

## O SEGUNDO PROBLEMA DE HILBERT

Jairo José da Silva

UNESP - Brasil

*Wir müssen wissen, wir werden wissen*  
(Hilbert, Königsberg, 1930)

No dia 8 de agosto de 1900, Hilbert apresentou ao 2º Congresso Internacional de Matemáticos, reunido em Paris, uma lista de dez dentre 23 grandes problemas matemáticos ainda sem solução. Hilbert não duvidava que essas soluções existiam, bastando para encontrá-las a dose exata de esforço e engenho. O segundo problema da lista pedia que se demonstrasse a “compatibilidade dos axiomas aritméticos”. Assim posto o problema carece da necessária clareza matemática, pois: 1) A que aritmética se referia Hilbert?; 2) Por que seriam necessárias demonstrações de consistência de teorias *verdadeiras*, como são, supõe-se, as aritméticas usuais dos números naturais, racionais e reais? (Haveria alguma razão para se duvidar que elas fossem, de fato, verdadeiras?) 3) Que ferramentas matemáticas seriam admissíveis nas demonstrações de consistência; ou seja, essas demonstrações deveriam ser levadas a cabo em que contexto matemático? Eu começo este artigo discutindo essas questões.

Ainda que Hilbert tivesse em mente a aritmética dos números reais, nós aqui nos contentaremos em analisar exclusivamente o problema da consistência da aritmética dos inteiros não-negativos, e isso dá conta da primeira questão. Já a segunda requer uma distinção entre teorias propriamente ditas e teorias puramente formais<sup>1</sup>. A aritmética contentual, isto é, a teoria axiomática dos números inteiros não negativos (ou números naturais) é evidentemente uma teoria consistente, simplesmente por ser a teoria de um domínio *dado* de objetos, os números naturais. A consistência dessa aritmética está, assim, na dependência de uma *intuição* capaz de nos fornecer os objetos da teoria dos números. Ou, dito de outra forma, a consistência da aritmética contentual é garantida por uma intuição que, pressupõe-se, tem a capacidade de nos oferecer uma teoria verdadeira. Sendo verdadeira, a aritmética contentual é, *a fortiori*, consistente.

A aritmética formal, entretanto, não é uma teoria de nenhum domínio pré-dado de objetos; logo, não é em nenhum sentido próprio nem verdadeira, nem falsa<sup>2</sup>. Cabe-lhe apenas descrever uma estrutura formal, cuja realidade está sub judice. Porisso o problema de sua consistência é tão importante. Trata-se de demonstrar que a estrutura formal que a teoria descreve é uma estrutura possível, ou seja, é a estrutura de um domínio possível de objetos.

---

<sup>1</sup> Frege teve dificuldade em perceber essa distinção. Porisso nunca chegou a entender realmente por que Hilbert insistia na demonstração da consistência da aritmética.

<sup>2</sup> Cabe aqui a “definição” de matemática dada por Russell: o discurso em que não sabemos do que falamos, nem se o que falamos é verdadeiro.

E isto esgota a existência que cabe aos conceitos matemáticos<sup>3</sup>, pois, como disseram Hilbert, Poincaré e Cantor, entre outros, existir em matemática tem apenas um significado, estar livre de contradições.

Que estrutura, então, descreve a aritmética formal? A resposta mais simples é a seguinte: a aritmética formal descreve a estrutura das seqüências de tipo  $\omega$ , ou seqüências- $\omega$ . Uma seqüência- $\omega$  é um tipo de seqüência linear discreta de “pontos”<sup>4</sup>, com primeiro, mas sem último elemento. Os axiomas da aritmética formal (axiomas de Dedekind-Peano) são simplesmente a descrição<sup>5</sup> das propriedades características dessas seqüências em uma linguagem formal apropriada. Eles nos dizem, com respeito a qualquer seqüência- $\omega$ , que “há um primeiro ponto”, “a todo ponto segue-se um outro ponto, o ponto sucessor desse”, “a operação de obtenção de pontos sucessores é injetiva” e “não há pontos que não sejam obtidos do primeiro ponto por uma iteração finita da operação sucessor” (este é o axioma de indução completa). É precisamente a consistência dessa teoria formal que Hilbert pede que se demonstre.

