Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 4 nº 7 (abril/2004 - setembro/2004) - pág. 97 - 102
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

ENSAIO/RESENHAS

Verilda Speridião Kluth

UMESP – Brasil

(aceito para publicação em janeiro de 2004)

CORRY, Leo. *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures.* Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser, 1996, 460 pages.

O objetivo do autor ao escrever este livro é descrever, em detalhes e em suas formas originais, os conceitos que provocaram o surgimento das estruturas em Matemática e o desenvolvimento do estágio inicial da Teoria das Categorias apoiando-se em trabalhos de importantes matemáticos dos séculos XIX e XX numa perspectiva analítica constituída por dois domínios de discurso das disciplinas científicas: *corpo de conhecimento* e *imagem de conhecimento,* e pelas intrínsecas relações entre eles explicitadas na introdução da obra. A análise dos textos matemáticos e de História da Matemática é subdividida em duas partes intituladas *Estruturas nas Imagens da Matemática* e *Estruturas no Corpo da Matemática*.

Para o autor, as disciplinas científicas tratam de dois tipos de questões: aquelas sobre o conteúdo do objeto da disciplina e as relevantes à disciplina ou às metaquestões. Os dois tipos de questões definem os dois domínios de discurso já mencionados — o *corpo de conhecimento* e a *imagem do conhecimento*.

O *corpo de conhecimento* inclui afirmações sobre o conteúdo do objeto da disciplina: teorias, fatos, métodos e proposição de problemas; enquanto a *imagem do conhecimento* inclui pretensões que expressam conhecimento sobre a disciplina em si. Assim, a *imagem de conhecimento* cobre as visões cognitivas, normativas e científicas relativas à disciplina.

A separação esquematizada do conhecimento científico nestes dois domínios pode prover uma perspectiva bastante útil para o estudo da história da ciência. No caso particular da matemática, a relação *corpo e imagem* é semelhante àquela entre um texto e o seu contexto, portanto o *corpo e a imagem de matemática* aparecem na atual história da disciplina como domínios orgânicos interconectados. A análise na perspectiva proposta abre a possibilidade de formular e prover meta-afirmações sobre a disciplina Matemática de dentro do *corpo de conhecimento matemático*.

Guiado pelo caráter reflexivo da matemática, o autor faz uma análise minuciosa do trabalho de diversos matemáticos para esclarecer que a abordagem estrutural em Matemática não se deve ao fato de seus conceitos tornarem-se claros ao serem formulados abstratamente. A abordagem estrutural em Matemática envolve processos complicados que tomam lugar em diferentes disciplinas, em diferentes ritmos e é motivada por diversas maneiras de referir-se à Matemática, conseqüentemente, a natureza e a evolução da abordagem estrutural em Matemática são melhor entendidas quando esta abordagem é pensada como uma específica *imagem do conhecimento matemático,* podendo ser idealizada como parte de algum processo histórico particular, neste caso, envolvendo a Álgebra e a interação entre *corpo e imagem de conhecimento* nesta disciplina entre 1860 e 1930, principalmente na Alemanha, temas que o autor aborda sob o título de *Estruturas nas Imagens da Matemática*.

Corry tece, primeiramente, considerações sobre as obras de Van der Waerden: *History of Algebra – from al-Kharizmi to Emmy Noerther* (1985) e *Moderne Algebra* (1930), obra que consolida o movimento estrutural na Álgebra. Este movimento tem suas raízes no século XVIII, quando a álgebra era o ramo da Matemática que tratava da teoria das equações polinomiais, incluindo técnicas de resolução e análise das relações entre raízes e os coeficientes de um polinômio, interesse matemático que perdura no século XIX e que se estende para invariantes algébricos e determinantes. Paralelo a isto, a *Teoria dos Números* tratava de problemas de divisibilidade, congruência e fatoração.

O processo de transformação de uma velha para uma nova imagem da álgebra é discutida, na obra de Corry, sob a perspectiva do desenvolvimento da *Teoria dos Ideais,* que se inicia no trabalho de Richard Dedekind (1831–1916) , como uma das correntes inspiradas no trabalho de Galois (1811–1832). Porém, anterior à esta discussão, o autor comenta o trabalho de Joseph A. Serrat (1819–1885), *Cours d'algèbre supérieure*; Camille Jordan (1838–1921), *Traité des substituions et des équations algèbriques*; O. Hölder (1889), *Zurückführung einer beliebigen algebraischen Gleichung auf einer Kette von Gleichungen*; e outros com o objetivo de fazer um sucinto relato do estágio de desenvolvimento da *Teoria de Galois*, evidenciando o trabalho de Heinrich Weber (1842–1913) publicado em 1893, *Die allgemeinen Grundlage der Galois'schen Gleichungsteorie*, no qual a *Teoria de Galois* não é somente vista como uma análise do problema da resolução de equações, mas como um estudo da interação entre grupos e corpos definidos em uma formulação abstrata.

