

UMA NOTA SOBRE A TEORIA DOS GRUPOS: DA TEORIA DE GALOIS À TEORIA DE GAUGE

Josiney A. Souza
Universidade Estadual de Maringá – UEM – Brasil

(aceito para publicação em fevereiro de 2012)

Resumo

Neste artigo apresentamos um breve relato histórico sobre a teoria dos grupos. Sintetizamos a evolução do conceito de grupo a partir de sua origem, com os grupos de Galois, direcionando os fatos até os modernos grupos de calibre da teoria de Gauge. Nessa transição, enfatizamos o conceito de grupo de laços, destacando sua importância nas diversas áreas da Ciência. Este informativo é nossa principal contribuição acadêmica, tendo em vista a escassez de literatura em língua portuguesa sobre a teoria de grupos de laços.

Palavras-chave: Teoria dos grupos, Grupo de laços, Teoria de Galois, Teoria de Gauge.

[A NOTE ON THE THEORY OF GROUPS: GALOIS THEORY TO GAUGE THEORY]

Abstract

In this paper we present a historical description of the group theory. We summarize the evolution of the concept of group from the Galois theory to the Gauge theory. We emphasize the notion of loop group, displaying its relevance to the Science. This is our main contribution, since there is a lack of lecture on loop group in Portuguese language.

Keywords: Group theory, Loop group, Galois theory, Gauge theory.

Introdução

O conceito de grupos é uma das ferramentas mais utilizadas na Matemática Moderna. Dentre as diversas áreas da Ciência nas quais este conceito é fundamental estão incluídas a teoria quântica de campos, as estruturas atômica e molecular, e a cristalografia, além do

próprio estudo da álgebra abstrata, onde tal conceito é utilizado para a construção de outras estruturas algébricas, como anéis, corpos, e espaços vetoriais, uma vez que estes podem ser vistos como grupos dotados de operações e axiomas adicionais.

A teoria dos grupos tem sua origem no trabalho do matemático francês Évariste Galois (1811-1832) sobre a solubilidade por radicais de equações polinomiais. Outros matemáticos, dentre eles o suíço Leonard Euler (1707-1783), o alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), o francês Joseph Louis Lagrange (1736-1813), o norueguês Niels Henrik Abel (1802-1829), e o italiano Paolo Ruffini (1765-1822), também colaboraram para o crescimento desta área, com contribuições na teoria das equações algébricas, na teoria de números e na geometria.

O britânico Arthur Cayley (1821-1895) foi quem primeiro definiu o conceito moderno de grupo, a quem é atribuído o célebre dito: "Um grupo é definido por meio de leis que combinam seus elementos". Porém, tal conceito não ganhou real aceitação até as apresentações do alemão Walther Franz Anton von Dyck (1856-1934) em 1882. O estímulo para estudar grupos de dimensão infinita veio da geometria e topologia por influência do alemão Felix Klein (1840-1925), do norueguês Marius Sophus Lie (1842-1899), do francês Henri Poincaré (1854-1912), do alemão Max Dehn (1878-1952) e do também norueguês Peter Ludwig Mejdell Sylow (1832-1918). Nesta época, o estudo dos grupos assumiu sua forma abstrata independente e se desenvolveu muito rapidamente.

A primeira grande fase da teoria dos grupos finitos atingiu o seu ápice no período imediatamente antes da Primeira Guerra Mundial com os trabalhos do alemão Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917), do inglês William Burnside (1852-1927) e do bielorrusso Issai Schur (1875-1936). Depois de 1928, novas e decisivas contribuições foram feitas pelo também inglês Philip Hall (1904-1982), pelo alemão Helmut Wielandt (1910-2001) e, no campo de representações de grupos, pelo também alemão Richard Dagobert Brauer (1901-1977). A classificação foi completada em 1982 com a participação de centenas de matemáticos, liderados pelo norte-americano Daniel Gorenstein (1923-1992).

