Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 3 nº 5 (abril/2003 - setembro/2003) - pág. 27 -28
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

PROBLEMA 2

A não contradição dos axiomas da aritmética

Quando se trata de investigar os fundamentos de uma ciência, então deve-se estabelecer um sistema de axiomas que contenha uma descrição exata e completa das relações que subsistem entre os conceitos elementares dessa ciência. Os axiomas apresentados são, ao mesmo tempo, as definições desses conceitos elementares e cada afirmação interna ao âmbito da ciência, cujos fundamentos nós provamos, valem-nos somente como corretos caso eles se deixam deduzir por meio de um número finito de soluções lógicas oriundas desses axiomas. Em uma consideração mais próxima levanta-se a pergunta: *se algumas afirmações de um axioma isolado estão inter-relacionadas e se assim, neste axioma, não há componentes comuns que devam ser eliminados, quando se chega a um sistema de axiomas que são completamente independentes?*

Frente a uma infinidade de questões que são colocadas a respeito do axioma, que se caracteriza como o principal problema, eu gostaria de provar que os mesmos não são contraditórios entre si. Isto significa que nunca se pode chegar a resultados por razões de um mesmo número finito de soluções lógicas que estão em contradição uma com a outra.

Em geometria consegue-se provar a falta de contradição do axioma através da construção de um campo apropriado de números, de modo que os axiomas geométricos correspondam a relações análogas entre os números deste campo. Toda contradição na dedução de axiomas geométricos precisa ser reconhecível na aritmética deste campo de números. Desta maneira é atribuída a prova desejada para a compatibilidade dos axiomas geométricos ao teorema da compatibilidade dos axiomas aritméticos.

Para se provar a não contradição dos axiomas aritméticos necessita-se, em contrapartida, de um caminho direto. Os axiomas de aritmética são, essencialmente, nada mais do que as regras conhecidas do cálculo, com a adição do axioma de continuidade. Eu os resumi recentemente[1] e nesse processo eu substitui o axioma da continuidade através de dois axiomas mais simples: o conhecido axioma de Arquimedes e um novo axioma de conteúdo, que o número forma um sistema de coisas que, na manutenção do total de axiomas restantes, não é mais capaz de se ampliar (axioma da perfeição), Estou convencido de que é possível achar uma prova para a não contradição dos axiomas aritméticos, quando se trabalha com os métodos finais conhecidos da teoria dos números irracionais, considerando o objetivo caracterizado e modificando de maneira apropriada.

Para caracterizar o significado dos problemas sob um outro ponto de vista, gostaria de acrescentar as seguintes observações. Quando se atribui a um conceito características

1 Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, vol. 8 (1900), p. 180.

que se contradizem entre si, então eu digo: o conceito não existe matematicamente. Assim, não existe matematicamente, por exemplo, um número real cujo quadrado é igual a -1. Todavia, pode-se provar que as características atribuídas ao conceito nunca pode conduzir a uma contradição pela aplicação de um número finito de processos lógicos, assim eu digo que a existência matemática do conceito (por exemplo, de um número ou uma função que satisfazem certas condições) é provado. No caso apresentado, onde se trata de axioma de números reais em aritmética, a prova para a compatibilidade dos axiomas é, ao mesmo tempo, a prova para a existência matemática do sistema completo dos números reais ou do continuum. De fato, quando a prova para a compatibilidade dos axiomas é realizada completamente, perdem-se, com toda razão, as idéias que foram expressas até agora contra a existência do sistema completo dos números reais. Certamente, o sistema completo de números reais, isto é, o continuum, de acordo com o ponto de vista indicado a pouco, não é a totalidade de todas as possíveis séries em frações decimais, ou a totalidade de todas as leis possíveis de acordo com as quais os elementos de uma sucessão fundamental podem proceder. Porém um sistema de coisas, cujas relações mútuas são governadas através dos axiomas colocados, e para as quais todas, e apenas para essas, é verdade que pode ser derivado dos axiomas por um número finito de processos lógicos. Apenas neste sentido, em minha opinião, é que o conceito de continuum é estritamente e logicamente compreensível. De fato, ele corresponde também, como me parece, ao que a experiência e a intuição nos fornece. O conceito de continuum, ou também o conceito do sistema de todas as funções, existe então exatamente no mesmo sentido como o sistema completo dos números racionais, como o sistema de números cardinais ou também como as classes de potências numéricas superiores de Cantor. Estou convencido de que pode ser provado no sentido que eu descrevi, da mesma maneira que o continuum, distinto do sistema de todas as potências, ou também de todos os Alephs de Cantor, para os quais, como se apresentam, não pode ser colocado um sistema de axiomas compatíveis, por isso, em meu modo de caracterizar, não há um conceito matemático.

* * *