Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 4 nº 8 (outubro/2004 - março/2005) - pág. 105 - 122
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

BAIRE, FRÉCHET Y LOS INICIOS DE LA TOPOLOGIA DE CONJUNTOS DE PUNTOS[1]

Luis Carlos Arboleda
Universidad del Valle – Colômbia

Luis Cornelio Recalde
Universidad del Valle – Colômbia

(aceito para publicação em agosto de 2004)

Resumen

El objetivo de este artículo es avanzar en el estudio de la influencia ejercida por René Baire en las investigaciones de Maurice Fréchet sobre topologia conjuntista y teoria de la dimensión. Concretamente se analizan algunos aspectos que movilizaron el pensamiento de Fréchet, y que le permitieron concretar numerosos tópicos concernientes a la convergencia generalizada de sucesiones, la noción de invarianza en el paso al límite, la caracterización de la estructura del espacio de "dimensión cero", y algunas otras nociones topológicas que Baire tuvo que incorporar en sus investigaciones sobre teoría de funciones.

Palabras-clave: Historia de las Matemáticas, Topología de conjuntos de puntos, Espacio de Baire, Espacio de Fréchet, Teoría de la Dimensión

Abstract

The aim of this paper is to study the influence exerted by René Baire on the works of Maurice Fréchet related with set point topology and dimension theory. Some aspects are analyzed that mobilized the thought of Fréchet, and that allowed him to fix concret topics concerning the generalized convergence of sequences, the invariant in the passage to the limit, the structure of the "dimension zero" space, and other topological notions developed by Baire in his recherches on theory of functions.

Keywords: History of Mathematics, Point set Topology, Baire Space, Fréchet Space, Dimension Theory

---

[1] Artículo elaborado en el marco de Investigación realizada con apoyo de COLCIENCIAS, proyecto 1106-11-11374, y de pasantía realizada por uno de los autores en Paris en el equipo REHSEIS, Universidad Paris 7.

1. INTRODUCCIÓN

Entre todos sus contemporáneos Baire fue quien aprovechó de forma más sistemática y completa la teoría cantoriana de conjuntos. Tanto para fundamentar su teoría de funciones discontinuas como para contribuir al desarrollo de las nociones topológicas en conjuntos de puntos. Este hecho tuvo un impacto inmediato en las investigaciones en la materia durante de los dos primeros decenios del siglo XX. Al referirse en la "Introducción" de los Espaces Abstraits [FRE28, pp. 10-11] a los factores de consolidación de la teoría de conjuntos abstractos, Fréchet señala que durante mucho tiempo fue normal estudiar conjuntos abstractos por la propiedad de lo finito numerable. Pero que solamente a finales del siglo XIX se hizo usual su caracterización mediante la propiedad de lo infinito numerable o no numerable; evidentemente más por un interés filosófico y matemático que práctico.

El mérito le corresponde a Cantor, dice Fréchet. Pero también a algunos matemáticos franceses que esclarecieron el concepto de infinito matemático al separarlo de los principios oscuros e inaceptables que lo confundían en sus orígenes. En este comentario resuena la idea que se adjudica a Poincaré y que todavía era corriente en la época, según la cual la teoría cantoriana del infinito actual estaba empantanada por la presencia de oscuros principios metafísicos, correspondiéndole a algunos matemáticos franceses adelantar el esfuerzo de su clarificación. Gracias a la actividad de unos y otros se impuso una concepción tan "simple" de esta noción como la que tenemos del número entero. Agrega Fréchet:

> **Bastaría hacer jugar el rol de los dedos en la concepción de los veinte primeros enteros, a las sucesiones, en verdad menos accesibles a los sentidos, pero en todo caso definidas.**

Entre los matemáticos franceses contemporáneos a quienes se refiere Fréchet implícitamente, no hay duda que Baire fue uno de los que mayor incidencia tuvo en la primera etapa de su contribución a la definición y desarrollo de una teoría topológica en el dominio de los espacios abstractos.

En este trabajo se aportarán elementos de análisis, históricos y epistemológicos, sobre una cuestión que a nuestro modo de ver no ha sido suficientemente esclarecida: la influencia temprana que ejerció en Fréchet la lectura oportuna de varias publicaciones de Baire, entre ellas la Tesis de 1899 [Bai99], varias notas preliminares presentadas a la Academia de Ciencias de París, las *Leçons sur les fonctions discontinues* de 1905 [Bai05] y la memoria de 1909 *Sur la représentation des fonctions discontinues* [Bai09]. Nos interesa entender el tipo de apropiación que Fréchet habría hecho del tratamiento de Baire de la convergencia generalizada de sucesiones, la introducción de las nociones de homeomorfismo y de invarianza en el paso al límite, la caracterización de la estructura del espacio de "dimensión cero", y algunas otras nociones y técnicas topológicas que Baire instrumentó en su programa de investigaciones sobre la teoría de funciones discontinuas.

2. EL ESPACIO DE BAIRE EN TOPOLOGÍA Y ANÁLISIS

La instauración de la teoría de funciones de variable real en los trabajos de Baire, Borel y Lebesgue a comienzos del siglo veinte, dio lugar simultáneamente a la construcción de objetos matemáticos designados por propiedades topológicas radicalmente nuevas. Estos objetos se convertirían en objetos naturales del "nuevo análisis", en la medida que los matemáticos fueron descubriendo que sus propiedades tenían aplicaciones fecundas en varios campos matemáticos.

Uno de estos nuevos objetos fue precisamente la "clase de funciones de Baire". Con el estudio de nuevas propiedades intrínsecas, este objeto se transforma en los tratados de topología en el *espacio de Baire*. El espacio de Baire aparece como objeto natural en las formalizaciones del análisis, la topología, la teoría de conjuntos y la lógica, en donde son numerosas las aplicaciones de algunas de sus propiedades más representativas, como la llamada "propiedad de Baire" o "teorema de categoría de Baire".

Hoy sabemos que dado un espacio topológico E, $f: E \to R$ es una *función de Baire* si pertenece a algunas de las siguientes clases construidas en un proceso iterativo:

C_0: *Clase* 0, constituida por todas las funciones continuas.