Atualmente, a teoria dos grupos está dividida em diversas subáreas e os interesses são muitos. Vários problemas têm sido atacados e solucionados, destacando o nome de muitos outros matemáticos e físicos. Um dos conceitos mais modernos da teoria, o qual tem sido intensiva e extensivamente estudado, é o conceito de grupo de laços, um tipo especial entre os grupos de calibre da teoria de Gauge. Este artigo tem como principal objetivo divulgar a teoria dos grupos de laços na literatura de língua portuguesa, contribuindo com um rico referencial bibliográfico, visando à motivação e orientação de estudantes e pesquisadores interessados no assunto.

A teoria de Galois e sua expansão

Buscando descrever as simetrias de equações satisfeitas pelas soluções de uma equação polinomial, Évariste Galois (1811-1832) deu origem à teoria dos grupos. Em 1832, por meio de uma carta escrita ao seu amigo Auguste Chevalier, Galois esboçou o seu famoso trabalho sobre solubilidade por radicais, introduzindo o conceito de grupo solúvel. O problema consistia em mostrar que uma equação polinomial admite solução por radicais se seu grupo é solúvel (cf. GALOIS, 1897; STEWART, 1973; TIGNOL, 1988). Embora

não tendo esse trabalho reconhecido em vida, devido a sua morte precoce no mesmo ano em que o escreveu, suas descobertas foram publicadas mais tarde por Chevalier em *Revue Encyclopédique*. Outras memórias e manuscritos de Galois foram publicados por Joseph Liouville (1809-1882) em 1846 em seu *Journal de Mathématique*, e por Camille Jordan (1838-1902) em 1870 em seu livro *Traité des Substitutions*. Tais trabalhos ajudaram a substanciar e divulgar a teoria de Galois. O subsequente interesse por essa teoria ocasionou o surgimento da teoria geral dos grupos, cuja expansão resultou nas assim chamadas estruturas algébricas, atribuindo-se ao conceito de grupo um papel fundamental e proeminente na álgebra abstrata. Os grupos abelianos, em homenagem a Niels Abel (1802-1829), são casos especiais de grupos solúveis, que apesar de serem muito específicos estão presentes em várias estruturas fundamentais da álgebra comutativa tais como anéis, corpos, módulos e espaços vetoriais (cf. ROTMAN, 1976).



Figura 1: Évariste Galois

As pesquisas em teoria dos grupos foram levadas adiante por Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) e outros que se sucederam. Dessas pesquisas surgiu a definição moderna do conceito de grupo, dada por Arthur Cayley (1821-1895) (1854). Um grupo é um conjunto não vazio G munido de uma operação binária $\mu: G \times G \rightarrow G$, denotada por $\mu(a, b) = a * b$, a qual satisfaz as seguintes propriedades:

- (1) [associativa] $(a * b) * c = a * (b * c)$, quaisquer que sejam os elementos a, b, c de G ;
- (2) [elemento neutro] Existe um elemento e em G tal que $e * a = a$, para todo elemento $a \in G$;
- (3) [elemento inverso] Para todo $a \in G$, existe um elemento b em G com $b * a = e$.

Após a definição moderna do conceito de grupo a teoria dos grupos se desenvolveu rapidamente, e foi tão influente que sua expansão rompeu os limites da Álgebra. Grupos aparecem em todas as partes da Matemática e são usados nas ciências em geral para determinar a simetria interna de uma estrutura na forma de automorfismos de grupo. Uma simetria interna está normalmente associada com alguma propriedade invariante, e o conjunto de transformações que preserva este invariante forma um grupo, assim chamado grupo de simetria. Na área da Matemática chamada topologia algébrica, grupos são usados para descrever os invariantes de espaços topológicos. Tais grupos incluem o grupo fundamental, o grupo de homologia e o grupo de cohomologia (cf. BREDON, 1997; LIMA, 2006; SPANIER, 1966). A noção de grupo veio a alcançar um grande papel codificador em geometria e em análise combinatória, outro ramo da Matemática. Os conceitos de grupo de permutação e de ação de um grupo são frequentemente utilizados para

