

O TEOREMA DE PITÁGORAS E MATEMÁTICOS AMADORES DO BRASIL

Bruno Alves Dassie
João Bosco Pitombeira de Carvalho

Universidade Estácio de Sá / PUC-Rio - Brasil

(aceito para publicação em maio de 2004)

Resumo

O objetivo deste artigo é mostrar o interesse por Matemática existente no Brasil por pessoas que não eram matemáticos profissionais. São reproduzidas dezoito demonstrações do teorema de Pitágoras e as comparamos com as que se encontram no livro clássico *The Pythagorean Proposition* de Elisha Scott Loomis, a fim de verificar quais delas estão incluídas nesta obra. Sete demonstrações foram compiladas pelo engenheiro André Rebouças e publicadas na *Revista do Instituto Polytechnico*, do Rio de Janeiro, e onze foram publicadas pelo professor Salomão Serebrenick na *Revista Brasileira de Mathematica Elementar*. Foi possível localizar com precisão a fonte de uma das demonstrações apresentadas por André Rebouças.

Palavras-chave: Teorema de Pitágoras, André Rebouças, Salomão Serebrenick, matemáticos amadores.

Abstract

The purpose of this paper is to show the interest in Mathematics, in Brazil, by persons who were not professional mathematicians. We reproduce eighteen proofs for Pythagora's theorem. We compare them to the proofs found in the classic work of Elisha Scott Loomis, *The Pythagorean Proposition* to see which were included in Loomis' book. The first seven proofs were collected by the engineer André Rebouças, and published in the journal of the *Instituto Polytechnico* in Rio de Janeiro and the last eleven were published by the mathematics teacher Salomão Serebrenick in the periodical *Revista Brasileira de Mathematica Elementar*. We were able to identify precisely the source of one of the proofs presented by Andre Rebouças.

Keywords: The Pythagorean proposition, André Rebouças, Salomão Serebrenick, amateur mathematicians.

Introdução

Na história da Matemática tradicional eram vistas contribuições de matemáticos eminentes e, na história do ensino da Matemática, durante muito tempo se deu atenção somente a programas, decretos, currículos.

Em 1942 Struik escreveu no prefácio de seu trabalho clássico

The sociology of mathematics concerns itself with the influence of forms of social organization on the organization on the origin and growth of mathematical conceptions and methods, and the role of mathematics as part of the social and economic structures of a period. (STRUIK, 1942, p. 58)

No entanto, o trabalho de Struik permaneceu isolado, e somente após o livro de Kuhn *The structure of scientific revolutions*, de 1962, iniciou-se uma discussão ampla sobre a sociologia da ciência, como em MEHRTENS (1976a, 1981) e BOS-MEHRTENS, (1977). Nesta nova historiografia não se fica limitado aos grandes nomes, feitos e documentos, mas se examina a Matemática dos “pequenos” matemáticos, dos praticantes anônimos ou quase anônimos da Matemática, dos professores, dos amadores. Igualmente, na história do ensino da Matemática, procura-se reconstruir o que foi o ensino em uma determinada época, utilizando cadernos de alunos, provas, anotações de professores, além dos documentos oficiais como decretos, programas, entre outros. Trata-se assim de fazer uma sociologia da Matemática, como exemplificado em MEHRTENS, BOS, SCHNEIDER, (1981)¹.

Neste trabalho, apresentaremos um total de 18 demonstrações do teorema de Pitágoras feitas por duas pessoas que não se dedicavam profissionalmente à Matemática. As sete primeiras foram compiladas pelo engenheiro brasileiro André Rebouças e publicadas na *Revista do Instituto Polytechnico*, do Rio de Janeiro; as outras onze foram publicadas pelo professor naturalizado brasileiro Salomão Serebrenick, na *Revista de Mathematica Elementar*, inicialmente publicada em Salvador, Bahia e posteriormente na cidade do Rio de Janeiro. Comparamos estas demonstrações com as que se encontram no livro clássico *The Pythagorean Proposition* de Elisha Scott Loomis (1940), a fim de verificar se algumas delas estão incluídas nesta obra. Reproduzimos, ao longo do texto, a nota de André Rebouças, lida em seção do Instituto Politécnico, e as demonstrações apresentadas por Salomão Serebrenick. Esses artigos mostram o interesse pela Matemática no Brasil, por pessoas que hoje não seriam classificadas como matemáticos e o fascínio exercido pelo teorema de Pitágoras geração após geração, não só no Brasil mas em todo o mundo.

