantes de tentativas de solução deste problema, declara a “morte da quadratura do círculo”.

Finalmente a solução para o problema da impossibilidade da quadratura de um círculo pelas ferramentas euclidianas foi provada por Lindemann(1852-1939) em 1880, mostrando que π é um número transcendente, ou seja, não é raiz de nenhum polinômio de coeficientes racionais. Ele provou em primeiro lugar que a equação $e^{ix}+1=0$ não podia ser satisfeita para um x algébrico e como Euler(1707-1783) já havia provado que π era solução desta equação, então ele era transcendente. Com essa prova, chega-se à conclusão da impossibilidade da quadratura do círculo com régua e compasso.

Não podemos deixar de citar o genial matemático hindu Srinivasa Aiyangar Ramanujan, que em 1914 escreveu o artigo “*Approximate geometrical constructions for* π” publicado no Quarterly Journal of Mathematics (1914,p.350-374), onde ele usa como aproximação para $\pi \cong (9^2+\frac{19^2}{22})^{\frac{1}{4}}$, que é uma aproximação até a décima nona casa decimal.

Duplicação do Cubo

Não vou escrever aqui sobre esse problema, mas não gostaria de desmerecê-lo. Ele para mim é tão importante quanto os outros, ou talvez mais, pois já escrevi um artigo só com sua história e quase todas as soluções para ele que apareceram na História da Matemática.

Ocupo-me, a seguir, da figura de Nicomede e do relato de seus feitos.

Nicomede

Decidi reservar uma seção deste texto para esse autor, de quem pouco se sabe, mas que viveu no século II AC. e conseguiu resolver os três problemas aqui abordados através de curvas mecânicas.

Praticamente não sabemos nada de sua vida ($\approx 280 - \approx 210\ aC$). Era um geômetra que viveu em uma época posterior a Eratóstenes de Cirene (por volta de 276-194 aC.), pois segundo Eutócius,que escreveu sobre Arquimedes em 560 aproximadamente, ele critica a solução de Eratóstenes. Por outro lado, Proclus(-485), no seu livro *Comment. in Euclid*.,livro 3, pro. 9, prob. 4 assegura-nos que foi Nicomede o inventor das conchoides, sobre as quais Geminus, contemporâneo de Hiparco, escreveu longamente no seu tratado “*Enarrationes Geometricae*. Essas circunstâncias levam-nos a fixar a vida de Nicomede, entre Eratóstentes e Hiparco, ou seja por volta de 180 a.C..(Montucla,1831, p. 232).

Vamos descrever como construir a famosa curva que recebe o nome de Conchoide de Nicomede, como ele a definiu:

Dados uma reta XY e um ponto fixo A, não sobre a reta, e um valor fixado b. Um ponto E qualquer da conchoide tem uma propriedade que, se ligarmos E a A, essa reta corta XY no ponto D, com a condição de que DE=b. Então, girando uma semireta fixada em A, a conchoide é descrita como a curva que vai dos pontos dessa semirreta de comprimento b até o eixo XY.

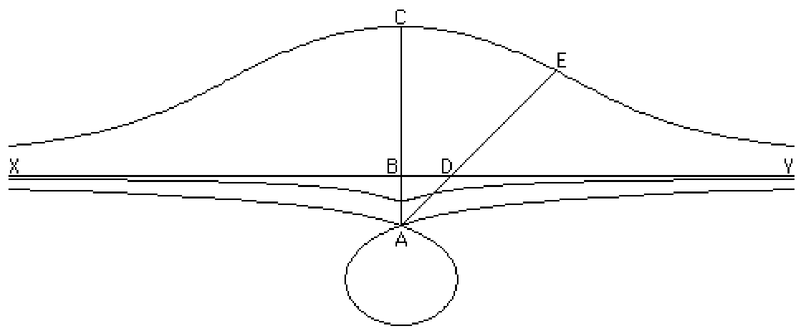


Figura 6

Esta é o que Papus chamou de primeira conchoide,; ele afirma que existem outras formas de conchoides pela construção, que podemos descrever pela parte inferior do eixo XY, isto é, tomando sobre a mesma reta AE, agora com a distância fixa b do eixo até o ponto abaixo do eixo. Esses três tipos vão depender da distância do polo (ponto fixo A) ao eixo, se é menor, igual ou maior que b.