C_1: *Clase* 1, a la cual pertenecen las funciones que son límite de sucesiones de C_0, sin pertenecer a C_0.

C_2: *Clase* 2, conformada por las funciones que se obtienen como límites de sucesiones de C_0 y C_1, sin pertenecer a ninguna de ellas.

–

C_n: *Clase* n, constituida por las funciones que se obtienen como límites de sucesiones de clases anteriores, sin pertenecer a ninguna de estas clases.

–

$C_!$: *Clase* !, constituida por las funciones f que se obtienen como límites de sucesiones$\{f_n\}$ tal que $\forall n$, $\exists i$ tal que $f_n \in C_i$; además, $\{f_n\}$ converge puntualmente a f, y f no pertenece *a* C_i, $\forall i$.

De manera similar se definen $C_{!+1}$, $C_{!+2}$, …, $C_{2!}$, … [Bai99, p. 117].

Un espacio de Baire queda completamente caracterizado por la siguiente definición:

Definición: Un espacio topológico *E*, es *espacio de Baire* si y sólo si la intersección de toda familia numerable de conjuntos abiertos densos en *E* es densa. [Chr77, p. 88]

Se demuestra que esta propiedad es equivalente a las siguientes:

a) El interior de toda unión contable de conjuntos densos en ninguna parte es vacío.
b) Siempre que la unión contable de subconjuntos cerrados de *E* tiene un punto interior, entonces uno de los subconjuntos cerrados tiene un punto interior.

Sabemos que el espacio *Q* de los números racionales con la topología usual de *R* (el conjunto de los números reales) inducida en *Q*, no es un espacio de Baire, pues *Q* es unión contable de conjuntos cerrados sin interior, los conjuntos unitarios (singletons). Por su parte, en teoría de conjuntos, el espacio de Baire es el conjunto de todas las sucesiones infinitas de números naturales, y se denota por *B*, N^N, o $!^{!}$.

Como *B* y *R* tienen la misma cardinalidad, *B* es utilizado para representar a *R* en ciertos contextos conjuntistas. Como espacio topológico *B* es homeomorfo al espacio *I* de los números irracionales con la topología inducida por la topología usual de *R*. En el homeomorfismo entre *B* y *R* se utilizan técnicas cantorianas de fracciones continuas. Sin embargo *B* es completo pero *I* no lo es, lo cual se deriva del hecho de que la propiedad de completez es métrica más no topológica.

Se demuestra que la propiedad (a) de Baire permite caracterizar a los espacios métricos completos. Esta clase fue el primer ejemplo histórico de espacios de Baire y la utilidad de sus aplicaciones en topología y análisis está asociada con el clásico teorema:

Teorema de Categoría de Baire: Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire.

Hemos heredado el término “categoría” del lenguaje que Baire utilizó en el estudio de las propiedades topológicas de los conjuntos que hoy llamamos “raros” y “magros”, contexto en el cual Baire introdujo su teorema.

Decimos que una parte *A* de un espacio topológico *E* es *rara* si el complemento de su adherencia es denso en toda parte. Una parte *magra* es la unión finita o numerable de partes raras. Mediante la noción de *conjunto de primera categoría* Baire designó la propiedad característica de las partes magras de un espacio topológico *E*, de poder expresarse como una unión contable de subconjuntos densos en ninguna parte de *E*. Un conjunto de *E* que no es magro se llama de *segunda categoría* en *E*. Los racionales son de primera categoría en *R*, mientras que los irracionales son de segunda categoría en *R*.

En este lenguaje de categoría (que obviamente no es el lenguaje de la teoría actual de categorías) decimos que un espacio topológico *X* es espacio de Baire si y solo si todo abierto no vacío es de segunda categoría en X. (De manera equivalente, X es espacio de Baire si y solo si la intersección contable de abiertos densos en X es densa). Por otra parte, sabemos que la clase de espacios métricos completos es un ejemplo de espacios de Baire en virtud de la propiedad de que la intersección numerable de abiertos densos en X es densa en X. En consecuencia, el Teorema de Categoría de Baire se expresa igualmente en los siguientes términos:

Todo espacio métrico completo es de segunda categoría.

En análisis funcional este teorema es una herramienta fundamental en la demostración del Teorema de Banach-Schauder y del teorema del grafo cerrado:

Teorema de Banach-Schauder: Sean X y Y dos espacios de Banach. Si A: $X \to Y$ es un operador lineal sobreyectivo, entonces A es una aplicación abierta (esto es, si U es un conjunto abierto en X, entonces $A(U)$ es un abierto en Y).

Definición: Sea una función T: $X \to Y$, se define el grafo de T al conjunto,

$$\{(x, y) \in X \times Y \,/\, y = T(x)\}.$$

Teorema del grafo cerrado: Sean X y Y dos espacios de Banach y T un operador lineal. T es continua si y sólo si su grafo es cerrado en $X \times Y$ (con la topología producto).

El teorema de Baire usualmente se emplea en cierto contexto de “conjuntos pequeños” con un tratamiento semejante al de los conjuntos de medida nula: la unión numerable de estos conjuntos sigue siendo “pequeña”. Pero los conceptos de “conjunto pequeño” y de “medida nula” son distintos, pues la recta real puede dividirse en dos conjuntos, uno de medida cero y otro de primera categoría.

Se puede observar que con excepción el requerimiento de la métrica, el teorema de categoría involucra tratamientos esencialmente topológicos. Con el fin de debilitar este requerimiento, los matemáticos emplean dos consideraciones estrechamente relacionadas con los aspectos históricos que vamos a tratar en este estudio. En primer lugar, al ser T un espacio topológico homeomorfo a un subconjunto abierto no vacío de un espacio métrico completo, hace que se conserve la propiedad de Baire mediante el homeomorfismo. Es decir, toda intersección contable de conjuntos abiertos densos en T es no vacía (de hecho, densa) en T. La segunda consideración En segundo lugar, se tiene que ver con el siguiente teorema:

Teorema: Si E es un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto, entonces E es un espacio de Baire [Chr77, p. 88].