Há uma maneira óbvia de se levar a cabo essa tarefa: dar uma interpretação para a teoria, i.e. *exibir* uma seqüência- $\omega$ ; por exemplo, a seqüência dos números naturais. Mas esta é uma falsa solução. Pois como podemos saber que a seqüência exibida é *mesmo* uma seqüência- $\omega$ ? Ou apelamos para a intuição ou mostramos, de algum outro modo, que ela é, de fato, uma interpretação da teoria. Mas isso é equivalente a mostrar que a teoria é consistente. E assim estamos de volta à estaca zero. Ou aceitamos o poder da intuição ou descobrimos uma outra forma de mostrar a consistência da aritmética formal<sup>6</sup>.

Um modo direto de se demonstrar a consistência de um sistema axiomático formal é simplesmente mostrar que nenhuma demonstração formal no contexto desse sistema termina numa contradição manifesta (i.e. uma asserção do tipo “A e não-A”, ou “ $0 = 1$ ”), ou seja, nenhuma contradição será jamais um teorema do sistema. Ora, as demonstrações da aritmética formal são invariavelmente seqüências finitas de asserções expressas na linguagem dessa teoria, onde cada elemento da seqüência é um axioma ou uma consequência lógica de asserções anteriores na seqüência. Os axiomas não são em si contradições manifestas; como as regras lógicas de inferência não geram contradições manifestas de asserções não-contraditórias, segue, por simples indução no comprimento das demonstrações, que nunca uma contradição manifesta será um teorema da teoria. Logo, a aritmética formal é consistente.

Por que essa demonstração não é aceitável? Vejamos. A fim de se demonstrar a consistência de uma teoria, a teoria objeto, nós *usamos* uma teoria, a meta-teoria (porisso toda demonstração de consistência é sempre relativa). É apenas no contexto de uma *meta-teoria* que se pode demonstrar a consistência da aritmética formal. Neste caso a meta-teoria contém explicitamente a própria aritmética, pois pressupõe toda a teoria dos números –

<sup>3</sup> A matemática formal, como definiu Husserl, é a teoria das formas de domínios objetivos possíveis.

<sup>4</sup> Dizer “pontos” é simplesmente uma forma de dizer “quaisquer coisas”. Poderíamos dizer também “vazios” ou “posições”.

<sup>5</sup> Ou, segundo Hilbert, a definição implícita do conceito de seqüência- $\omega$ .

<sup>6</sup> Poincaré acreditava que não poderia haver uma demonstração direta da consistência da aritmética que não envolvesse um círculo vicioso, como na demonstração abaixo. Assim, só a intuição poderia garantir um fundamento para a aritmética.

incluindo o princípio irrestrito de indução finita – necessária para se demonstrar asserções envolvendo comprimentos de demonstrações formais. Mas ela contém também o suficiente de teoria dos conjuntos para que possamos tratar matematicamente a teoria objeto. Isso basta para que essa demonstração seja colocada sob suspeita. Para que ela fosse aceitável precisaríamos saber *antes* se a meta-teoria é ela própria consistente. Afinal, se essa meta-teoria for inconsistente, ela provará o que quer que seja, inclusive a consistência e a inconsistência da aritmética. Ora, como essa meta-teoria *contém* a aritmética, caímos em um círculo vicioso onde de fato nada se prova.

Sempre que a aritmética estiver contida numa meta-teoria, qualquer demonstração da consistência da aritmética no contexto dessa meta-teoria será completamente inútil<sup>7</sup>. Seria como pedirmos a garantia de alguém sobre sua própria sanidade mental. Tal garantia só terá algum valor se o avalista for ele próprio mentalmente sã, e isso deve ser estabelecido independentemente do que quer que ele diga sobre si próprio. Afinal, apenas o barão de Munchausen podia puxar-se pelo próprio cabelo.