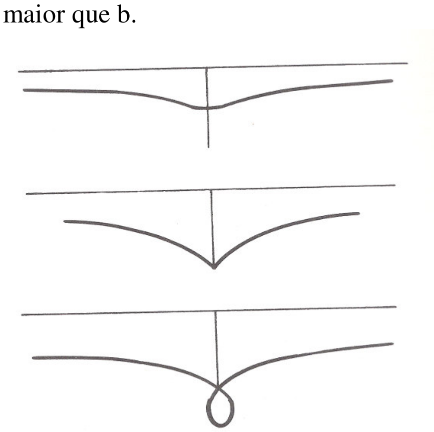


Figura 7 (Knorr,1986 p. 220)

Pode-se traçar a conchoide por um dispositivo mecânico: seja uma régua Ab com uma abertura central ao longo de seu comprimento; uma segunda régua FE, perpendicular à primeira, que é fixada a esta no polo C; uma terceira régua PC de ponta P e também com uma abertura ao longo de seu comprimento: e com um ajuste no pólo C. Chama-se de D o polo fixado em PC que se move ao longo da abertura da régua AB. Fazendo a régua PC mover-se com seu pólo D ao longo da abertura de AB, a extremidade P descreve a conchoide.

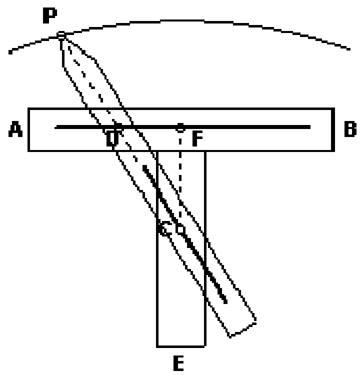


Figura 8 (Heath, p. 239)

Nicomede usou sua conchoide para resolver dois problemas clássicos: a trissecção de um ângulo e a duplicação do cubo. Para o terceiro problema, quadratura do círculo, Nicomede usou outra curva mecânica, a quadratriz de Hípias , que descreveremos depois.

Vamos, primeiramente, mostrar como Nicomede resolve o problema da trissecção com a conchoide:

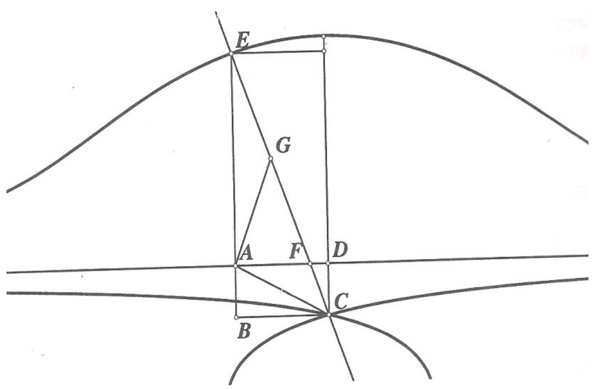
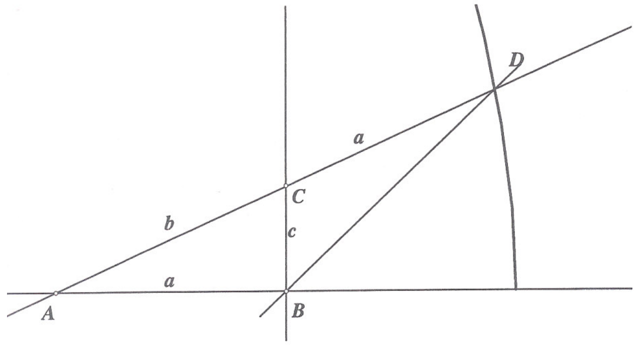