De acordo com o autor, os freqüentes acontecimentos na história da Matemática, por volta de 1928, provocam a necessidade de uma compilação e uma exposição sistemática dos avanços.

Muitos matemáticos investem nesta direção, porém o trabalho de Van der Waerden renova o texto clássico da álgebra e expande a idéia de estrutura algébrica. O livro *Moderne Algebra* tem a intenção de definir os diversos domínios algébricos e de tentar elucidar totalmente suas estruturas. Nele, as idéias matemáticas são apresentadas por caminhos abstratos, motivo pelo qual é usual a identificação da abordagem estrutural com o moderno método axiomático, porém isto não implica que haja uma conexão lógica entre os dois. Em verdade, Van der Waerden explora ao máximo as vantagens do método axiomático para compilar e expor idéias que provocaram uma mudança fundamental na concepção da álgebra.

Para criar uma argumentação sólida e consistente sobre a afirmação acima, Corry inicia pelo estudo de Dedekind, porque a imagem de seu trabalho revela noções estruturais.

O estudo de Dedekind sobre a *Teoria de Galois*, encontra-se em *Nachlass*, manuscritos publicados após sua morte. O assunto é abordado seguindo sua própria imagem da Matemática centrada na busca de definições de conceitos básicos claramente formuladas, capazes de formar uma argumentação geral e sólida. Noções rigorosas de corpo e grupo aparecem naturalmente neste contexto.

O estudo das propriedades levam Dedekind a introduzir, mais tarde, o conceito de ideais, pois sua intenção era encontrar um princípio. Embora conhecesse os trabalhos de Carl Friedrich Gauss (1777–1855), Ernst Eduard Kummer (1810–1893) e Weber, ele constrói seu próprio caminho. Com sua *Teoria dos Ideais*, apresentada em uma primeira versão em 1871, e posteriormente em 1879 e 1894, o problema da fatoração única em extensão generalizada torna-se um foco de atenção na *Teoria dos Números*.

Corry entende que a *Teoria dos Ideais* proposta por Dedekind é deduzida de uma álgebra totalmente elaborada por módulos. A teoria tem sua atenção concentrada nas coleções e nos números contidos nelas e as operações são fundamentadas nas propriedades destas coleções. O caminho no qual os conceitos inovadores da teoria são definidos e usados ilustram como as generalizações são desenvolvidas em conexão com a sua estratégia de formular conceitos refinados que emergem organicamente do conteúdo técnico específico da teoria que ele está investigando.

O trabalho de Dedekind é base para o trabalho de Emmy Noether (1882–1935), porém entre estes dois momentos do desenvolvimento das estruturas algébricas estão outros matemáticos, como David Hilbert (1849–1925); Kurt Hensel (1861–1941), com a Teoria dos Números p-adicos; Ernst Steinitz (1871-1928), com a Teoria Algébrica dos Corpos; Alfred Loewy (1873–1935); e Abraham Fraenkel (1891–1965), dos quais o autor aborda o trabalho por considerá-los de profunda importância para a compreensão das estruturas na imagem da Matemática.

Os três componentes do trabalho de Hilbert selecionados para serem descritos foram: a teoria dos invariantes algébricos, a teoria dos números algébricos e a axiomática.

A contribuição de Hilbert na teoria dos invariantes era similar à clássica imagem do século XIX presente no trabalho de Dedekind e Weber e na teoria dos números algébricos tratava-se da construção de uma frutífera combinação das técnicas de Leopold Kronecker (1823–1891) e Dedekind. Em sua obra *Zahlbericht*, Hilbert produz uma exaustiva sistematização dos resultados existentes da *Teoria dos Números*. Os ideais são ideais no corpo de números, ele não tentou usar ideais como um instrumento abstrato para deduzir uma análise que unificasse fatoração em corpos numéricos e sistema de polinômios, este passo só foi dado por Emmy Noether. Para Hilbert, grupos e corpos eram entidades matemáticas diferentes quanto à natureza. Corpos seriam numéricos e grupos seriam não-numéricos, portanto eles não comungavam da mesma idéia matemática, ou seja, a idéia de estrutura algébrica lhe era desconhecida.

O seu trabalho *Grundlagen der Geometrie*, de 1899, faz com que Hilbert, em 1920, seja conhecido como um pesquisador da fundamentação Matemática que se utilizava do método axiomático moderno. Neste trabalho, os axiomas de Hilbert eram meios para expressar "nossa" intuição básica de espaço e para permitirem as deduções de todo o corpo de conhecimento geométrico, a partir deles. O impacto da pesquisa axiomática de Hilbert junta-se ao "formalismo", e o seu nome é associado à chamada "crise fundamental", por volta de 1930, que era vista como promotora de uma visão da matemática como um jogo vazio e formal.