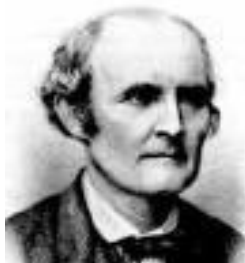


Figura 2: Arthur Cayley

simplificar a contagem de um conjunto de objetos. Os grupos algébricos lineares e os grupos de Lie compõem dois ramos da teoria dos grupos que tiveram enormes avanços, sendo assim considerados como submatérias de maior importância (cf. BOREL, 1969; CEVALLEY, 1946 e 1951).

Em outras ciências como a Física e a Química, os grupos estão intimamente relacionados com a teoria de representação. Em Física, o interesse maior está na representação de grupos de Lie que podem descrever as simetrias que as leis físicas devem obedecer em certos sistemas. Nesse contexto, estão inseridos os grupos de calibre da teoria de Gauge, sobre os quais escreveremos adiante. Em Química, grupos são utilizados para classificar estruturas cristalinas e as simetrias das moléculas (cf. ROSENTHAL-MURPHY, 1936).

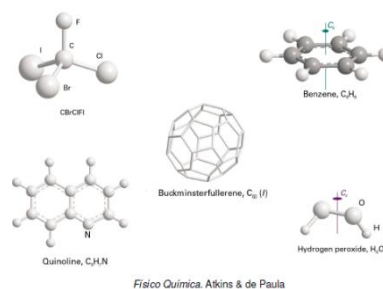


Figura 3: Simetria molecular

A teoria de Lie e os grupos topológicos

A teoria de Lie teve origem por volta de 1870, e partiu da idéia de abordar as equações diferenciais sob o mesmo ponto de vista de Galois para equações algébricas. Sophus Lie (1842-1899) e Felix Klein (1840-1925) dirigiram o programa o qual consistia em estudar as equações diferenciais via seus grupos de simetria. Sob esta perspectiva, Lie descobriu os grupos infinitesimais, conhecidos hoje como álgebras de Lie, e posteriormente descreveu sua relação com os grupos de transformações, assim chamados grupos de Lie (SAN MARTIN, 1999). Mais precisamente, um grupo de Lie é um grupo G cujo conjunto subjacente possui uma estrutura de variedade diferenciável, de tal maneira que a operação binária $\mu: G \times G \rightarrow G$ é diferenciável.

Além de Claude Chevalley (1909-1984), outros matemáticos também trataram dos vários aspectos da teoria de Lie com grande profundidade (cf., BOURBAKI, 1968 e 1972; JACOBSON, 1962). Confirmando as expectativas, o conceito de grupo de Lie encontrou valiosas aplicações no estudo de equações diferenciais em variedades. Por combinar análise e teoria de grupos, tornou-se uma ferramenta apropriada para descrever as simetrias de estruturas analíticas (cf. HELGASON, 1978). Este tipo de análise é conhecido como análise harmônica (cf. WARNER, 1972). Por conseguinte, a teoria de Lie tornou-se fundamental em muitas áreas da Matemática e da Física, mormente com o surgimento da teoria de Calibre, assunto que discutiremos adiante.

Ao longo dos anos, uma nova versão da teoria de grupos foi criada - os grupos topológicos - englobando tanto os grupos algébricos quanto os grupos de Lie. Diversas propriedades dos grupos de Lie dependem apenas de sua topologia e não da estrutura de variedade diferenciável (cf. SAMELSON, 1952).