Assim, uma solução do problema posto por Hilbert só pode ser dada no contexto de uma meta-teoria estritamente mais fraca que a própria aritmética formal. Hilbert chamava um tal contexto de *matemática finitária*. Não há, entretanto, suficiente concordância sobre que sistema formal expressaria essa matemática finitária. O próprio Hilbert não é jamais muito claro sobre o quanto de matemática caberia nesse “finitária”. Essa matemática deveria conter evidentemente *alguma* aritmética, mas não toda ela. Hilbert permite explicitamente enunciados aritméticos gerais de um tipo especial, enunciados sem quantificadores, mas exclui enunciados existenciais ilimitados. A razão parece clara: a demonstração de um enunciado numérico onde todas as variáveis ocorrem livres requer apenas a demonstração desse enunciado para números genéricos quaisquer sobre os quais nenhuma hipótese adicional é feita, não a demonstração do enunciado para *cada* n-upla de números uma a uma, o que seria um procedimento infinitário. A demonstração de um enunciado numérico existencial ilimitado, por outro lado, requer uma busca infinitária. Certamente Hilbert admitiria na matemática finitária todos os axiomas de Dedekind-Peano exceto o axioma de indução completa na sua forma mais geral. Entretanto, uma versão mais fraca desse axioma deveria ser permitida. Ademais, as definições recursivas que introduzem as operações aritméticas elementares seriam, acredita-se, também admissíveis. Em suma, parece seguro admitir que a teoria matemática formal que mais se aproxima da matemática finitária hilbertiana é a chamada aritmética primitivamente recursiva<sup>8</sup>.

A aritmética primitivamente recursiva – APR – foi introduzida por Skolem em 1923 e tem as seguintes características: não são admitidas quantificações ilimitadas, apenas quantificadores limitados do tipo  $\forall x \leq a$  e  $\exists x \leq a$  comparecem na linguagem<sup>9</sup>; todas as

---

<sup>7</sup> Por isso o teorema de Gödel, que demonstra que a aritmética formal não pode demonstrar sua própria consistência, não nos priva aparentemente de nada de muito valor. Esse teorema frustra o programa de Hilbert, como veremos, apenas na medida em que implica que nenhuma teoria *mais fraca* que a aritmética pode demonstrar a consistência dessa.

<sup>8</sup> A identificação da matemática finitária com a aritmética primitivamente recursiva encontra-se em [Tait, 1981]. Entretanto, outras alternativas foram sugeridas. Por volta de 1931, Gödel chega a identificar a matemática finitária ao intuicionismo de Brouwer, mas depois abandona essa idéia.

<sup>9</sup> Esses quantificadores são meras abreviações de conjunções e disjunções finitas.

variáveis de todas as fórmulas da linguagem ocorrem livres; são permitidas definições por recursão primitiva para a introdução de novas funções e predicados (essas são definições do tipo, por exemplo, daquela que introduz a soma:  $x + 0 = x$ ;  $x + \text{sucessor}(y) = \text{sucessor}(x + y)$ ); admiti-se o uso do princípio de indução nas demonstrações (evidentemente, como as fórmulas dessa teoria constituem um subconjunto próprio das fórmulas da aritmética, esse é um uso restrito do princípio de indução.) Em seu famoso texto de 1934, Hilbert e Bernays dão bastante ênfase à essa teoria, o que nos leva a crer que consideravam a APR como parte da matemática finitária<sup>10</sup>. Isso responde a terceira questão acima.

Portanto, o segundo problema de Hilbert pode ser assim enunciado precisamente: demonstre na aritmética primitivamente recursiva a consistência da aritmética formal de Dedekind-Peano (P). Após a formalização dessa demonstração teríamos demonstrado o seguinte:  $\text{APR} \mid\text{---} \text{Con}(P)$ , onde  $\text{Con}(P)$  é uma sentença da linguagem da APR que expressa a consistência da teoria P.