Antes hemos dicho que la clase de los espacios métricos completos fue el primer ejemplo histórico de espacios de Baire, y que la importancia de este hecho quedaría registrada en los fundamentos de la topología y el análisis mediante el Teorema de Categoría de Baire. En lo que sigue se examinarán los tipos de convergencia generalizada que Baire y Fréchet introdujeron en espacios abstractos de manera independiente y más o menos por el mismo tiempo, para luego pasar a considerar el aporte de Fréchet en la caracterización de la estructura métrica del espacio de dimensión cero de Baire.

3. COMPARACIÓN DE LA CONVERGENCIA GENERALIZADA EN BAIRE Y FRÉCHET

El primer paso en la introducción de una estructura topológica en un espacio abstracto fue dado por Fréchet en una serie de trabajos publicados entre 1904 y 1906 en los cuales definió la convergencia de sucesiones numerables en la clase L de elementos de naturaleza cualquiera, y extendió a esta clase algunas propiedades fundamentales de los conjuntos lineales. En particular, Fréchet generalizó las nociones topológicas más usuales de los conjuntos de puntos utilizadas por Cantor y Baire como derivado, cerrado, perfecto e interior. Otras nociones originales suyas como la de *conjunto compacto*, se hicieron necesarias a la hora de extender a las clases L propiedades importantes de las funciones continuas. La convergencia generalizada es el punto de partida de una nota presentada el 2 de noviembre de 1904 a los *Comptes Rendus de la Academia de Ciencias de París* ([Fre04], pp.848-850), en la cual se trata de generalizar en un espacio abstracto, el teorema de Weierstrass sobre la existencia de las cotas superior e inferior de toda función continua en un intervalo cerrado y acotado.[2]

Sea una clase L de elementos de naturaleza cualquiera. Fréchet define la convergencia de una sucesión (a_n) de tales elementos con base en las siguientes condiciones:

1. Si $a_n = a$, para $n = 1, 2, \ldots$, entonces (a_n) converge a a;
2. Si (a_n) converge a a, entonces (a_{k_n}) converge a a para toda sucesión (a_{k_n}) de (a_n).

Hoy decimos que un espacio L de Fréchet es una clase L de elementos indeterminados en la cual la convergencia de sucesiones generalizadas está determinada por las condiciones 1 y 2 respectivamente.

En una segunda nota presentada a los *Comptes Rendus* de la Academia el 1 de enero de 1905 [Fre05], Fréchet observa que es útil abstraer algunas características comunes a la teoría de conjuntos de puntos, la teoría de líneas y la teoría de operaciones funcionales. En particular en la teoría de conjuntos, la noción de punto límite de elementos de naturaleza

[2] Ver [Arb80a] y también [Arb80b]

cualquiera es tan importante como la noción de potencia. Sea E' el conjunto de puntos límites o conjunto derivado de E. La propiedad del derivado de ser cerrado no siempre se puede generalizar en las clases L. En relación con esta propiedad Fréchet establece la primera conexión directa entre su teoría de los espacios abstractos y las clases de Baire. Veamos.

Sea (f_n) una sucesión de funciones diferentes con lim $f(x)$ para cada x, tal que para cada n existe una sucesión $(f_n^{(1)}, f_n^{(2)}, f_n^{(3)}, \ldots)$ con

$$\lim_{p\to\infty} f_n^{(p)}(x) = f_n(x)$$

para cada n y cada x. Se afirma que no necesariamente existen dos sucesiones crecientes $(p_1, p_2, p_3, \ldots)$ y $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ tales que

$$\lim_{i\to\infty} f_{n_i}^{(p_i)}(x) = f(x)$$

para cada x. Pero en la clase de las funciones medibles no existen sucesiones (p_i) y (q_i) tales que

$$\lim_{i\to\infty} f_{n_i}^{(p_i)}(x) = f(x)$$

excepto en un conjunto de medida cero. De allí concluye Fréchet que en alguna clase de Baire toda función es el límite de una sucesión de polinomios excepto en un conjunto de medida cero.[3]

Pasemos ahora a examinar algunas de las características del programa de investigaciones de Baire; particularmente en lo que tiene que ver con la apropiación de técnicas y conceptos de la teoría cantoriana de conjuntos con el propósito de fundamentar el estudio más general posible de las funciones de variable real. Baire advierte en el "Prefacio" de sus *Leçons sur la théorie des fonctions* ([Bai05], p. vii) que en el desarrollo de su programa supo aprovechar aquellas herramientas conceptuales que le parecieron útiles para resolver el problema de encontrar todas las funciones discontinuas representables por series de funciones continuas. Situándose en el "terreno sólido" de lo numerable y despojando al transfinito cantoriano de su carácter misterioso, Baire utilizó sistemáticamente las nociones de conjunto numerable, de potencia de un conjunto y de transfinito. También estudió sucesivamente las nociones de conjuntos cerrados, perfectos,

[3] Ver los detalles en [Arb80b, pp. 11-13]. Este asunto que Fréchet desarrolla con mayor cuidado en su [Fre06, pp. 15-57] daría lugar a un intercambio de ideas con Lebesgue. La parte de las cartas de Lebesgue a Fréchet ha sido estudiada en [Tad81].

no densos y derivados de todos los órdenes, y aplicó unas y otras al dominio de los conjuntos lineales "en donde era más fácil presentar las cosas en cierto sentido de una manera más visible".

En el estudio de estas aplicaciones Baire reconoció que era necesario generalizar la teoría cantoriana de conjuntos. En su nota de 1899 *Sur la théorie des ensembles* dice que esta teoría es "insuficiente" para desarrollar las investigaciones sobre funciones continuas que él estableció en su Tesis, y propone "remplazarla por una teoría más general, construida sobre bases nuevas que incluyan, como caso particular, la teoría de conjuntos sobre un continuo de n dimensiones". En seguida afirma que el objeto de la teoría es la noción de punto límite considerada en su expresión más abstracta; es decir, sin referencia a la intuición del continuo e incluso sin relación con las nociones de desigualdad y distancia. Así pues, la nota de 1899 está orientada a presentar los principios de una "teoría de conjuntos de sucesiones de enteros" que parte de introducir un concepto de convergencia generalizada en un espacio cuyos puntos son "grupos de enteros positivos" y al cual años más tarde designará como espacio de dimensión cero G_0.