Figura 4: Marius Sophus Lie



Figura 5: David Hilbert

Os grupos topológicos (ou grupos contínuos de transformações) surgiram com a idéia de estender tais propriedades dos grupos de Lie, introduzindo-se em outras áreas da Matemática (cf. BAKER, 1905; MONTGOMERY-ZIPPIN, 1955; PONTRYAGIN, 1958). Um grupo topológico consiste de um grupo G munido com uma topologia de forma que a operação $\mu: G \times G \rightarrow G$ é contínua. Qualquer grupo algébrico (sem topologia definida) pode ser considerado como um grupo topológico munido com a topologia discreta. No caso dos grupos de Lie, a operação μ é diferenciável e, portanto, contínua.

A teoria de grupos topológicos se desenvolveu com ramificações nas mais diversas áreas da Matemática e de suas aplicações. Uma parte essencial em seu desenvolvimento ocorreu em 1900 com o assim chamado quinto problema de Hilbert: “Todo grupo topológico localmente euclidiano é um grupo de Lie?”. Este problema foi solucionado em 1952 a partir do seguinte resultado: um grupo localmente compacto é um grupo de Lie se e somente se existe uma vizinhança da identidade que não contém um subgrupo não trivial (cf. GLUSHKOV, 1957).

A teoria de Lie protagonizou o período de maior desenvolvimento da teoria dos grupos e se consolidou como uma área de pesquisa muito produtiva e abrangente até os dias de hoje. Concomitantemente, o conceito de grupo topológico se tornou a peça fundamental para a teoria moderna das dinâmicas topológicas.

A teoria de Gauge e os grupos de laços

A teoria de Calibre, também conhecida como teoria de Gauge, representa uma classe de teorias físicas que consideram transformações de simetria locais ou globais. A palavra “gauge” está associada à uma simetria, a simetria de gauge, que é uma das simetrias fundamentais que existem na Física Moderna. Essas transformações estão inseridas no contexto das simetrias classificadas como internas, as quais não apresentam a possibilidade de visualização direta tais como as simetrias translacional, rotacional e especular. A simetria de gauge constitui uma base matemática extremamente sólida para o estudo das estruturas quânticas das interações eletromagnéticas de partículas elementares (cf. MORYASU, 1983).

A idéia da invariância de gauge foi primeiramente proposta por Hermann Weyl (1885-1955) (1919), quando a lista de partículas elementares conhecidas se resumia ao próton e ao elétron. Baseando-se na teoria da relatividade de Albert Einstein (1879-1955), Weyl propôs que a norma de um vetor físico deveria depender de sua localização no espaço-tempo. Uma nova conexão então seria necessária para relacionar os comprimentos dos vetores em diferentes posições. Essa idéia ficou conhecida como invariância de escala ou de gauge. No



Figura 6: Interações eletromagnéticas

entanto, a proposição de Weyl entrou em conflito com alguns fatos físicos e com a teoria quântica. De fato, era conhecido que o comprimento de onda de uma partícula é determinado por sua massa m , não podendo portanto depender da posição. Cerca de cinquenta anos mais tarde a idéia da simetria local de gauge foi reconsiderada, principalmente devido à descoberta das simetrias das equações de Maxwell em eletrodinâmica. A invariância de gauge foi então reconhecida como sendo o princípio físico governante de todas as interações entre partículas elementares (YANG-MILLS, 1954).

A escolha de um gauge corresponde à escolha da seção local de algum fibrado principal. Um fibrado principal topológico $Q(X, G)$ (ou simplesmente $Q \rightarrow X$) é constituído por um espaço total Q , um espaço base X , e um grupo estrutural G , cada um munido de uma topologia, sendo G um grupo topológico. A relação entre eles é dada por:

- (1) G age livre e continuamente à direita em Q : $(q, a) \in Q \times G \rightarrow qa \in Q$.
- (2) O espaço das órbitas dessa ação é X , isto é, existe uma aplicação contínua sobrejetora $\pi: Q \rightarrow X$ tal que as órbitas de G são as fibras $\pi^{-1}(x)$, $x \in X$.
- (3) Q é localmente trivial no sentido de que para todo $x \in X$ existe uma vizinhança U de x e um homeomorfismo $\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$, que é da forma $\varphi(q) = (\pi(q), \delta(q))$, onde $\delta: \pi^{-1}(U) \rightarrow G$ é uma aplicação contínua que satisfaz $\delta(qa) = \delta(q)a$, para todo $q \in \pi^{-1}(U)$ e $a \in G$.