Como vimos acima, uma tal demonstração de consistência seria suficiente para garantir, segundo Hilbert, a realidade matemática (ou seja, a possibilidade) dos conceitos da aritmética formal. Mas há mais em jogo aqui. Hilbert visa também um fim fundacional, o “lastreamento” do infinito no finito. Além da aritmética, a “orgia” infinitária da teoria dos conjuntos de Cantor, apesar de sua extrema fecundidade, deveria clamar, aos olhos de Hilbert, por uma fundamentação nos mesmos moldes<sup>11</sup>: uma demonstração finitária de consistência. Uma tal demonstração seria, além disso, uma resposta *matemática* aos pudores de matemáticos finitistas, como Brouwer ou Poincaré que não admitiam, por razões diversas, a existência do infinito atual em matemática<sup>12</sup>. Para o matemático, acreditava Hilbert, não existia a opção de abrir mão de procedimentos infinitários. Restava então assegurar-lhes a consistência por procedimentos estritamente finitários. Isso deveria calar aqueles que viam no infinito atual apenas uma fonte de contradições, como é, exemplarmente, o caso de Poincaré.

Uma demonstração finitária da consistência de uma teoria infinitária como a aritmética, ou a então recente criação de Cantor, a teoria dos conjuntos, mais que uma garantia de segurança (que afinal ninguém parece mesmo necessitar, uma vez que ninguém seriamente acredita que a aritmética possa *mesmo* ser inconsistente<sup>13</sup>) cumpriria na verdade um papel fundacional de caráter matemático e epistemológico. A segunda metade do século XIX havia visto a rigorosa redução da análise à aritmética (a aritmetização da análise) por

<sup>10</sup> Evidentemente, Hilbert admitia que a matemática finitária, por ser fundada na intuição, não requereria ela própria uma demonstração de consistência. Mas o próprio Hilbert observou [Hilbert & Bernays, 1934] que a consistência de APR segue diretamente do fato que seus teoremas são fórmulas verificáveis, i.e. têm todas as suas instâncias verdadeiras.

<sup>11</sup> Afinal o próprio Cantor considerava seus números transfinitos como novos irracionais. Como esses, os números transfinitos aparecem como “limites” de seqüências divergentes (por exemplo,  $\omega$  seria o limite da seqüência 0, 1, 2, 3, ... assim como os números irracionais são limites de seqüências de Cauchy de números racionais)

<sup>12</sup> A demonstração finitária da consistência da aritmética (dita clássica por oposição à aritmética intuicionista) deveria constituir, aos olhos de Hilbert, uma resposta definitiva às críticas de Brouwer, uma vez que a matemática finitária obedecia a todas as restrições impostas por Brouwer às teorias matemáticas. Na verdade APR é uma teoria mais *fraca* que a aritmética intuicionista e, ironicamente, a aritmética intuicionista é, como veremos adiante, equiconsistente com a aritmética clássica.

<sup>13</sup> Já com a teoria dos conjuntos de Cantor a situação é outra. O próprio Cantor já se dera conta de que sua teoria admitia certas “inconsistências”, que ele “resolvia” de modo mais ou menos arbitrário.

obra, em especial, de Dedekind, Weierstrass e Cantor. Em particular, o apelo da análise aos infinitesimais deixou de ser necessário, e a noção de limite fora reduzida a relações de desigualdades entre números reais. Como realçaram, Hilbert e Poincaré (os dois maiores matemáticos da época), o infinito em análise<sup>14</sup> tornara-se apenas uma *façon de parler*. Mas precisamente nessa época Cantor criava pela primeira vez uma teoria matemática na qual o infinito aparecia não como mero ilimitado ou simples possibilidade, mas como um conceito determinável<sup>15</sup>.

Hilbert foi um dos maiores entusiastas da teoria cantoriana dos conjuntos (ele chamou-a de “paraíso”<sup>16</sup> e “suprema criação do gênio humano”<sup>17</sup>.) Seria então natural que ele procurasse para a teoria dos conjuntos e para a própria aritmética dos reais, bases agora de toda a análise matemática, uma fundamentação se não idêntica, ao menos análoga àquela oferecida à análise. Uma demonstração finitária de consistência não eliminaria a menção ao infinito da teoria de Cantor, nem os procedimentos infinitários da aritmética (como, por exemplo, as demonstrações por indução completa irrestrita ou o apelo a conjuntos infinitos) mas ofereceria a essas teorias um *fundamento finitário*. Essa fundamentação teria evidentemente uma função epistemológica, uma vez que limitaria à esfera finitária das possibilidades humanas a constatação da realidade de conceitos infinitários.