En lenguaje moderno podemos interpretar la nota de Baire en los siguientes términos. El espacio G_0 está constituido por los conjuntos de las sucesiones de enteros positivos $(a_1, a_2, \ldots a_n, \ \ldots)$: $G_0 = \{\{a_n\} / a_n \in Z^+\}$.

Sea (A_i) con $i = 1, \ldots, v, \ldots,$ una sucesión de elementos del espacio G_0 tal que,

$$A_1 = [\ (a_1)_1, (a_2)_2, \ldots, (a_n)_1, \ldots\ ], \ldots\ A_v = [\ (a_1)_v, (a_2)_v, \ldots, (a_n)_v, \ldots\ ], \ldots$$

Se dice que el elemento $A_0 = [\ (a_1)_0, (a_2)_0, \ldots, (a_n)_0, \ \ldots\ ]$ es elemento límite de la sucesión (A_i), si para cada n existe un entero h tal que para $v>h$ se tiene que $(a_i)_v = (a_i)_0$, para $i = 1, 2, 3, \ldots\ n$.

Una vez introducida la convergencia generalizada de sucesiones en el conjunto de todas las sucesiones infinitas de enteros positivos (conjunto que como sabemos se denota actualmente por B, N^N o !˙, Baire extiende las nociones de conjunto cerrado, perfecto, completo, derivado, denso, y de conjuntos de primera y segunda categoría. Al final, Baire anuncia que en una próxima nota dará algunas aplicaciones de la teoría de conjuntos de sucesiones de enteros a la teoría de funciones discontinuas.

En el período de 1904 a 1906 en que Fréchet publica sus trabajos sobre la convergencia de sucesiones numerables en los conjuntos abstractos o espacios *L*, Baire retoma a fondo las ideas de su nota de 1899 en la "Segunda Parte" de su memoria *Sur la représentation des fonctions discontinues*. Esta memoria que podría ubicarse como uno de los primeros trabajos sobre la teoría de espacios abstractos, fue publicada de manera tardía en 1909. Al final, Baire incluye una nota en la cual señala la estrecha relación de su trabajo, primero con la teoría de Lebesgue sobre la representación analítica de funciones, y luego con la Tesis de Fréchet. En los capítulos II y IV de la memoria de 1909 Baire formaliza la presentación de la teoría de los conjuntos de sucesiones de enteros, con la denominación de *espacio de dimensión cero o espacio* G_0.

Fréchet se mostrará inmediatamente interesado por la estructura del espacio G_0 al menos en tres publicaciones. Al final de su memoria de 1909 sobre los conjuntos abstractos y el cálculo funcional, Fréchet señala que G_0 es un espacio métrico separable al cual se le pueden aplicar la mayoría de propiedades generales de los espacios abstractos que él ha estudiado en la segunda parte de su Tesis. La referencia al espacio G_0 como una de las "clases concretas" en la cual se aplican naturalmente las nociones abstractas de su tesis ([Fre10a], p. 26), se hace en el contexto de una discusión que entonces libraba Fréchet con Schoenflies sobre la supuesta extrema generalidad de tales nociones y sobre lo cual volveremos un poco más adelante.

En una segunda memoria publicada en 1910 y cuyo objeto es exponer los principios de su teoría sobre los tipos de dimensión de un conjunto abstracto [Fre10b], Fréchet demuestra que el espacio G_0 tiene un tipo de dimensión inferior a 1 pero en todo caso igual al tipo de dimensión del conjunto de los irracionales, por lo cual le parece inapropiada la denominación de "espacio de dimensión cero" que le había asignado Baire en su memoria de 1909. Más adelante volveremos sobre esta cuestión; por lo pronto mencionemos que en esta segunda publicación Fréchet llama la atención del lector sobre la importancia de esta noción de espacio G_0 en los "profundos" trabajos de Baire sobre las funciones discontinuas. Con lo cual se trata en buena medida de justificar su propio programa de investigaciones orientado a construir una teoría topológica de los espacios abstractos como plataforma para la generalización del análisis.

La tercera publicación en la cual Fréchet se refiere a G_0, ahora como "espacio de Baire", es los *Espaces Abstraits*, su obra de síntesis publicada en 1928 [Fre28]. Todo punto del espacio está representado por una sucesión infinita de enteros. Un punto $x = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ de G_0 es punto límite de la sucesión

$$x_n = (a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, a_3^{(n)}, \dots) \text{ de } G_0,$$

si para todo entero positivo m existe un número u_m tal que $a_k^{(n)} = a_k$, siendo $k = 1, 2, \dots, m$ y $n > u_m$.

A continuación Fréchet muestra la manera de adaptar la condición de convergencia del espacio de Baire a la definición de su Tesis de espacio distanciable (métrico); es decir, muestra cómo expresar la proximidad entre puntos de G_0 mediante la noción de distancia $d(x, y)$:

$$d(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{r},\ r=\text{mín}\left\{\left|a_n-\beta_n\right|\right\},\ \text{si}\ a_n\neq\beta_n\\ 0,\ \text{si existe}\ n\ \text{tal que}\ a_n=\beta_n\end{cases}$$

Por último Fréchet define la propiedad característica de las partes compactas del espacio de Baire:

> **Para que un conjunto *E* de puntos del espacio de Baire sea compacto es necesario y suficiente que para cada rango *q*, las coordenadas de rango *q* de los puntos de *E* sean acotadas en su conjunto. (**[Fre28], p. 118)

Observemos a este respecto que el espacio de Baire aparece en el libro de 1928 como uno de los más importantes espacios de funciones generalizadas (funcionales), a los cuales se les puede aplicar la propiedad de la compacidad que Fréchet introdujo en la nota de 1904.