O interesse de contribuições desse tipo se deve ao fato de elas, como afirmado por Schubring (1985a), podem:

1. Servir para verificar a extensão do conhecimento matemático na sociedade, até que ponto uma cultura específica tem condições de lidar com o conhecimento matemático e de empregá-lo.

¹ Para o que nos interessa, ver, nesta obra, SCHUBRING, 1981. Comparar também com o artigo de Chervel [CHERVEL, 1990].

2. Mostrar como a comunidade matemática, os profissionais, se comportam em relação aos leigos, e a disponibilidade dessa comunidade para examinar os resultados apresentados e a dialogar com os amadores.

A questão complexa da dualidade amador-profissional foi estudada, por exemplo, em vários dos capítulos de MEHRTENS (1981), devidos a Gert Schubring e a Ivor Schneider.

A profissionalização da Matemática foi um processo longo, que se inicia no século XVII e se prolonga até o início do século XX. No Brasil, este processo deu-se com muito atraso, primeiramente em relação à Europa e em segundo lugar em relação aos Estados Unidos. O que na Europa levou muito tempo a completar-se, com o desaparecimento do amador e a hegemonia do profissional da Matemática, e envolveu praticantes da Matemática desde a Idade Média, as Academias de Ciências, as Universidades e, mais recentemente, os Institutos de Pesquisa, no Brasil permaneceu praticamente congelado do século XVI ao século XVIII e acelerou-se a partir do século XIX, com a criação de cursos de nível superior e a institucionalização de um sistema de ensino secundário e teve como passo decisivo a criação das Faculdades de Filosofia já nos anos trinta do século XX.

Sugerimos que, no Brasil, no lugar dos praticantes mais “aplicados” da Matemática, as escolas de Engenharia estabelecidas inicialmente e durante muito tempo segundo o modelo francês, abrigaram várias gerações de brasileiros interessados em Matemática. Embora em suas aulas não haja vestígios palpáveis de criação matemática de ponta, muitos deles tiveram curiosidade matemática. Aos poucos, o nível desses “amadores” melhorou, até que alguns deles se transformaram nos primeiros matemáticos brasileiros. A partir da década de 30 do século XX, encontra-se no Brasil, embora inicialmente rara, pesquisa matemática de ponta. É significativo que, no século XIX, a primeira escola de engenharia do Brasil, fundada inicialmente, com outro nome, por Dom João VI, concedia o diploma de bacharel em ciências físicas e matemáticas. Seus professores catedráticos tinham que apresentar teses sobre tópicos matemáticos. O mesmo aconteceu até bem tarde no século XX, também no Colégio Pedro II. Um estudo mais realista do nível da Matemática no Brasil no século XIX e início do século XX não pode ser feito sem uma análise dessas teses.

Voltando aos dois pontos mencionados relativamente a atividades matemáticas do tipo que estamos estudando, a preocupação desses dois engenheiros, nenhum dos quais se destacou como matemático, mostra a existência, entre brasileiros com formação acadêmica superior (hoje, de nível universitário), de um interesse genuíno pela Matemática. É significativo serem eles de regiões diferentes, em cujas capitais havia já uma tradição de ensino superior.

André Rebouças exerceu suas atividades no apogeu e fim do reinado de Dom Pedro II, o segundo imperador brasileiro. Serebrenick esteve ativo a partir dos anos 30 do século XX, época de profundas mudanças na sociedade brasileira.

Estas duas contribuições, entre as quais há um intervalo de tempo de aproximadamente 70 anos, mostram também a permanência da curiosidade matemática.

Por outro lado, em uma sociedade de interesses científicos ainda muito limitados, seria praticamente impossível recorrer a pessoas com um nível matemático maior do que o de André Rebouças para avaliar sua contribuição. No caso de Serebrenick, já havia no

Brasil pessoas matematicamente bem mais qualificadas. Não sabemos que acolhida elas deram não só ao trabalho de Serebrenick mas a toda a *Revista Brasileira de Mathematica*.