Assim, tanto quanto uma questão matemática, o segundo problema de Hilbert é, também, uma questão filosófica. A resolução desse problema passaria, nos anos seguintes, a fazer parte de todo um programa de pesquisa, o chamado programa de Hilbert, que em poucas palavras propunha o seguinte: formalize as teorias matemáticas (ou, melhor ainda, *toda* a matemática), e demonstre por meios finitários que essas teorias (ou, melhor ainda, *toda* a matemática formalizada) são consistentes. Esse programa, epítome de um triunfante otimismo epistemológico, e, em particular os esforços para se resolver o segundo problema de Hilbert, experimentaria um forte revés em 1931 por obra e graça de um jovem de 25 anos, o matemático austríaco Kurt Gödel.

## O TEOREMA DE GÖDEL

Em 1930, numa emissão radiofônica em Königsberg (da qual existe ainda uma gravação), Hilbert manifestou de forma veemente seu otimismo racionalista. Ele disse, repetindo o que já dissera em sua conferência de Paris, que em matemática não havia *ignorabimus*, que todo problema matemático bem posto admitiria uma solução. Evidentemente, ele incluía na classe dos problemas solúveis os dois primeiros de sua já

---

<sup>14</sup> Hilbert, na verdade, acreditava que a aritmetização havia eliminado da análise apenas o infinito *potencial* (infinitésimos e limites infinitos). Restava ainda o infinito *atual*, manifesto, por exemplo, nas próprias definições dos números irracionais como conjuntos atualmente infinitos de racionais. Cantor também menciona esse fato, não se pode coerentemente admitir as definições dos reais por, digamos, cortes de Dedekind e, simultaneamente, banir da matemática o infinito atualizado.

<sup>15</sup> É claro, Cantor distinguia entre um infinito determinável, o transfinito, e um infinito absoluto e indeterminável. Na verdade essa distinção era-lhe útil no próprio contexto de sua teoria para separar os conjuntos propriamente ditos dos conjuntos inconsistentes, como a classe universal, e assim “resolver” as inconsistências da teoria.

<sup>16</sup> “Ninguém há de nos expulsar do paraíso que Cantor nos criou.” [Hilbert, 1925; p. 376]

<sup>17</sup> “[A teoria de Cantor] parece-me a flor mais admirável do intelecto matemático, e em geral um dos maiores feitos da atividade humana puramente racional.” [Hilbert, 1925; p. 373]

antiga lista de Paris, a hipótese do contínuo – que ele mesmo havia tentado demonstrar em 1925<sup>18</sup> – e a consistência da aritmética formal. Assim, ou mostramos por meios finitários que a aritmética é consistente, ou mostramos que não é. Na pior das hipóteses demonstraríamos que a matemática finitária não seria ainda adequada para tal fim, e a estenderíamos, sem que essa extensão acabasse, claro, por abarcar toda a aritmética, até que lográssemos demonstrar o que se pedia. Hilbert, porém, não estava preparado para o que Gödel tinha-lhe reservado.

No mesmo ano que Hilbert professava, tão enfaticamente, sua fé na razão humana, Kurt Gödel apresentava para publicação seu histórico artigo “Sobre proposições formalmente indecidíveis do *Principia Mathematica* e sistemas relacionados I” [Gödel, 1931]. Nele, Gödel desferia dois golpes quase fatais no programa formalista de Hilbert. O primeiro, Gödel demonstrava que a aritmética formal, e por extensão a maior parte das teoria matemáticas interessantes, era *incompleta* (e, pior, incompletável). Isso respondia negativamente a uma questão proposta pelo próprio Hilbert no Congresso Internacional de Matemáticos de Bolonha, em 1928. O segundo, Gödel mostrava que a demonstração da consistência da aritmética formal era *impossível* por métodos que pudessem ser formalizados na própria aritmética formal. Logo, não pode haver uma demonstração de consistência da aritmética formal em APR<sup>19</sup>.