Grosso modo, Q é um feixe bem organizado de grupos topológicos isomorfos entre si. Uma seção local do fibrado $Q(X, G)$ é definida da seguinte forma. Dada uma trivialização local $\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$, o conjunto $\varphi^{-1}\{(x, e): x \in X\}$ é uma subvariedade em $\pi^{-1}(U)$ que cruza cada fibra $\pi^{-1}(U)$ em um único ponto. Denotando esse ponto por $\sigma(x)$, a função $\sigma: U \rightarrow Q$ obtida é uma *seção local* de Q , isto é, satisfaz $\pi(\sigma(x)) = x$, para todo $x \in U$ (Figura 7). A trivialização φ e sua componente δ ficam completamente determinadas por σ , de forma que $\varphi(\sigma(x)a) = (x, \delta(\sigma(x)a)) = (x, a)$, para todo $x \in X$ e $a \in G$.

Uma transformação de gauge é uma transformação entre duas seções locais de um fibrado principal $Q(X, G)$. O *grupo de calibre* é o grupo das transformações de gauge. Mais precisamente, o grupo de calibre do fibrado é o subgrupo dos automorfismos que deixam invariantes cada uma das fibras, ou seja, no espaço base X coincidem com a função identidade de X (cf. NABER, 2010). Um elemento γ do grupo de calibre de $Q(X, G)$ é determinado por uma aplicação $f: Q \rightarrow G$ que satisfaz $f(qa) = a^{-1}f(q)a$, para todo $x \in X$ e $a \in G$. A relação entre os dois é dada por $\gamma(q) = qf(q)$ (pois $\gamma(q)$ está na mesma fibra de q). Se o fibrado é trivial, isto é, $Q = X \times G$, então f é completamente determinada por uma aplicação $F: X \rightarrow G$.

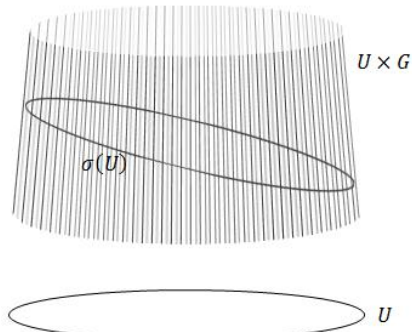


Figura 7 Uma seção local de um fibrado principal

precisamente, o grupo de calibre do fibrado é o subgrupo dos automorfismos que deixam invariantes cada uma das fibras, ou seja, no espaço base X coincidem com a função identidade de X (cf. NABER, 2010). Um elemento γ do grupo de calibre de $Q(X, G)$ é determinado por uma aplicação $f: Q \rightarrow G$ que satisfaz $f(qa) = a^{-1}f(q)a$, para todo $x \in X$ e $a \in G$. A relação entre os dois é dada por $\gamma(q) = qf(q)$ (pois $\gamma(q)$ está na mesma fibra de q). Se o fibrado é trivial, isto é, $Q = X \times G$, então f é completamente determinada por uma aplicação $F: X \rightarrow G$.

