Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 3 nº 5 (abril/2003 - setembro/2003) - pág. 107- 109
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

PROBLEMA 18

A Construção do espaço através de poliedros congruentes[*]

Quando se pergunta por aqueles grupos de transformações no plano para o quais uma região fundamental existe, obtém-se diferentes respostas, de acordo com o plano considerado de Riemann (elíptico), Euclides, ou de Lobachevsky (hiperbólico). No caso do plano elíptico há um número finito de tipos, essencialmente diferentes, de regiões fundamentais, e basta um número finito de exemplares congruentes para uma sobreposição completa do plano: O grupo consiste apenas de um número finito de movimentos. No caso do plano hiperbólico há um número infinito de tipos essencialmente diferentes de regiões fundamentais, ou seja, são os conhecidos polígonos de Poincaré; para a sobreposição completa do plano, é necessário um número infinito de exemplares de regiões congruentes. O caso do plano de Euclides está no meio; pois, neste caso, há somente um número finito de tipos essencialmente diferentes de grupos de transformações com região fundamental; mas para cobrir o plano por inteiro é necessário um número infinito de regiões congruentes.

Exatamente os fatos correspondentes valem também nos espaços de três dimensões. O fato da finitude dos grupos de transformações espaços elípticos é uma conseqüência imediata de um teorema fundamental de C. Jordan[1], segundo o qual o número de tipos essencialmente diferentes de grupos *finitos* de substituições lineares com *n* variáveis, não ultrapassa um determinado limite finito dependente de *n*. Os grupos de transformações com região fundamental em espaço hiperbólico foram investigados por Fricke e Klein nas conferências sobre a teoria de funções automórficas[2], e finalmente Fedorov[3], Schoenflies[4] e ultimamente Rohn[5], deram a prova de que há, no espaço euclideano, somente um número finito de tipos essencialmente diferentes de grupos de transformações com região fundamental.

Ao passo que os resultados e métodos de demonstração relativos ao espaço elíptico e hiperbólico têm também validade direta para o espaço *n* dimensional, a generalização do teorema relativo ao espaço euclideano parece oferecer dificuldades salientes. Por isso é desejável a investigação da questão*: Se há também, no espaço n dimensional euclideano, apenas uma quantidade finita de tipos essencialmente diferentes de grupos de transformações com região fundamental?*

---

[*] Traduzido do alemão para o português por Sergio Nobre. Revisão da tradução feita por Marcelo Firer.
[1] Journal für Mathematik, Bd. 84 (1878) e Atti della Reale Academia di Napoli 1880.
[2] Leipzig 1897. Em especial no parágrafo I, capítulos 2 e 3.
[3] Symetrie der regelmässigen Systema von Figuren 1890.
[4] Kristallsysteme und Kristallstruktur, Leipzig 1891.
[5] Mathematische Annalen, Vol. 53.

Uma região fundamental de cada grupo de transformação, junto com as regiões que surgem do grupo, fornece, pelo visto, uma sobreposição completa do espaço. Levanta-se a pergunta:

Se, no entanto, existem também poliedros que não se apresentam como regiões fundamentais dos grupos de transformações, e, por meio dos quais, todavia, através da justaposição adequada de exemplares congruentes é possível completar todo o espaço. Eu chamo atenção para o contexto aqui existente, que é importante para a Teoria dos Números e talvez útil também para a Física e a Química a seguinte questão: Como pode organizar, no espaço mais denso, um número infinito de sólidos iguais de determinada forma, isto é, esferas com determinados raios ou tetraedros regulares com extremidade determinada (respectivamente em posição prescrita), quer dizer, que a relação entre o espaço preenchido e o espaço não preenchido pode ser tão grande quanto possível.

Vejamos o desenvolvimento da teoria das funções no último século, assim percebemos, sobretudo, o papel fundamental daquela classe de funções, que hoje caracterizamos como funções analíticas, uma classe de funções que continuamente se localiza no cerne do interesse matemático.

Nós poderíamos salientar, de acordo com diferentes pontos de vista vindos da grande quantidade de funções concebíveis, classes extensas que são dignas de uma pesquisa especial. Consideramos, por exemplo, a classe daquelas funções que são caracterizadas através de equações diferenciais algébricas normais ou parciais. Nesta classe de funções, como percebemos imediatamente, não aparecem tais funções que originam da teoria dos números e cujas pesquisas é da maior importância. Por exemplo, basta reconhecer que a função anteriormente citada $\zeta(s)$ não satisfaz nenhuma equação diferencial algébrica, como é visto facilmente com ajuda da conhecida relação entre $\zeta(s)$ e $\zeta(1-s)$, quando se recorre ao teorema provado por Hölder[6], que a função $I'(x)$ não satisfaz nenhuma equação diferencial algébrica. Além disso, basta a função de duas variáveis

$$\zeta(s, x) = x + \frac{x^2}{2^s} + \frac{x^3}{3^s} + \frac{x^4}{4^s} + \ldots$$

definida pela série infinita que está intimamente relacionada com a função $\zeta(s)$, provavelmente não satisfaz a nenhuma equação diferencial algébrica parcial. Na investigação desta pergunta utiliza-se a equação funcional:

$$x\frac{\partial\zeta(s,x)}{\partial} = \zeta(s-1,x)$$

Se, por outro lado, considerarmos a classe de todas aquelas funções que se aproximam dos argumentos geométricos e aritméticos, *as quais são contínuas e*

[6] Mathematischen Annalen, Vol. 28.

ilimitadamente diferenciáveis, assim teríamos que renunciar nesta investigação ao instrumento flexível das séries de potência e a circunstância que a função é completamente determinada através da ordem de valores em cada pequeno intervalo desejável. Enquanto a limitação anterior do campo das funções era muito estreita, o posterior parece-nos muito largo.

O conceito de função analítica, em contrapartida, acolhe em si toda a riqueza das funções que é importante para a ciência. Se eles podem ter origem na teoria de números, na teoria de equações diferenciais ou nas equações funcionais algébricas, se eles podem surgir da geometria ou da física-matemática; então, a função analítica conduz, com razão, a absoluta supremacia no reino das funções.

* * *