Vejamos rapidamente como Gödel logrou demonstrar esse segundo fato<sup>20</sup>. Ele mostrou que tanto as fórmulas com uma única variável livre, quanto as demonstrações da teoria poderiam ser efetivamente, i.e. mecanicamente listadas. Gödel constrói então uma proposição  $P(x,y,z)$  cujo significado é “a demonstração de número  $x$  é uma demonstração da fórmula de número  $y$  para o valor  $z$  de sua variável livre”. Como o cômputo da veracidade de  $P(x,y,z)$  para dados  $x$ ,  $y$  e  $z$  pode ser formalizado na teoria, tem-se que se  $P(x,y,z)$  é verdadeira, então  $P(x,y,z)$  é demonstrável na teoria. Vamos supor que a aritmética formal seja consistente. Seja  $u$  o número da fórmula  $(x) \sim P(x,y,y)$ . Logo,  $P(x,u,u)$  não pode ser verdadeira, pois em caso contrário  $P(x,u,u)$  seria demonstrável. Portanto, existiria uma demonstração de número  $x$  da fórmula  $(x) \sim P(x,u,u)$ . Mas então, por instanciação, haveria uma demonstração de  $\sim P(x,u,u)$  e a teoria seria inconsistente, contra a hipótese.

Além disso,  $(x) \sim P(x,u,u)$  não é demonstrável na teoria, pois se a demonstração de número  $y$  fosse uma demonstração dela,  $P(y,u,u)$  seria verdadeira, por definição; logo, seria demonstrável na teoria, o que geraria uma contradição. Formalizando esses argumentos temos o seguinte:  $\text{Con}(P) \rightarrow \sim P(x,u,u)$ , onde  $x$  é uma variável, é um teorema da teoria. Se a teoria demonstrasse  $\text{Con}(P)$ , então  $\sim P(x,u,u)$  seria demonstrável e, por conseguinte,  $(x) \sim P(x,u,u)$  também seria demonstrável. Absurdo. Logo,  $P$  não demonstra  $\text{Con}(P)$ .

Segundo Constance Reid<sup>21</sup>, a reação de Hilbert aos teoremas de Gödel, foi “um tanto irritada”. Não é difícil imaginar por quê. Ao mostrar a irredutível incompletude da matemática formal, Gödel feria de morte a pretensão hilbertiana de formalizar *completamente* toda a matemática, ou pelo menos as partes mais interessantes dela. Ao

<sup>18</sup> [Hilbert, 1925]

<sup>19</sup> É interessante notar que as demonstrações de ambos os teoremas de Gödel são formalizáveis em APR.

<sup>20</sup> Essa breve exposição do segundo teorema de Gödel encontra-se em [Herbrand, 1931; p.627]

<sup>21</sup> [Reid, 1986], p. 198.

mostrar que demonstrações de consistência de teorias formais interessantes da matemática exigiriam recursos não finitários, Gödel eliminava de vez as pretensões do programa formalista de Hilbert, ou assim parecia. Entretanto, o próprio Gödel observou que seus resultados não constituíam um golpe fatal no programa de Hilbert, pois seria concebível que houvesse procedimentos finitários que não fossem formalizáveis na aritmética formal. Seja como for, o programa de Hilbert certamente foi substancialmente enfraquecido pelos notáveis resultados de Gödel. Entretanto, não morreu, como veremos a seguir, e o próprio Gödel contribuiu para uma versão modificada dele.

### **A CONSISTÊNCIA DA ARITMÉTICA FORMAL CLÁSSICA EM RELAÇÃO À ARITMÉTICA FORMAL INTUICIONISTA.**

Mesmo que o programa formalista de Hilbert não tivesse sido concebido apenas como uma tentativa de acalmar os pruridos finitistas dos membros da escola de Brouwer, evidentemente este era um de seus objetivos. Segundo os intuicionistas, o infinito atual não é admissível em matemática, apenas o infinito potencial tem aí algum direito de cidadania. Ademais, algumas das usuais regras e leis lógicas, em particular o princípio do terceiro excluído – dentre uma proposição e sua negação, pelo menos uma é verdadeira – não têm, segundo eles, validade garantida senão em contextos finitos. Claro que uma aritmética desenvolvida em obediência a essas restrições deveria ser mais fraca que a aritmética usual; de fato, a aritmética intuicionista é uma sub-teoria da aritmética clássica. Por isso o resultado demonstrado por Gödel em 1933<sup>22</sup>, como já estava se tornando habitual com os resultados de Gödel, foi tão surpreendente.