Figura 9

É evidente que basta mostrar para um ângulo menor que o de noventa graus, pois para este a construção é possível pelas ferramentas euclidianas. Seja, então, o ângulo *u* formado pela diagonal e um lado do retângulo ABCD, ou seja, $u = \hat{a}ngulo\ ACD$. Seja a reta *l,* que contém DA, o eixo da uma conchoide, de polo C e distância fixa *b*= 2AC. Achamos o ponto E interseção da conchoide com a reta que passa por AB. A reta CE vai interceptar AD no ponto F. Denotamos como G o ponto médio de EF, logo

EG=GF=AG=AC. Chamando de v o ângulo CEA , temos que ângulo AGF = 2v =ângulo ACG; logo $v+2v=3v$=ângulo ACD=u.

Vejamos agora como Nicomede resolveu a duplicação do cubo usando a conchoide:



Seja um cubo de lado a, em que colocamos a =AB. De B traçamos uma perpendicular e uma reta que faça 120^0 com AB. A reta perpendicular por B será tomada com eixo da conchoide, a é o valor fixado e A o polo. Encontramos o ponto D, interseção do lado ao ângulo de 120^0 com a conchoide . Pela definição da curva CD = a , sejam AC =b e BC=c.Chamando de $\varphi = \hat{a}ngulo\ ADB$, vamos ter que $\frac{a}{sen30^0} = \frac{c}{sen\varphi}$, e $\frac{a}{sen\varphi} = \frac{a+b}{sen120^0}$. Disto podemos escrever que $\frac{c}{a} = \sqrt{3}\frac{a}{a+b}$, ou ainda $\sqrt{3} = \frac{c(a+b)}{a^2}$. Elevando ao quadrado $3a^4 = c^2(a+b)^2 = (b^2-a^2)(a+b)^2$. Desenvolvendo $3a^4 - b^4 - a^4 + 2ab^3 - 2a^3b$, logo $2a^3(2a+b) = b^3(2a+b)$, isto é $2a^3 = b^3$. (Home, 2002, ps.98-99)

Vamos mostrar como Nicomede resolveu a quadratura do círculo. Para essa solução ele não usou sua conchoide, mas a curva quadratriz de Hípias, que também é uma curva mecânica.

Hipias de Elis nasceu por volta de 460 aC e morreu por volta 400 aC. É considerado filósofo e trabalhou em várias cidades, ganhando pelos seus serviços. Deu aulas de poesia, gramática, história, política, arqueologia, matemática e astronomia. Platão descreu dele por ser vaidoso e autoelogiar-se, entretanto, tinha pouco conhecimento. Seu feito matemático foi a construção da quadratriz, que utilizou no problema da trissecção. Segundo Papus quem fez uso dessa curva para quadratura do círculo foram Nicomede e Dinostratu.(Papus,1982. p.191)

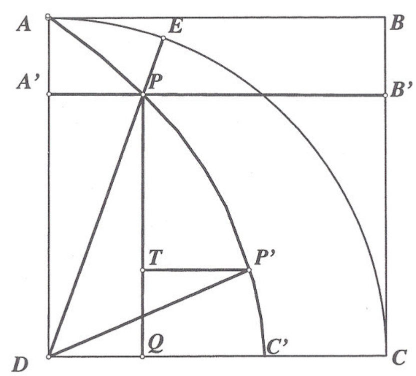


Figura 10

A quadratiz de Hípias é construída da seguinte maneira: primeiramente construímos um quadrado ABCD, em D; como centro, traçamos um quarto de círculo de raio AD, até C. Em seguida, fazemos um ponto E mover-se ao longo do arco com velocidade uniforme e, ao mesmo tempo, A' move-se ao longo do lado AD, também com velocidade uniforme; deve chegar em D ao mesmo tempo que E chega em C. Seja o ponto P a interseção entre a reta DE e A'B'. Então, o ponto P descreve a curva denominada de quadratiz.

Temos que $\frac{\hat{a}ngulo\ EDC}{\hat{a}ngulo\ ADC} = \frac{A'D}{AD}$, logo $\hat{a}ngulo\ EDC = \frac{A'D}{AD}\frac{\pi}{2}$.