Certamente, André Rebouças não teria um público muito maior do que o dos sócios do Instituto Polythecnico para apreciar seu trabalho. Já Serebrenick viveu em uma época que certamente aparentava ter maiores possibilidades para divulgação da Matemática, haja vista a decisão de fundar a revista, que teve contudo pouco tempo de vida.

André Rebouças e Salomão Serebrenick

André Pinto Rebouças, enquadra-se no caso de engenheiro curioso, com formação matemática básica, mas que, pela contribuição que descreveremos abaixo, demonstrou curiosidade e competência matemática em circunstâncias adversas.

Esse engenheiro brasileiro nasceu em Cachoeira, Bahia, em 1838 e morreu em Funchal, em 1898. Engenheiro e bacharel em ciências físicas e matemáticas, pela Escola Militar, fez na Europa estudos especializados em ferrovias e portos (1861-1862). Construiu as docas do Rio de Janeiro, Bahia, Paraíba, Pernambuco e Maranhão. Negro, tomou parte ativa na campanha abolicionista. Foi professor da Escola Politécnica (1879) e jornalista. Em 1889 acompanhou a família imperial no exílio, viajando, depois, pelas colônias portuguesas da África e fixando residência na ilha da Madeira. Suicidou-se na ilha de Funchal.

O Instituto Polytechnico Brasileiro, de que André Rebouças foi sócio, foi estabelecido em 11 de setembro de 1862, com sede no Rio de Janeiro. Foi uma agremiação que se dedicava à divulgação de trabalhos de seus sócios, a maioria engenheiros, para “melhorar o Brasil”. Ele congregava a nata dos engenheiros brasileiros, além de muitos personagens pertencente à elite brasileira, como, por exemplo, o Conde d’Eu, esposo da Princesa Isabel, filha de Dom Pedro. O conde durante algum tempo foi presidente do Instituto.

Na Revista do Instituto², encontra-se o trabalho intitulado “Nota sobre o teorema pitagórico” de autoria de André Rebouças, que foi lido em uma das seções do Instituto. Neste trabalho, o autor apresenta sete demonstrações para o teorema de Pitágoras, uma delas de sua autoria. Deve-se destacar que a demonstração de André Rebouças foi por ele encontrada durante a Guerra do Paraguai, no acampamento de Talacortá. Vemos aqui um pálido reflexo da situação vivida por Poncelet, que revolucionou a Geometria Projetiva quando prisioneiro dos russos, após a desastrosa campanha militar de Napoleão contra a Rússia.

Salomão Serebrenick³ nasceu em 23 de janeiro de 1909, em Briceni, Bessarábia (Moldávia). Durante os anos de 1926 a 1930 estudou na Escola Polytechnica da Bahia, onde concluiu o curso de Engenharia Civil. Em 1931, mudou-se para o Rio de Janeiro. Imigrante judeu naturalizou-se brasileiro em 1933. De acordo com Dias (2000),

² *Revista do Instituto Polytechnico Brasileiro* Tomo I, nº 1, julho de 1867, p. 15-17.

³ Os dados biográficos aqui citados estão baseados em Dias, 2000.

Iniciou precocemente sua trajetória científica ainda na Bahia, quando, em 1927, aos 18 anos, publicou Demonstração do Postulado de Euclides; depois vieram a lume: Revista Brasileira de Mathematica, que durou de 1929 a 1932; Aspectos da Superfície do Sol, resultado inédito sobre as manchas solares observadas na primeira semana de 1930 (p. 54).

Dedicou-se também à Climatologia, à Meteorologia, à Hidrografia e à Geografia, além de Literatura, História e Jornalismo. Produziu diversos trabalhos tais como, *Classificação meteorológica dos climas do Brasil*, apresentado no IX Congresso Brasileiro de Geografia, *Racionalização das carreiras profissionais do serviço público*, monografia premiada em primeiro lugar no concurso promovido pelo DASP, *Aspectos geográficos do Brasil*, manual escolar bastante difundido no ensino médio, *O papel da Engenharia no desenvolvimento nacional*, premiado pelo Clube de Engenharia em 1970. Trabalhou na Bloch Editores como consultor científico e foi revisor do *Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa* de Antônio Houaiss. Atuou em várias organizações judaicas, sendo um dos fundadores da Sociedade Israelita-Brasileira de Organização, Reconstrução e Trabalho (ORT).