No caso particular em que X é o círculo

S^1 , o grupo de calibre do fibrado trivial $S^1 \times G \rightarrow S^1$ corresponde ao grupo de laços livre sobre G , o qual é alternativamente definido por outro caminho. A versão topológica do conceito de grupo de laços consiste de um espaço de curvas fechadas (laços) em um grupo topológico G munido com o produto de funções. Mais precisamente, considera-se o espaço LG , de todas as funções contínuas do círculo S^1 no grupo G , equipado com a topologia compacto-aberta. Dadas $f, g \in LG$, o produto $f \cdot h: S^1 \rightarrow G$ é definido por

$$f \cdot h(x) = f(x) * h(x), \quad x \in S^1.$$

Munido com essa operação interna, LG é um grupo topológico, chamado *grupo de laços livre*. Um grupo de laços é então qualquer subgrupo de LG . O grupo de laços livre se decompõe em um produto semidireto $\Omega G \times G$, onde $\Omega G = \{f \in LG: f(1) = e\}$ é o subgrupo normal dos laços baseados na identidade de G . A versão analítica considera G um grupo de Lie e LG o grupo de todas as funções diferenciáveis $S^1 \rightarrow G$. Nesse caso, LG é um grupo de Lie de dimensão infinita. A decomposição $\Omega G \times G$ é a principal propriedade do grupo de laços livre, de onde se obtém importantes interpretações e aplicações em estudos de equações diferenciais em geral (cf. PRESSLEY-SEGAL, 1986).

Originalmente, os grupos de laços surgiram em trabalhos de teoria quântica de campos em duas dimensões, depois se expandiu em várias direções e diferentes tipos (cf. CHAU-GE-SINHA-WU, 1983; DOLAN, 1981; JACOB, 1974). A partir de um ponto de vista geométrico e analítico, Pressley e Segal (1986) discutiram as aplicações de grupos de laços à física de partículas simples e explicaram como a matemática usada em conexão com grupos de laços é por si só atrativa e valiosa. Os aspectos combinatórios da teoria surgiram com a classificação de certos tipos de singularidades em geometria algébrica (cf. SLODOWY, 1980). Seguindo esta linha de investigação, KAC (1980 e 1982) classificou sistemas de subespaços em álgebra linear. Mais recentemente, grupos de laços foram extensivamente aplicados em conexão com sistemas completamente integráveis de equações diferenciais parciais (cf. DATE-JIMBO-KASHIWARA-MIWA, 1981 e 1982; SATO, 1981, SEGAL-WILSON, 1985; ZAKHAROV-SHABAT, 1979). Empregando o mesmo método, partindo do princípio de que uma equação harmônica é um tipo de sistema integrável, SEGAL (1989), UHLEMBECK (1989), VALLI (1988) e WOOD (1989) encontraram uma solução para o problema de classificação das aplicações harmônicas da esfera S^2 no grupo unitário $U(n)$. Finalmente, grupos de laços foram usados por TERNG-UHLEMBECK (2000) para explicar o fenômeno da transformada de Bäckland em equações que possuem "solitons" como soluções.

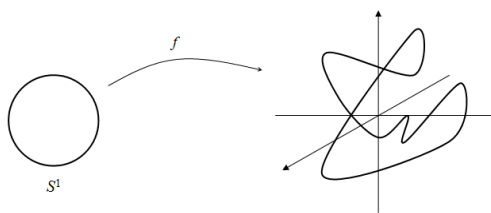


Figura 8: Um laço em \mathbf{R}^3

Conclusão

De acordo com o contexto histórico, é nitidamente reconhecível a teoria de Lie como o auge da teoria dos grupos. Com base nos trabalhos mais atuais envolvendo grupos de simetrias, também reconhecemos que o conceito de grupo de laços, inserido no contexto da teoria de Gauge, constitui um dos ramos mais modernos da teoria dos grupos e suas aplicações, e tem sido objeto de intenso estudo desde meados de 1980. Esta intensidade se deve ao fato do conceito ser uma das ferramentas matemáticas mais interessantes e úteis em estudos de equações diferenciais parciais e teoria quântica de campos. Seu desenvolvimento reuniu os mais diversos ramos da matemática como álgebra, análise, análise combinatória e geometria. Devido a sua notável importância para a Física e a Matemática, deseja-se com entusiasmo a real introdução do conceito de grupos de laços como objeto de pesquisa nas universidades brasileiras.