Por outro lado, $\frac{DC}{DC'} = \frac{\pi}{2}$, isso vem do fato que: chamando $\frac{A'D}{AD} = x$, então $\hat{a}nguloEDC = \frac{\pi}{2}x$, logo $\frac{DQ}{DC} = \frac{DA'}{DC}\frac{DQ}{DA'} = x\ cotg(\frac{\pi}{2}x)$. De onde tiramos a igualdade $\frac{DC}{DQ} = \frac{tg(\frac{\pi}{2}x)}{x}$, fazendo o $\lim_{x\to 0}\frac{tg(\frac{\pi}{2}x)}{x}$, isto é quando $Q \to C'$,e aplicando a regra de L'Hôpital: $\frac{DC}{DC'} = \frac{\pi}{2}$, como queríamos.

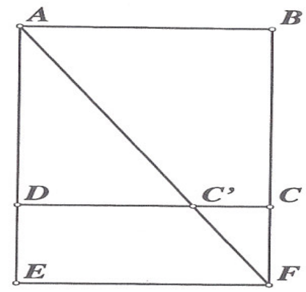


figura 11

Para completar a quadratura do círculo, construímos o retângulo ABEF, com a diagonal AF. Temos então$\frac{DC}{DC'} = \frac{EF}{DC'} = \frac{AE}{AD} = \frac{\pi}{2}$. Logo $2AE.AD = \pi AD^2$, ou seja o círculo de raio AD tem a mesma área do retângulo 2AE.AD, e a média geométrica entre 2AE e AD nos dá o lado do quadrado cuja área é igual a do círculo de raio AD.(Home,2002, ps.100-101).

É importante destacar que a maneira como Hípias trissectou um ângulo pela sua quadratiz foi a seguinte:

> Seja o ângulo EDC=*u*, que pretendemos trissectar. Dividimos o comprimento PQ em três partes iguais, sendo T o ponto da última parte. Por T traçamos a paralela DC que vai encontrar a quadratiz no ponto P'; então ângulo P'DC= $\frac{1}{3}u$.

Vejamos agora a demonstração de Papus para a quadratura do círculo(Papus,1982, p.194 e seguintes), que provavelmente é a de Nicomede.

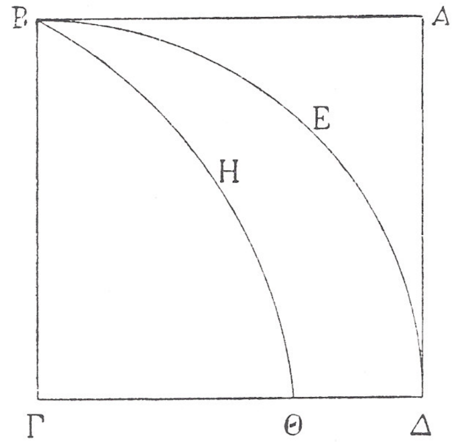


Figura 12

Proposição 26: Sejam o quadrado AB$\Gamma\Delta$, o arco BEΔ descrito ao redor do centro Γ e a quadratriz BHΘ. Temos que $\frac{B\Gamma}{\Gamma\Theta} = \frac{arco\,\Delta EB}{B\Gamma}$. (Isto é, o comprimento do arco de um quarto de circunferência de círculo é a terceira proporcional entre $B\Gamma$ e $\Gamma\Theta$, ou a quarta proporcional entre $\Gamma\Theta, B\Gamma\ e\ B\Gamma$).