Este hecho es bastante significativo pues, como sabemos, esta nota originó el moderno programa de investigaciones sobre la teoría de los espacios abstractos, en el cual la topología de la convergencia de sucesiones era la condición para generalizar a estos espacios propiedades tan importantes del análisis y la teoría de funciones como el teorema de Weierstrass sobre la existencia del máximo de una funcional continua en un compacto.

4. PROPIEDADES TOPOLÓGICAS DEL ESPACIO DE BAIRE DE INTERÉS PARTICULAR PARA FRÉCHET

Queda claro que inmediatamente aparece la memoria de Baire de 1909 Fréchet era el matemático mejor situado para reconocer y apropiarse de propiedades topológicas interesantes del espacio de Baire. Adicionalmente a las que hemos considerado antes, hay que mencionar la siguiente que es analizada en su primera publicación de 1910 sobre las dimensiones de un conjunto abstracto ([Fre10a], p. 155): el espacio G_0 es homeomorfo al conjunto H_1 de los números irracionales de la recta real, con la topología usual de R_1. De hecho la proposición que Baire demuestra en su memoria *Sur la représentation des fonctiones discontinues* ([Bai99], pp. 136-138), es más general: G_0 es homeomorfo al conjunto H_n de los puntos de R_n cuyas n coordenadas son números irracionales, provisto H_n de la topología inducida por la topología de R_n. Interesado como estaba en examinar los conjuntos lineales desde el punto de vista de su teoría de la dimensión, Fréchet aprovecha la correspondencia empleada por Baire[4] para mostrar que hay una equivalencia topológica entre H_n y H_1.

[4] En esencia la técnica de la demostración de Baire se basa en la expansión de los irracionales en fracciones continuas utilizada por Cantor al estudiar las relaciones entre las potencias de estos conjuntos. Es decir, la consideración de que todo irracional c de H_1 se puede representar "de una manera bien determinada" por una fracción continua: $c=\frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\dots}}=(a_1,a_2,\dots a_v,\dots)$ en donde a_v es un entero positivo.

Conviene recordar que mientras que Fréchet utiliza claramente la denominación de homeomorfismo[5] que parece haber tomado de Poincaré a través de Hadamard, Baire emplea el término aplicación: "Si entre los puntos de dos conjuntos P y Q [P y Q conjuntos de puntos, eventualmente de sucesiones de un espacio E^n, $n \geq 0$], existe una correspondencia biunívoca y reciproca, tal que a los puntos A_1, A_2, …, A_n, …, A de P, les corresponden respectivamente los puntos B_1, B_2, …, B_n, …, B de Q y que $lim\ A_n = A$ si y sólo si $lim\ B_n = B$, entonces decimos que la correspondencia entre P y Q es bicontinua y constituye una *aplicación* de P sobre Q". [Bai09, p.136]

Baire muestra inmediatamente que el conjunto triádico de Cantor con el cual inicia la presentación de la memoria de 1909 es homeomorfo (aplicable) a un subconjunto del espacio G_0 de dimensión cero[6]. Es decir, ambos conjuntos poseen propiedades de una estructura común; entre otras, las de ser perfectos, cerrados y, en términos modernos, totalmente no conexos. Esto no hace más que comprobar aquello en lo que Baire ha insistido en su memoria:

> **… que existe una analogía profunda entre las nociones de conjunto de puntos del espacio de dimensión *n* y el conjunto de sucesiones de enteros (espacio de Baire); esta analogía resulta enteramente (…) del hecho que en una y otra teoría las cuestiones tratadas son consecuencias más o menos distantes de la sola noción de límite.** ([Bai09], p. 132)

Fréchet entendió inmediatamente el sentido de la observación de Baire sobre la implicación de fondo de la noción de homeomorfismo y su aplicación al estudio de la estructura de los conjuntos de puntos. Al inicio de su trabajo de 1910 sobre la dimensión hace dos menciones reveladoras a esta cuestión de fondo. En primer lugar dice ([Fre10b], p. 146), que para que dicho estudio pueda hacerse de manera cabal es necesario extender el dominio de definición de la noción de homeomorfismo, de los espacios euclidianos de dimensión n a los espacios abstractos con convergencia generalizada o clases L. En segundo lugar dice que la analogía que se establece en términos de un homeomorfismo radica en última instancia en la invarianza del paso al límite ([Fre10b], p. 147).

Dugac ha recordado la opinión de Lavallée-Pousin sobre el aporte original de Baire y Lebesgue al introducir el concepto de "propiedades que se conservan en el paso al límite" en sus trabajos sobre las clases de funciones de Baire, y la clase de funciones de variación acotada respectivamente. Uno y otro obraron con lo que hoy podríamos llamar un tratamiento topológico de la cuestión. Habría que agregar el papel de Fréchet, lector

[5] La cuestión del homeomorfismo en Baire y Fréchet desde el punto de vista de los tipos de la dimensión fue estudiada por primera vez en [Arb81, p. 348]. La conexión entre el homeomorfismo y la invarianza de la dimensión en ambos autores es tratada en [Gis80] y en [Dal81].

[6] Dado que el conjunto triádico de Cantor corresponde al conjunto de sucesiones $\{a_n\}$, donde $\forall n$, $a_n = 0$ ó 2, visto en base 3, entonces constituye un subconjunto de G_0.

perspicaz de los trabajos de teoría de funciones y de integración de sus contemporáneos, quien supo capturar esta "intuición" y convertirla en piedra de toque de su programa de investigación. Fréchet situó el concepto de homeomorfismo en el cuadro más adecuado de los espacios L, y mostró a través de su apropiación en la teoría de tipos de dimensión la manera en que debería reconocérsele la connotación topológica a la técnica de la invarianza para clasificar, por ejemplo, los subconjuntos de R^n y ciertas clases de funciones de un número infinito de dimensiones.

