Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 3 nº 5 (abril/2003 - setembro/2003) - pág. 13 -14
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

PROBLEMA 1

Problema de Cantor sobre a potência do Continuum[*]

Dois sistemas, isto é, dois conjuntos de números reais ordinários (ou de pontos) são, para Cantor, equivalentes ou de mesma cardinalidade, quando puderem ser trazidos um junto ao outro a uma relação tal que a cada número de um conjunto corresponde um e somente um número do outro. As investigações de Cantor de tais conjuntos de pontos sugerem um teorema muito provável, cuja demonstração, apesar dos esforços mais árduos, até agora ninguém conseguiu êxito. Este teorema é o seguinte: Todo sistema de infinitos números reais, isto é, todo conjunto infinito de números (ou de pontos) é ou equivalente ao conjunto dos números naturais 1, 2, 3, ... ou ao conjunto de todos os números reais e, portanto, ao continuum, isto é, aos pontos de uma reta; *com respeito à equivalência há, portanto, somente dois conjuntos de números, o conjunto enumerável e o continuum.*

Desse teorema seguiria, imediatamente, que o continuum tem o número cardinal seguinte àquele do conjunto enumerável; a demonstração desse teorema formaria, portanto, uma nova ponte entre o conjunto enumerável e o continuum.

Ainda deve ser mencionada uma afirmação muito interessante de Cantor que possui uma conexão muito próxima com o teorema mencionado e que, talvez, ofereça a chave para sua demonstração. Um sistema de números reais é dito ordenado, se para quaisquer dois números do sistema for estabelecido qual deles aparece antes e qual aparece depois, e se ao mesmo tempo esta determinação for de tal forma que, se um número a encontra-se antes de b e b antes de c então a encontra-se antes de c. A ordenação natural dos números em um sistema é estabelecida de forma que o menor precede o maior. Como é fácil de se ver, há, no entanto, ainda infinitas outras formas por que os números de um sistema podem ser ordenados.

Se nós adotarmos uma determinada ordem dos números e dela escolhermos um sistema parcial ou um sub-conjunto específico destes números, então este sub-conjunto apresenta-se igualmente ordenado. Neste sentido, Cantor considera uma forma particular de ordenar conjuntos, que ele designa como conjuntos *bem ordenados* e são caracterizados de modo que, não somente no conjunto propriamente mas também em todo sub-conjunto, existe um primeiro número. O sistema dos números inteiros 1, 2, 3, ... em sua ordem natural é, evidentemente, um conjunto bem ordenado. Ao contrário, é evidente que o sistema de todos os números reais, ou seja, o continuum em sua ordem natural, não é bem ordenado. Porque, se nós considerarmos como sub-conjunto os pontos de um segmento de reta com exceção de seu ponto inicial, este sub-conjunto não possui um primeiro elemento. Surge, agora a pergunta, se a totalidade dos números não se deixa ordenar de outra maneira tal que

---

[*] Traduzido do alemão para o português por Sergio Nobre. Revisão da tradução feita por Irineu Bicudo.

cada sub-conjunto tenha um primeiro elemento, ou seja, se o continuum também pode ser considerado como um conjunto bem ordenado, o que Cantor acredita que precisa ser respondido afirmativamente. Parece-me mais desejável obter uma prova direta desta afirmação notável de Cantor, talvez através de uma verdadeira indicação de uma tal ordem numérica, na qual em qualquer sistema parcial um primeiro número possa ser exibido.

* * *