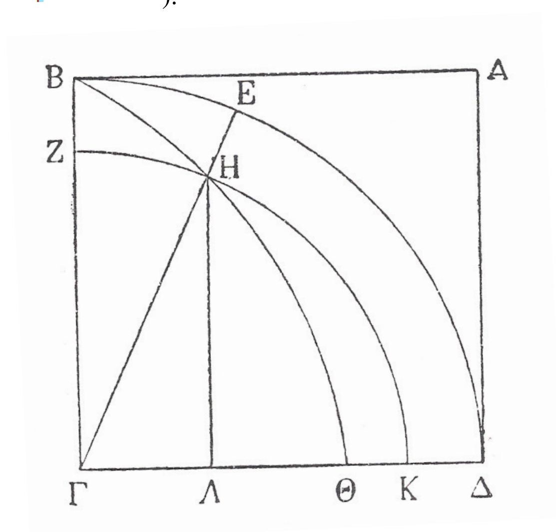


Figura 13

A demonstração apresentada por Papus é por redução ao absurdo. Suponha que exista um ponto K no segmentoΓΔ, com a propriedade de que $\Gamma K > \Gamma\Theta$ e que satisfaça a proporção $\frac{B\Gamma}{\Gamma K} = \frac{arco\ \Delta EB}{B\Gamma}$. Seja o arco de círculo de centro Γ e raio ΓK, que vai cortar a quadratiz em H e o lado do quadrado BΓ em Z. Traçamos a perpendicular HΛ ao lado ΓΔ e a reta ΓH que prolongada, corta o arco BΔ e m E. Como $\frac{B\Gamma = \Gamma\ \Delta}{\Gamma K} = \frac{arco\ \Delta EB}{B\Gamma}$ (*) e, por Euclides, $\frac{arco\ BE\Delta}{arco\ ZHK} = \frac{\Gamma\ \Delta}{\Gamma K}$ (**), obtemos que $arco\ ZHK = a\ semi\ reta\ \mathrm{B\Gamma}$. Pela definição da quadratriz $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{H\Lambda} = \frac{arco\ \Delta EB}{arco\ E\Delta} = \frac{arcoZHK}{arco\ HK}$, como já mostramos que $arco\ ZHK = a\ semi\ reta\ \mathrm{B\Gamma}$, podemos concluir que $arco\ HK = H\Lambda$, que é absurdo.

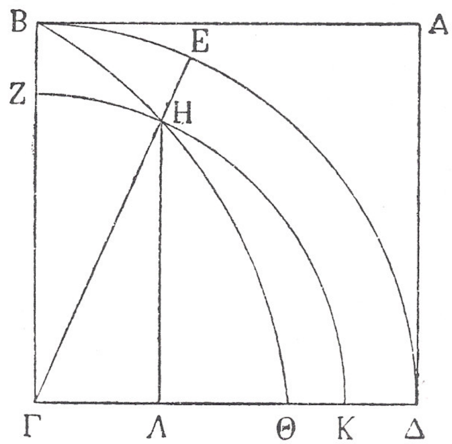


Figura 14

Vamos supor agora que K é tal que $\Gamma K < \Gamma\Theta$, ou seja $\frac{B\Gamma}{K\Gamma < \Gamma\Theta} = \frac{arcoBE\Delta}{B\Gamma}$.
Se isso fosse possível, construiríamos o arco ZMK em redor do ponto Γ como centro e o raio ΓK, traçaríamos uma perpendicular a ΓΔ pelo ponto K. Ela iria cortar a quadratriz em H. Seja a reta ΓH que, prolongada iria encontrar o arco BEΔ no ponto E. Pelo mesmo raciocínio anterior demonstramos que arco ZMK = BΓ e a proporção $\frac{B\Gamma}{K\Gamma} = \frac{arcoBE\Delta}{B\Gamma} = \frac{arcoZMK}{arco\ MK}$.. Disso podemos concluir que arco MK=HK, o que é absurdo.
Como ΓK não pode ser nem menor, nem maior que ΓΘ, necessariamente será igual. Em consequência a reta BΓ está para a reta ΓΘ, assim como o arco BEΔ está para a reta BΓ. Logo a terceira proporcional entre as retas ΘΓ e ΓB será o comprimento do arco BEΔ, que é um quarto da circunferência do círculo de centro Γ e raio BΓ.