Impulsionado pelo trabalho de Hilbert, os sistemas de postulados foram analisados por pesquisadores nos Estados Unidos. Chega-se ao refinamento de construir sistemas de postulados independentes e consistentes, possibilitando seu uso como definições. Toda a análise dos sistemas de postulado envolveram dois objetivos: em primeiro lugar, os postulados são ponto de partida para a pesquisa de uma determinada disciplina da matemática, neste caso, são apenas instrumentos; e em segundo lugar, atividades matemáticas autônomas foram desenvolvidas quando enfocadas a partir do sistema de postulados em si, como um objeto de estudo.

Porém, segundo Corry é no trabalho de Steinitz, intitulado de *Algebrische Teorie der Körper*, que encontra-se o âmago do pensamento estrutural, porque ele se propõe a alcançar uma visão global de todos os tipos possíveis de corpos e de estabelecer os elementos básicos de suas inter-relações. O estudo dos corpos sugere que não se é necessário partir de vários sistemas de números com suas conhecidas propriedades para assegurar uma fundamentação conceitual da álgebra. Também pode-se vir no sentido contrário, a partir das inter-relações das estruturas numéricas. Suas idéias vão ser trabalhadas por outros matemáticos, como Abraham Frankel. Porém, na avaliação do autor, é o trabalho de Emmy Noether que consolida a imagem estrutural da álgebra, não só por causa da aplicação sistemática de um princípio metodológico básico, mas também pela ampla variedade de domínios algébricos que ela considera.

Em um artigo de 1915, Emmy ocupa-se com o estudo de um domínio generalizado de inteiros transcendentes definidos por meio de propriedades abstratas. Seu interesse por módulos e ideais inicia-se em 1917. Ela generaliza o teorema da decomposição única de um polinômio em fatores irredutíveis do caso de um x indeterminado para o caso de n variáveis. Na teoria de operadores diferenciais, ela e Schmeider tentam mostrar que a decomposição de operadores diferenciais podem ser formulados em termos de mínimo múltiplo comum de ideais. Neste trabalho, o autor afirma, está manifesta a influência de Dedekind tanto na formulação de conceitos quanto na abordagem metodológica geral. Nele são discutidos o domínio dos operadores, os ideais, o grupo classe residual e suas inter-relações. Desenvolve ainda, em 1921, a *Teoria dos Ideais* no domínio dos anéis, que unifica a teoria algébrica de corpos com a dos polinômios, tendo como base o conceito abstrato de anéis. Ela foi a primeira a identificar a relevância desta conexão. O autor conclui dizendo que o trabalho de Emmy reúne todos os aspectos que caracterizam a álgebra moderna abstrata como uma disciplina de estruturas.

Sob o título de *Estruturas no Corpo da Matemática*, o autor expõe três teorias matemáticas no sentido de elucidar o conceito de estrutura em Matemática. A *Teoria das Estruturas de Oystein Ore*, *Teoria das Estruturas de Bourbaki* e *Teoria das Categorias.*

O programa de Ore era uma tentativa de desenvolver uma fundamentação geral para toda a álgebra abstrata usando a noção de reticulados que ele chamou de **structure**. Sua imagem da Matemática e suas noções básicas estão profundamente ligadas às de Dedekind principalmente as que aparecem no artigo Dualgruppen, e às de Emmy.

Entre 1930 e 1934, Ore pesquisa corpos não-comutativos e polinômios não-comutativos. Em 1935, em seu artigo *Annals of Mathematics,* Ore publica toda a sua teoria sobre **structure**. Para complementar o seu programa, ele apresenta uma versão generalizada da *Teoria de Galois*. Corry explicita também as diferenças entre os trabalhos de Garrett

Birkhoff e de Oystein Ore e a suas contribuições para com o desenvolvimento da *Álgebra Universal*, que dá origem à *Teoria dos Modelos*.

Segundo Corry, a difundida identificação da Matemática contemporânea com a idéia de estrutura tem sido feita com a identificação do movimento estrutural com o nome de Bourbaki. Embora a intenção do autor, neste capítulo, seja a de analisar as reais influências da *Teoria das Estruturas de Bourbaki* no corpo de conhecimento matemático, ele também analisa fatos que descrevem a influência exercida pelos matemáticos que atuavam sob o pseudônimo Nicolas Bourbaki, criado nos anos de 1930, em outros âmbitos culturais que não o da Matemática.