Desenvolvendo independentemente um argumento já apresentado por Kolmogoroff em 1925 (cujo artigo, escrito em russo, Gödel desconhecia), Gödel define uma tradução<sup>23</sup> da aritmética clássica formalizada em primeira ordem (na versão de Herbrand) na aritmética intuicionista de Heyting, da tal modo que a cada teorema da aritmética clássica corresponde, como teorema da aritmética intuicionista, a sua tradução. A consequência desse fato é notável, se a aritmética intuicionista for consistente, então a aritmética clássica também o será, pois se uma contradição fosse derivável na aritmética clássica, sua tradução, que também seria uma contradição, seria derivável na aritmética intuicionista, contra a hipótese. Ou seja, se temos, como Brouwer certamente acreditava ter, o direito de não duvidar da consistência da aritmética intuicionista (afinal, como queria Brouwer, ela tem um fundamento na intuição), então não temos também o direito de duvidar da consistência da aritmética clássica.

Evidentemente, o próprio Brouwer não ficou muito impressionado com esse teorema, pois mesmo que sua demonstração seja intuicionisticamente aceitável, o problema, para Brouwer, não está na consistência e sim na verdade. Mesmo que as aritméticas intuicionista e clássica sejam equiconsistentes, apenas a intuicionista, acreditava ele, é verdadeira. Isto contém de fato a resposta de Brouwer a todo o programa de Hilbert:

---

<sup>22</sup> O mesmo resultado foi demonstrado no mesmo ano por Gentzen, que submeteu seu artigo ao *Mathematische Annalen*, mas o retirou quando soube do aparecimento do artigo de Gödel.

<sup>23</sup> Vide [Gödel, 1933], [Kolmogoroff, 1925] e [da Silva et al., 1999] para os detalhes.

nenhuma demonstração da consistência da matemática clássica a fará verdadeira. Como já dissera Kant, a consistência mostra a possibilidade, não a realidade. A divergência entre Hilbert e Brouwer é de caráter filosófico e está centrada em diferentes concepções de existência, não há resultado matemático que a possa eliminar.

Esse resultado, entretanto, mostra o caminho para o programa de Hilbert depois dos golpes de Gödel, a busca de demonstrações relativas de consistência, em que a consistência de uma teoria formal segue como conseqüência da consistência de outra, não necessariamente finitária.

## O PROGRAMA DE HILBERT: VERSÃO MODIFICADA

Segundo Paul Bernays, o resultado de Gödel acima mostra que o *finite Standpunkt* de Hilbert não é a única alternativa aos modos clássicos de raciocínio. Ele sugeriu, então, que, ao invés de uma restrição aos métodos finitários de raciocínio, requeiramos apenas que os argumentos metamatemáticos sejam de caráter construtivo, permitindo-nos tratar com formas mais gerais de inferência. Para W. Sieg<sup>24</sup>, o resultado de Kolmogoroff-Gödel-Gentzen foi um fator crucial na relativização do programa de Hilbert, cujos objetivos agora passam a ser: estabeleça *por meios construtivos apropriados* (finitários, predicativos, intuicionistas, etc.) a consistência *relativa* de teorias formais nas quais *partes* da matemática clássica possam ser desenvolvidas. Essa versão domesticada do programa de Hilbert não se preocupa em demonstrar a consistência da matemática como um todo; não se restringe exclusivamente às demonstrações finitárias; não se propõe a resolver os problemas fundacionais de uma vez por todas, mas contenta-se com uma análise epistemológica localizada. O programa de Hilbert relativizado pode ser levado a cabo, em particular, desenvolvendo-se partes substanciais da análise clássica em teorias demonstravelmente mais fracas. Alguns exemplos, Weyl (em 1918, portanto anteriormente à própria formulação da versão forte do programa de Hilbert) mostrou que a teoria das funções contínuas reais pode ser desenvolvida em um subsistema *predicativo* da aritmética de segunda ordem *fraca* e Brouwer desenvolveu uma teoria intuicionista do contínuo, estabelecendo versões intuicionistas de muitos teoremas clássicos.