Proposição 27 – Ora a reta igual à circunferência de círculo foi encontrada e com isso construímos facilmente um quadrado de área igual à área do círculo.
De fato, o retângulo compreendido pelo perímetro do círculo e o raio é o dobro da área do círculo como demonstrou Arquimedes. Esta afirmação de Papus que não deve ser o argumento de Nicomede, pois Arquimedes é posterior a ele; entretanto ele consegue encontrar uma medida linear par o quarto de círculo. Com isso é fácil construir a quadratura do círculo, usando a média geométrica entre dois arcos BEΔ e BΓ.

A construção euclidiana da terceira proporcional é a seguinte: traçamos uma semireta A E e marcamos os pontos de comprimentos ΓΘ e BΓ. Em outra semireta AH, fazendo um ângulo qualquer com a primeira, marcamos o comprimento BΓ. Ligando o final do comprimento ΓΘ, da primeira como final do comprimento BΓ da segunda e, com uma paralela a essa, uma semireta do final de BΓ da primeira encontramos um ponto na segunda, tal que o comprimento encontrado nesta é igual ao arco BEΔ.

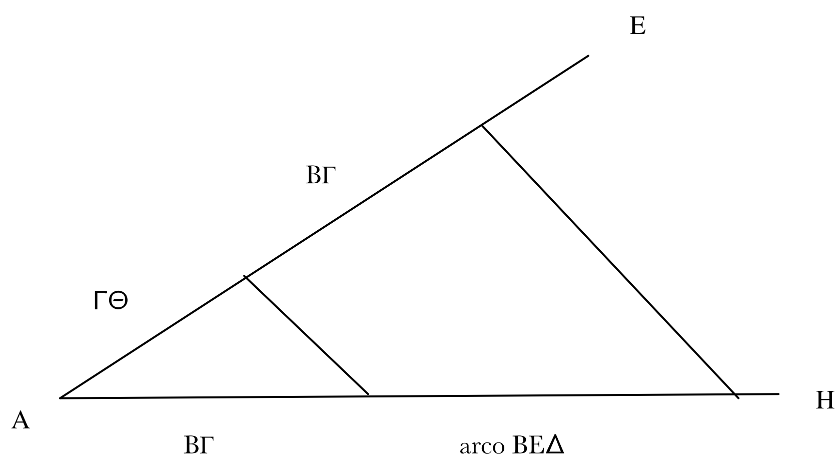


Figura 15

Conclusão

Assim temos que, para mim, o primeiro matemático grego que resolveu os três problemas clássicos foi Nicomede no século II a.C..
Um ótimo trabalho sobre a conchoide de Nicomede foi realizado por Antonio Remi Kieling Hoffmann, na sua dissertação de mestrado, defendida no IMECC-UNICAMP-2008, sob a orientação da prof[a]. Sueli Costa.

Bibliografia

BOYER, C. - *História da Matemática* – trad: Elza Gomide. 1974, São Paulo, Edgard Blücher

BUNT, L. ; Jones, P.; Bedient, J. – *The History roots of Elementary Mathematics.* 1988-Dover - NY

HEATH, T. – *A History of Greek Mathematics* – Vol I –1981-Dover- NY

HOME, A. – *Geometry: our cultural heritage* – 2002- Springer- NY

KNORR, W. R. – *The ancient tradition of geometric problems* – 1986-Dover- NY

MONTUCLA – *Histoire dês recherches sur la quadrature du clercle* – 1831-Bachelier-Paris

PROCLUS DE LYCIE – *Les commentaries sur le premier livre des Éléments d´Euclide*-1948- Desclée de Brrouwer - Bruges

PAPPU D'ALEXANDRIE – *La collection mathématique* – tom. I – 1982- Blanchard – Paris

SEBASTIANI FERREIRA, E.- A duplicação do cubo: como usá-la em salada aula de Matemática. *Cadernos CEDES*, v. 40, p. 18-28, 1996.

ST.VINCENT, GREGORY – *Opus Geometricum Quadraturae Circuli* – Book II, PartIII-trad: Ian Bruce- http://www.17centurymaths.com

http://www.ime.usp.br/~leo/imatica/historia/

http://www-histoy.mcs.st-and.ac.uk

Eduardo Sebastiani Ferreira

IMECC - UNICAMP

E-mail: esebastiani@uol.com.br