Agradecimentos

Deus seja louvado pela Ciência dada aos homens.

Agradeço ao professor Luiz San Martin – principal incentivador da pesquisa sobre grupos de laços - pelos detalhes técnicos sobre os grupos de calibre. Agradeço também às estudantes Fernanda T. Ishii e Magnólia S. Chorro pela dedicação nos projetos de iniciação científica os quais motivaram a produção deste artigo.

REFERÊNCIAS

- BAKER, H. F., Alternants and continuous groups, *Proceedings of the London Math. Soc.*, Second Series 3 (1905), 24-47.
- BOREL, A., *Linear algebraic groups*. Benjamin Inc., 1969.
- BOURBAKI, N., *Éléments de Mathématique, Groupes et algèbres de Lie*, Chapitre 4: Groupes de Coxeter ET systèmes de Tits. Chapitre 5: Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre 6: Systèmes de racines, Hermann, Paris, 1968.
- _____, *Éléments de Mathématique, Groupes et algèbres de Lie*, Chapitre 2: Algèbres de Lie libres. Chapitre 3: Groupes de Lie, Hermann, Paris, 1972.
- BREDON, G. E. *Topology and Geometry*. Graduate Texts in Mathematics (1 ed.). Springer, 1997.
- CAYLEY, A. On the theory of groups, as depending on the symbolic equation $\theta^n = 1$. *Philosophical Magazine*, 7 (1854), 40-47, e em *The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley*. Cambridge University Press, Cambridge, 1889, vol. 2, pp. 123-130.
- CHAU, L. L., GE, M. L., SINHA, A., e WU, Y. S., Hidden symmetry algebra for the self-dual Yang-Mills equation, *Phys. Lett.*, 121B (1983), 391-396.
- CHEVALLEY, C. *Theory of Lie groups*, I, Princeton University Press, 1946.

- _____. Théorie des Groupes de Lie, II: Groupes Algébriques, Hermann, Paris, 1951.
- DATE, E., JIMBO, M., KASHIWARA, M., e MIWA, T., Transformation groups for soliton equations I, Proc. Japan Acad., 57A (1981), 342-347.
- _____. Transformation groups for soliton equations II, Ibid., 387-392.
- _____. Transformation groups for soliton equations III, J. Phys. Soc. Japan, 50 (1981), 3806-3812.
- _____. Transformation groups for soliton equations IV, Physica, 4D (1982), 343-365.
- _____. Transformation groups for soliton equations V, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 18 (1982), 1111-1119.
- _____. Transformation groups for soliton equations VI, J. Phys. Soc. Japan, 50 (1981), 3813-3818.
- _____. Transformation groups for soliton equations VII, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 18 (1982), 1077-1110.
- DOLAN, L., Kac-Moody algebra is hidden symmetry of chiral models, Phys. Rev. Lett., 47 (1981), 1371-1374.
- GALOIS, E., Oeuvres mathématiques d'Évariste Galois. Gauthier-Villars, Paris, 1897.
- GLUSHKOV, V. M., Structure of locally bicomact groups and Hilbert's fifth problem, Uspekhi Mat. Nauk, 12: 2 (1957) pp. 341 (In Russian).
- HELGASON, S., Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces. Academic Press, New York, 1978.
- JACOB, M., Dual theory. North-Holland, Amsterdam, 1974.
- JACOBSON, N., Lie Algebras, Interscience Publishers, New York and London, 1962.
- KAC, V. G., Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory I, Invent. Math., 56 (1980), 57-92.
- _____. Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory II, J. Algebra, 78 (1982), 141--162.
- LIMA, E. L., Grupo fundamental e espaços de recobrimento, 3rd ed. IMPA, Rio de Janeiro, 2006.
- MONTGOMERY, D., e ZIPPIN, L., Topological Transformation Groups, Interscience Publishers, New York and London, 1955.
- MORYIASU, K., An Elementary Primer for Gauge Theory, World Scientific Publishing, 1983.
- NABER, G. L., Topology, Geometry and Gauge Fields, Applied Mathematical Sciences, Springer, 2010.
- PONTRYAGIN, L. S., Topological groups, Princeton Univ. Press, 1958.
- PRESSLEY, A. e SEGAL, G., Loop groups. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.
- ROSENTHAL, J. E., e MURPHY, G. M., Group Theory and the Vibrations of Polyatomic Molecules, Rev. Mod. Phys. 8 (1936), 317-346.
- ROTMAN, J. J., The Theory of Groups: An Introduction. 2nd ed., Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1976.
- SAMELSON, H., Topology of Lie groups, Bull. Amer. Math. Soc. 58 (1952), 2-37.
- SAN MARTIN, L. A. B., Álgebras de Lie. Editora da Unicamp, Campinas, 1999.