O autor estuda a imagem da Matemática de Bourbaki examinando os trabalhos matemáticos e as avaliações históricas publicadas sobre o grupo. Jean Dieudonné é o matemático que prestou mais declarações em nome do grupo e sobre sua concepção. Em 1948 publicou um artigo que, mais tarde, tornou-se um manifesto programático do grupo: *The Architecture of mathematics*. Ele, como Hilbert, acreditavam na unicidade da Matemática. Contudo Dieudonné queria ir além da busca de um núcleo de diferentes partes. Ele declara que "[...] o método axiomático ensina-nos a olhar para a profunda razão subjacente de tal descoberta." (Corry, 1996: 308). O autor afirma que Dieudonné, com estas palavras, propõe a idéia primeira de estruturas matemáticas conectada com o método axiomático e com a central visão unificadora da matemática que é próprio da imagem de Bourbaki e que pode ser vista como uma extensão da imagem de Van der Waerden, pois este apresentara o todo da álgebra como uma hierarquia de estruturas e os membros do grupo apresentaram uma porção bastante grande da Matemática em um caminho similar. Além disso, tentaram elucidar o que é a abordagem estrutural e por que ela seria importante para a Matemática, como o fez Van der Waerden com a álgebra. O trabalho estrutural de Bourbaki no território da matemática pura era motivado e intencionado pela esfera das aplicações. Era uma tentativa formal e geral para elucidar as idéias não formais das estruturas matemáticas.

O autor passa, então, a analisar a *Teoria das Categorias*. Os conceitos de categoria e funtor são primeiramente definidos por Samuel Eilenberg e Saunders Mac Lane em 1942, porém foram precisos alguns anos até que a teoria se tornasse uma disciplina autônoma com método particular, tendo um conjunto de problemas abertos, uma comunidade de pesquisadores estáveis e um senso de identidade. Nos anos de 1960, a teoria apresenta uma articulação conceitual unificada capacitando uma manipulação efetiva de conceitos de alguns âmbitos como álgebra, topologia, lógica e outros. Por ser o objeto da teoria das categorias as diferentes disciplinas matemáticas abstratamente consideradas, a teoria fornece instrumentos e uma perspectiva conveniente, do ponto de vista da matemática formal, para elucidar a noção não-formal de estrutura matemática.

A abordagem das categorias não só omite a natureza dos elementos como também a sua real existência. Em conseqüência disso, a teoria formaliza a idéia de uma estrutura matemática por meio das propriedades de seus "morfismos". A noção de naturalidade que usualmente era tratada de maneira ingênua na matemática moderna é definida por Eilenberg e Mac Lane formalmente, numa primeira versão, no âmbito da teoria dos grupos e, posteriormente, em 1945, sob o título de *General theory of Nature Equivalence*.

Corry faz uma análise da *Teoria das Categorias* com o programa de Ore destacando convergências. Tece uma minuciosa descrição dos primeiros trabalhos da *Teoria das Categorias* que seriam avançados por Alexander Grothendieck, David Buchabaum e Daniel Kant, assim como suas interseções com o trabalho de Bourbaki.

Embora a *Teoria das Categorias* não tenha atingido o seu objetivo inicial de encontrar uma unidade em toda a matemática, ela traz uma contribuição meta-matemática substancial, ao fornecer uma linguagem de considerável poder para unificar diversos âmbitos da Matemática e ao provocar problemas meta-matemáticos em uma direção diferente.

Feitas as análises acima, o autor indaga: como o desenvolvimento das três teorias apresentadas afetaram a imagem da Matemática? Ele conclui que tanto a *Teoria das Categorias* como as *Estruturas de Bourbaki* são tentativas de formalizar a idéia não-formal de estruturas matemáticas. Tais teorias têm sido vistas como uma sucessão de estágios em direção à elucidação reflexiva da essência de estrutura. Na opinião do autor, dizer que a *Teoria das Categorias* é uma continuação natural da *Teoria das Estruturas* é somente um resultado de uma descrição da crença do processo histórico atual.

A *Teoria das Categorias*, apresentada no trabalho de Lawvere, *Topos Theory,* abre novos horizontes, tanto para a teoria quanto para a fundamentação matemática, na qual as categorias substituiriam os conjuntos. Entretanto, a *Teoria das Categorias* não fornece a fundamentação última para a matemática. Isto reforça uma tendência "quase empírica" da filosofia da matemática de que tal solução não exista.

O autor termina seu livro afirmando que, no futuro, é esperado que tenhamos uma organização reflexiva e, portanto, não-contingente, do conhecimento Matemático, embora existam, na atualidade, opiniões autoritárias contrárias. A situação colocada é a seguinte: é impossível dar-se uma definição matemática para a questão "o que é a essência da álgebra?". As definições sociológicas e indiretas permanecem somente admissíveis.

Verilda Speridião Kluth – FACET – UMESP.
Endereço: Rua do Sacramento, 230 - 09640-000 - São Bernardo do Campo– SP.
E-mail: verilda.kluth@metodista.br