O próprio Gödel, em 1958, propôs uma extensão do ponto de vista finitário por meio de funcionais recursivamente primitivos de tipo mais alto. Porém, o resultado que mais de perto diz respeito ao problema original de Hilbert, e aqui nós encerramos nossa breve história desse problema, foi demonstrado por Gentzen em 1936. Gentzen mostrou a consistência da aritmética clássica pura (i.e. formal) de primeira ordem, admitindo porém indução transfinita até o ordinal  $\epsilon_0$ . Mesmo que aplicada apenas a predicados decidíveis e justificada em bases construtivas, a indução transfinita pressupõe a teoria de conjuntos. Assim, a demonstração de Genzen não pode ser considerada uma demonstração finitária e, portanto, uma resposta positiva ao problema de Hilbert.

Ainda que sem uma solução propriamente dita exatamente um século depois de proposto, o problema da consistência da aritmética formal serviu a um fim talvez mais útil ao desenvolvimento da lógica nestes cem anos que se tivesse sido simplesmente resolvido

---

<sup>24</sup> [Sieg, 1988]



nos termos em que Hilbert o propôs. A criação da metamatemática, os serviços prestados pelo programa de Hilbert à fundamentação matemática e epistemológica das teorias matemáticas, o próprio teorema de Gödel e os métodos extremamente profícuos e originais ali introduzidos são frutos gerados pelo desafio que Hilbert lançou à comunidade matemática. Mas este é, afinal, o papel que cabe aos grandes problemas, matemáticos ou não, o de abrir novos horizontes.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CAICEDO, X. e MONTENEGRO, C. H. (ed.) (1999). *Models, Algebras and Proofs* (New York, Marcel Dekker).
- DA SILVA, J., D'OTTAVIANO, I. e SETTE, A. M. (1999). Translations Between Logics, in Caicedo & Montenegro (1999), pp. 433-48.
- GÖDEL, K. (1931). On Formally Undecidable Propositions of *Principia Mathematica* and Related Systems I, in Van Heijenoort (1967), pp. 592-617.
- GÖDEL, K. (1933). Zur intuitionistischen Aritmetik und Zahlentheorie, *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums*, v.4, pp. 43-38.
- HERBRAND, J. (1931). On the Consistency of Aritmetic, in Van Heijenoort (1967), pp. 618-28.
- HILBERT, D. (1925). On the Infinite, in Van Heijenoort (1967), pp. 367-92.
- HILBERT, D. e BERNAYS, P. (1934). *Grundlagen der Mathematik* (Berlin, Springer)
- KOLMOGOROFF, A. N. (1925). On the Principle of Excluded Middle, in Van Heijenoort (1967), pp. 414-37.
- REID, C. (1986). *Hilbert-Courant* (New York, Springer-Verlag).
- SIEG, W. (1988). Hilbert's Program Sixty Years Later, *The Journal of Symbolic Logic*, v. 53, pp. 338-48.
- SKOLEM, T. (1923). The Foundations of Elementary Arithmetic Established by Means of the Recursive Mode of Thought, Without the Use of Apparent Variables Ranging Over Infinite Domains, in Van Heijenoort (1967), pp.302-33.
- TAIT, W. W. (1981). Finitism, *Journal of Philosophy*, v. 78, pp. 524-46.
- VAN HEIJENOORT, J. (ed.) (1967). *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931* (Cambridge, MA, Harvard University Press).

<p><b>Jairo José da Silva</b> - Departamento de Matemática - IGCE - UNESP. e-mail: jairomat@rc.unesp.br</p>
---