Retornemos a los comentarios de Fréchet sobre la estructura del espacio de Baire. Hemos visto que Baire demuestra que existe un homeomorfismo entre el conjunto H_n de los puntos del espacio euclidiano E_n (Baire lo designa por G_n) cuyas coordenadas son irracionales, y el espacio G_0 dotado de la topología de convergencia de sucesiones asociadas al desarrollo en fracción continua de todo irracional. En particular, G_0 es homeomorfo a H_1. Pero también demuestra Baire que el conjunto $\{a_n \,/\, a_n = 0 \text{ ó } 2\}$, subconjunto de G_0, es homeomorfo al conjunto triádico de Cantor, un conjunto que es totalmente no conexo, lo cual le plantea una diferencia significativa con la estructura conexa de E_n (para $n = 1$).

En consecuencia no se pueden aplicar a G_0 las propiedades de conexidad y orden simple, relativas a los espacios de n dimensiones. Más aún, en tanto conjunto de las sucesiones fundamentales, G_0 es un conjunto disjunto perfecto, es decir denso en si mismo y cerrado. Baire muestra en la memoria de 1909 ([Bai09], p. 134) que G_0 puede descomponerse en un número finito o infinito de conjuntos disjuntos perfectos. Recordemos sobre este punto que en el contexto de una discusión que mantuvo con Schoenflies, particularmente en su publicación de 1910 sobre *Les ensembles abstraits et le calcul fonctionnel*, sobre la extrema generalidad de programa de investigación. Schoenflies había comentado en su influyente informe de 1908 sobre el estado de la teoría de conjuntos[7], que las nociones de la primera parte de la tesis de Fréchet eran extremamente generales y que era necesario abandonarlas a partir del momento en que se quería abordar el estudio de "clases concretas"'. Anotemos que en una época de comienzos de siglo en que todavía no existía un consenso sobre el valor intrínseco de la investigación sobre objetos matemáticos de naturaleza cualquiera, matemáticos muy connotados reprochaban a Baire y a Fréchet la extrema generalidad de sus trabajos sobre los conjuntos abstractos.[8]

Fréchet toma el espacio G_0 como ejemplo de espacios concretos a los cuales es posible aplicar la mayor parte de las generalizaciones que en su tesis se enunciaron para las clases L. Incluido el teorema de Cantor-Bendixson, cuya generalización a los espacios

---

[7] Schoenflies, A. (1908): Die Entwicklung der Lehre von der Punktmannigfaltigkeiten. Bericht erst. der Deutschen Math. Verein., Zweiter Teil, Leipzig. Fréchet se defendió a todo lo largo de su carrera de este tipo de reproches y críticas. Es interesante analizar la oposición "generalización-aplicaciones" específicamente en la teoría de los espacios abstractos, a la luz de la postura filosófica y epistemológica que él formula en el aparte "Una objeción" de su obra ([Fre28], pp. 19-20).

[8] En [Rec03] Recalde se refiere a las críticas de Émile Picard sobre la ausencia de las aplicaciones de los nuevos objetos que Baire introducía en sus investigaciones sobre teoría de conjuntos y teoría de funciones.

métricos había sido uno de los temas de interés de Fréchet a partir de su tesis doctoral[9]: toda parte separable y cerrada de un espacio métrico es la unión de dos conjuntos disjuntos, uno perfecto y el otro numerable. Esta propiedad es presentada por Fréchet en los *Espaces Abstraits* dentro de un acápite especial titulado "Generalización de un teorema de Baire"[10]. Así pues, la denominación de "dimensión cero" responde a la necesidad de Baire de caracterizar a este espacio en comparación con los espacios euclidianos, por naturaleza conexos[11]. Pero en su trabajo sobre la dimensión, escrito como se ha visto bajo la influencia notable del concepto de homeomorfismo y del tratamiento topológico a los espacios de Baire en la memoria *Sur la représentation des fonctions discontinues* [Bai06], Fréchet consideraba que esta denominación para G_0 no era apropiada al menos desde el punto de vista de su teoría de tipos de dimensión. Esta teoría consiste en lo esencial en un refinamiento de la comparación que hace Cantor de dos conjuntos G_1 y G_2 desde el punto de vista de su cardinalidad o potencia. Las definiciones básicas para subconjuntos G_1 y G_2 de los espacios L, son las siguientes ([Arb81, pp. 351-388):

a) Si G_1 es homeomorfo a una parte de G_2, el tipo de dimensión de G_1 es a lo sumo igual al de G_2: $dG_1 \leq dG_2$.

b) Si G_1 es homeomorfo a una parte de G_2 y G_2 es homeomorfo a una parte de G_1, se tendrá que $dG_1 = dG_2$ o $dG_2 = dG_1$.

c) Si se tiene que $dG_1 \leq dG_2$ y G_2 no puede considerarse de ninguna manera como homeomorfo a G_1 o a una parte de G_1, el tipo de dimensión de G_1 es inferior al de G_2: $dG_1 \leq dG_2$ o $dG_2 \leq dG_1$.

Fréchet formula y (a veces) demuestra propiedades importantes de los tipos de dimensión de subconjuntos de los espacios euclidianos, en particular de la recta y el plano. Entre ellas que existe un conjunto no numerable de tipos de dimensión todos ellos menores que dR_1, la dimensión de la recta real. Este resultado profundamente original para su época en la medida que introduce antes de Hausdorff la noción de dimensión no entera[Gis80, p. 75]. En conexión con esta proposición, Fréchet interpreta en los siguientes términos la dimensión del espacio G_0. Como G_0 es homeomorfo a H_1, el tipo de dimensión de G_0, dG_0, está comprendido entre 0 y 1; dG_0 es además el mayor de los tipos de dimensión menores a

---

[9] Fréchet [Fre10a] defenderá la utilización que hace Baire en [Bai05] (aparte IV de capítulo II) de los transfinitos en la demostración del teorema de Cantor-Bendixson, con dos argumentos: Primero, porque Baire "ha despojado a esta teoría de las consideraciones metafísicas que la oscurecían", y segundo, porque ha contribuido a destacar las ventajas de introducir este método allí en donde verdaderamente aporta nuevas precisiones.

[10] Es en [Fre28, pp. 234-235], en donde Fréchet afirma que un enunciado más preciso sería el siguiente: "Todo conjunto perfectamente separable y cerrado es la suma de dos conjuntos disjuntos, uno perfecto y el otro numerable e incluso diseminado (que no contiene ningún conjunto denso en si mismo)".

