

PROBLEMA 7

*Irracionalidade e Transcendência de determinados Números**

Os teoremas aritméticos de Hermite sobre função exponencial e sua extensão através de Lindemann são certamente da admiração de todas as gerações de matemáticos. Mas ao mesmo tempo desperta em nós a tarefa de trilharmos um caminho progressivo. Então eu gostaria de esboçar uma classe de problemas que, em minha opinião, deveriam ser os próximos a serem atacados. Quando nós, em especial, reconhecemos na Análise as importantes funções transcendentais, de modo que aceitamos valores algébricos a partir de conhecidos argumentos algébricos, então parece-nos que este fato coloca-se particularmente notável e a pesquisa realizada é digna.

Realmente, nós esperamos que funções transcendentais assumam, em geral, valores transcendentais, para até mesmo argumentos algébricos, e, embora nos é bem conhecido, de fato, existem funções transcendentais inteiras que até mesmo possuem valores racionais para todos os argumentos algébricos, nós ainda consideraremos altamente provável que, por exemplo, a função exponencial e^{iz} , que evidentemente tem valores algébricos para todos os argumentos racionais z , levará, por outro lado, sempre a valores transcendentais para valores algébricos irracionais do argumento z . Nós também podemos dar para esta afirmação uma forma geométrica, como segue: *Se, em um triângulo isósceles, a relação do ângulo da base para o ângulo do vértice é algébrica mas não racional, a relação entre base e lado sempre é transcendental.* Apesar da simplicidade desta afirmação e de sua semelhança para com os problemas resolvidos por Hermite e Lindemann, eu considero a demonstração deste teorema muito difícil, como também a demonstração, que *a potência α^β para uma base algébrica α e um expoente algébrico irracional β , por exemplo o número $2^{\sqrt{2}}$ ou $e^\pi = i^{-2i}$, sempre representa um transcendente ou pelo menos um número irracional.* É sabido que a solução deste e de problemas semelhantes nos conduz a métodos completamente novos e para uma nova perspicácia na natureza de especiais números irracionais e transcendentais.

* * *

* Traduzido do alemão para o português por Sergio Nobre. Revisão da tradução feita por Nelo da Silva Allan.