- SATO, M., Soliton equations as dynamical systems on infinite dimensional Grassmann manifolds, RIMS Kokyuroku, 439 (1981), 30-40.
- SEGAL, G. B., Loop groups and harmonic maps. Advances in Homotopy Theory, London Math. Soc. Lecture Notes 139, Cambridge Univ. Press, 1989, pp. 153-164.
- SEGAL, G. B., e WILSON, G., Loop groups and equations of KdV type, Pub. Math. I.H.E.S., 61 (1985), 5-65.
- SLODOWY, P., Simple Singularities and Simple Algebraic Groups. Lecture Notes in Mathematics, 815. Berlin: Springer, 1980.
- SPANIER, E. H., Algebraic Topology, McGraw-Hill Book Company, New York, Toronto, London, 1966.
- STEWART, I., Galois Theory. Chapman and Hall, London, 1973.
- TERNG, C. L., e UHLENBECK, K., Bäcklund transformations and loop group actions, Comm. Pure Appl. Math., 53 (2000), 1-75.
- _____. Geometry of Solitons, Notices of the AMS, January 2000, 17--25.
- TIGNOL, J.-P., Galois' Theory of Algebraic Equations. New York: Longman, 1988.
- UHLENBECK, K. K., Harmonic maps into Lie groups (Classical solutions of the chiral model), J. Differential Geom., 30 (1989), 1-50.
- VALLI, G., On the energy spectrum of harmonic 2-spheres in unitary groups, Topology, 27 (1988), 129-136.
- VON DYCK, W., Gruppentheoretische Studien, Mathematische Annalen 20 (1) (1882), 1-44.
- YANG, C. N. e MILLS, R. (1954). "Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance". Physical Review 96 (1): 191-195.
- WARNER, G., Harmonic analysis on semi-simple Lie groups. Springer-Verlag, 1972.
- WEYL, H., "Eine Neue Erweiterung der Relativitätstheorie", Annalen der Physik 59 (1919) 101-3.
- WOOD, J. C., Explicit construction and parametrization of harmonic two-spheres in the unitary group, Proc. London Math. Soc., 59 (1989), 608-624.
- ZAKHAROV, V. E., e SHABAT, A. B., Integration of the nonlinear equations of mathematical physics by the inverse scattering method II, Functional Anal. Appl., 13 (3) (1979), 13-22 (Russian), 166-174 (English).

Ilustrações - Figuras

Figura 1- Coleção David Smith

Figura 2- Biblioteca do Congresso

Figura 3: Físico Química. Atkins & de Paula

Figura 4: extraído de

http://www.adressa.no/multimedia/archive/01010/sophus_lie_1010149a.jpg (acesso: 9 de Agosto, 2011)

Figura 5: Coleção David Smith

Figura 6: Coleção do autor

Figura 7: Coleção do autor

Figura 8: Coleção do autor

Josiney A. Souza

Departamento de Matemática – UEM – campus de
Maringá - Brasil

E-mail: jasouza3@uem.br