[11] En [Bai09, p. 134], Baire muestra que a diferencia de los espacios E_n, el conjunto de las sucesiones de puntos no es ordenado y, por consiguiente, no posee la característica genérica de estos espacios continuos de ser conexos. De ahí la denominación de conjunto de dimensión cero.

1. En consecuencia, la denominación de Baire de "espacio de dimensión cero" no es conveniente para designar al espacio G_0 de acuerdo con la teoría de los tipos de dimensión.
En su [Fre28], Fréchet resume lo esencial de una discusión que sostuvo con Urysohn en el año 1925 sobre la manera de caracterizar a G_0 desde el punto de vista de la dimensión, lo cual comportaba precisar las diferencias entre sus respectivas definiciones.[12] La cuestión quedaba resuelta al establecer Fréchet el siguiente resultado: "Existe identidad entre los conjuntos de dimensión cero en el sentido de Urysohn y los conjuntos de dimensión menor que 1 en el sentido de Fréchet" ([Fre28], p. 111). O en términos más generales, el número de dimensión en la definición de Urysohn es la parte entera del tipo de dimensión en la de Fréchet.

Referencias

[Arb79] ARBOLEDA, L. C. (1979) "Les débuts de l'école topologique soviétique: notes sur les lettres de Paul S. Alexandroff et Paul Urysohn á Maurice Fréchet." Archive History of Exact Sciences, Paris, 20, pp. 73-89.

[Arb80a] ARBOLEDA, L. C. (1980) *Contribution à l´étude des premières recherches topologiques*. Thèse de Doctorat, Paris.

[Arb80b] ARBOLEDA, L. C. (1980) *Las primeras investigaciones sobre espacios topológicos*. Memorias del X Coloquio Colombiano de Matemáticas, ICFES-Colciencias, Paipa.

[Arb81] ARBOLEDA, L. C. (1981) "Les Recherches de M. Fréchet, P. Alexandrov, W. Sierpínski et K. Kuratowski sur la Théorie des Types de Dimensions et les Débuts de la Topologie Générale. " *Archive for History of Exact Sciences*. V. 24, 4, Springer Verlag, Germany, pp. 339-388.

[Arb03] ARBOLEDA, L. C. Y RECALDE, L. (2002) "Fréchet and the Logic of the Constitution of Abstract Spaces from Concrete Reality." *Synthese*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, pp. 245-272.

[Arb99] ARBOLEDA, L. C. Y RECALDE, L. (1999) "Las Concepciones Socio-epistemológicas de Fréchet en sus Investigaciones sobre la Teoría de los Espacios Abstractos y la Topología General." En: O. Restrepo, y J. Amaya: *Ciencia y Representación*. CES, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, pp. 66-77.

[12] Ver al respecto [Arb80a], [Arb81] y [Gis80].

[Arb97] ARBOLEDA, L. C. Y RECALDE, L. (1997) "Las Concepciones sobre Matemáticas y Experiencia en Maurice Fréchet". *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, vol. VI, pp. 79-94.

[Bai97] BAIRE, René. (1897) "Sur la téorie générale des fonctions de variables reélles." *CRASP*, 125, pp. 691-694.

[Bai98a] BAIRE, René. (1898a) "Lettres à Emile Borel. " Cahiers du Seminaire d'Histoire des Mathematiques #11. Universite Pierre et Marie Curie, 1990, pp. 33-128.

[Bai98b] BAIRE, René. (1898b) "Sur les fonctions discontinues développables en séries de fonctions continues". *CRASP*, 126, pp. 884-887.

[Bai98c] BAIRE, René. (1898c) "Sur les fonctions discontinues qui se rattachent aux fonctions continues" *CRASP*, 126, pp.1621-1623.

[Bai98d] BAIRE, René. (1898d) "Sur el problème de l'intégration au point de vue des variables reélles. " *CRASP*, 125, 1897, pp. 1700-1703.

[Bai99] BAIRE, René. (1899) "Sur les Fonctions de variables reélles". *Annali di matem.pura ed appl*., (3), 3(1899), pp. 1-123.(*Œuvres Scientifiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1990, pp. 49-173).

[Bai05] BAIRE, René. (1905) *Leçons sur les fonctions discontinues*. Gauthier-Villars, Paris, nouveau tirage, 1930.

[Bai06] BAIRE, René. (1906) "Sur la représentation des fonctions discontinues." *Acta mathematica*, t. 30, p. 1-48.

[Bai07] BAIRE, René. (1907) "Sur la non aplicabilité de deux continus à *n* et *n*+1 dimensions." *CRASP*, 144, pp. 318-321.

[Bai09] BAIRE, René. (1909) "Sur la représentation des fonctions discontinues." *Acta mathematica*, t. 32, 1909.

[Bai27] BAIRE, René. (1927) "Sur l'origine de la notion de semi-continuité." *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 55, 141-142. (*Œuvres Scientifiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1990, pp. 528-529)

[Bai90] BAIRE, René. (1897-1927) Œuvres *Scientifiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1990.

[Chr77] CHRISTENSON, C.and VOXMAN, W. (1977) *Aspects of Topology*. New York and Basel, Marcel Dekker.

[Dal81] DALE, J. (1981) "The problem of the Invariance of Dimension in the Growth of Modern Topology, Part II." *Archive for History of Exact Sciences*, 25, 85-267.

[Dug76] DUGAC, Pierre. (1976) "Notes et documents sur la vie et Œuvre de René Baire." *Arch. Hist. Exact. Sci*. 15, # 4, pp., 297-383.

[Dug78] DUGAC, Pierre. (1978) Sur les fondements de l'analyse de Cauchy à Baire. Thèse de Doctorat d'état ès sciences mathématiques. L'Université Pierre et Marie Curie.

[Dug81] DUGAC, Pierre. (1981) "Des fonctions comme expressions analytiques aux fonctions représentables analytiquement." En: Joseph W. Dauben (Ed.), *Mathematical Perspectives. Essays on Mathematics and its Historical Development*. Academic Press, New York.

[Dug03] DUGAC, P. (2003) *Histoire de l'Analyse. Autour de la notion de limite et de ses voisinages.* Préface de Jean-Pierre Kahane. Vuibert, Paris.

[Eng77] ENGELKING, R. (1977) *General Topology*. Warszawa, Polish Scientific Publishers.

[Fre04] FRÉCHET, M. (1904b) "Généralisation d'un théoreme de Weierstrass." *CRASP*, 139, pp. 848-850.

[Fre05] FRÉCHET, M. (1905) "Sur les fonctions limites et les opérations fonctionnelles." *CRASP*, 140, pp. 27-29

[Fre06] FRÉCHET, M. (1906) "Sur quelques points du Calcul fonctionnel." Thèse de doctorat, Paris, 1906, *Rendiconti Circ. Mat. Palermo* 22 (1906), pp. 1-74.

[Fre10a] FRÉCHET, M. (1910a) "Les ensembles abstraits et le calcul fonctionnel." *Rendiconti Circ. Mat. Palermo* 30 (1910), pp. 1-126.

[Fre10b] FRÉCHET, M. (1910b) "Les dimensions d'un ensemble abstrait." *Math. Ann*. 68 (1910), 145-168.

[Fre24] FRÉCHET, M. (1924a) "La semi-continuité en géométrie élémentaire." *Nouvelles Ann. math*. (5) 3, pp. 1-9.

[Fre25] FRÉCHET, M. (1925) "Sur le prolongement de fonctionnelles semi-continues et sur l'aire des surfaces courbes." *Fund. math*. 7, pp. 210-224.

[Fre28] FRÉCHET, M. (1928) *Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'analyse générale*. Gauthier-Villars, Paris.

[Gis80] GISPERT, Hèléne. (1980) "Correspondance de Fréchet (1907-1926) et son apport à la théorie de la dimension." *Cahiers du Séminaire d'Histoire de Mathématiques*, #1 de 1980.

[Gis83] GISPERT, Hèléne. (1983) "Sur les fondements de l'analyse en France." *Archive for exact sciences,* 28, pp. 37-106.

[Gis90] GISPERT, Hèléne. (1990) "Principes de l'analyse chez G. Darboux et J. Houël (1870-1880), enjeux mathématiques, épistemologiques et institutionnels." *Revue d'histoire des sciences*, 43, p.p. 181-220.

[Gis91] GISPERT, Hèléne. (1991) "La France mathématique. La société mathématique de France (1871-1914)." *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences,* Paris.

[Gis95] GISPERT, Hèléne. (1995) "La théorie des ensembles en France avant la crise de 1905: Baire, Borel, Lebesgue et tous les autres." *Revue d'histoire des mathématiques,* pp. 39-81.

[Jam99] JAMES, I.M. (ed.). (1999) *History of Topology*. Amsterdam, North Holland.

[Kur66] KURATOWSKI, K. (1966) *Topology*, vol 1. New York and London, Academic Press.

[Leb02] LEBESGUE, H. (1902) "Integrale, Longueur, Aire." *Ann.Mat*., (3) 7, pp. 231-359.

[Leb03] LEBESGUE, H. (1903) "Sur la representation, à partir de $z = x+iy$, des functions continues de x et y." *Bull. Sci. Math*. (2), 27, 1903, pp. 82-84.

[Leb04] LEBESGUE, H. (1904) *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives.* Gauthier-Villars, 1904. 2[a] édition, 1928. Réédition: Chelsea publishing company Bronx, New York.

[Leb05] LEBESGUE, H. (1905) "Sur les functions représentables analytiquement." *J*. de *Math. Pures et Appl.,* sér. 6, 1, 1905, pp.139-216.

[Leb22] LEBESGUE, H. (1922) *Notice sur les travaux scientifiques*, *Œuvres* I, pp. 99-175.

[Lus14] LUSIN, Nicolas. (1914) "Sur un problème de M. Baire." *CRASP*. 158, pp. 1258-1261.

[Lus21] LUSIN, Nicolas. (1921) *Sur l'existence d'un ensemble non dénombrable qui est de première catégorie dans tout ensemble parfait*, Fund. Math., pp 155-157.

[Lus30] LUSIN, Nicolas. (1930) *Les ensembles analytiques et leurs applications*. Primera edición, Paris 1930. Segunda edición Chelsea Publishing Company, New York, 1972.

[Rec94] RECALDE, Luis. (1994) *Las técnicas cantorianas del infinito actual en el surgimiento de la topología conjuntista*. Santiago de Cali, Universidad del Valle, Tesis de Maestría.

[Rec01] RECALDE, L. (2001) "La teoría de conjuntos cantoriana y la representación de funciones: la clasificación de René Baire." *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, vol. IX, pp. 71-94.

[Rec03] RECALDE, L. *La clasificación de funciones de René Baire en el contexto histórico de las matemáticas*. Santiago de Cali, Tesis doctoral. Universidad del Valle, 2003.

[Rec04] RECALDE, L. *La teoría de funciones de Baire. La constitución de lo discontinuo como objeto matemático*. Universidad del Valle, Cali, 2004.

[Sie56] SIERSPINSKI, W. (1956) *General Topology*. Translated and Revised by C. Cecilia Krieger. Toronto, University of Toronto Press, 1956.

[Sie74] SIERSPINSKI, W. (1974) *Œuvres Choisies*. PWN, Editions scientifiques de Pologne, Warszawa.

[Tay82] TAYLOR, A. (1982) "A Study of Maurice Fréchet: I. His Early Work on Point Set Theory and the Theory of Functionals." *Archive for Hist. of Exact Sci*. 27, pp. 233-295.

[Tad81] TAYLOR, A. E., DUGAC, P. (1981): "Quatre lettres de Lebesgue à Fréchet." *Revue d'histoire des sciences*, vol. 34, pp. 149-169.

Luis Carlos Arboleda
Professor IEP-Universidad del Valle.
E-mail: arboleda@univalle.edu.co

Luis Cornelio Recalde
Professor Departamento de Matemáticas
Universidad del Valle.
E-mail: lurecal@yahoo.com