Ainda segundo Dias (2000),

Salomão Serebrenick ocupou diversos cargos e exerceu várias funções públicas e privadas de grande importância e projeção social, onde sua cultura enciclopédica foi utilizada para a realização de diversos trabalhos (idem).

Serebrenick foi professor de Hidrografia e Meteorologia na Universidade Rural do Rio de Janeiro, lecionou Matemática Superior na Escola Livre de Engenharia do Rio de Janeiro e Literatura Judaica na Universidade Federal do Rio de Janeiro, entre outros.

Ainda como estudante da Escola Polytechnica da Bahia, mais precisamente em 1929, Salomão Serebrenick é listado como um dos redatores, no primeiro exemplar, da *Revista Brasileira de Mathematica Elementar*⁴, citada acima. Nessa revista ele apresentou uma série de demonstrações do Teorema de Pitágoras, publicadas na seção *Novas Demonstrações*.

A série de onze demonstrações foi publicada em três volumes da revista, a saber, ns. 7/8/9 (março-maio), n. 10 (junho) e ns. 11/12 (julho-agosto), ambas em 1930⁵.

⁴ Para maiores detalhes desta revista confira, DASSIE, Bruno Alves, ROCHA, José Lourenço. Uma antepassada da RPM. *Revista do Professor de Matemática*, n. 43, 2º quadrimestre de 2000, pp. 1 – 5; DIAS, André Luiz Mattedi. A Revista Brasileira de Mathematica (1929 – 1932). *Anais do IV Seminário Nacional de História da Matemática*. Rio Claro: SBHMat, 2001.

⁵ Na revista número 2, de outubro de 1929, Salomão Serebrenick apresenta uma demonstração do Teorema de Pitágoras. No entanto, tal demonstração é feita a partir das relações métricas no triângulo retângulo. Não vamos nos deter aqui sobre ela, pois a consideramos uma demonstração muito difundida.

A obra de Elisha Scoot Loomis

O livro *The Phytagorean Proposition*, de autoria de Elisha Scott Loomis, teve sua segunda edição publicada em 1940 pelo *The National Council of Teachers of Mathematics*, na série *Classics in Mathematics Education*. Loomis foi professor de matemática da *Baldwin University* de 1885 a 95 e professor de matemática da *West High School*, de 1895 a 1923, na cidade de Cleveland. Na data dessa edição, era professor emérito de matemática no *Baldwin-Wallace College*. Segundo consta no prefácio do livro, o primeiro manuscrito desse trabalho foi preparado em 1907 e sua primeira edição é de 1927. A segunda edição foi publicada após sua morte com autorização da família.

Loomis classifica as demonstrações do teorema de Pitágoras em quatro tipos:

- 1 – Provas algébricas por relações lineares;
- 2 – Provas geométricas;
- 3 – Provas baseadas em operações vetoriais, chamadas de *Quaternionic Proofs*;
- 4 – Provas dinâmicas.

As provas algébricas são subdivididas em sete casos e as provas geométricas, de maior interesse para este artigo, são subdivididas em dez:

Tipo A – Todos os quadrados exteriores

Tipo B – O quadrado construído sobre a hipotenusa interior

Tipo C – O quadrado construído sobre o maior cateto interno

Tipo D – O quadrado construído sobre o menor cateto interno

Tipo E – O quadrado construído sobre a hipotenusa e o quadrado construído sobre o maior cateto internos

Tipo F – O quadrado construído sobre a hipotenusa e o quadrado construído sobre o menor cateto internos

Tipo G – O quadrado construído sobre os catetos internos

Tipo H – Todos os quadrado internos

Tipo I – Um ou mais quadrados são transladados

Tipo J – Um ou mais quadrados não são representados graficamente

Os demais tipos não são subdivididos.

Análise das demonstrações

A primeira demonstração apresentada por André Rebouças (fig. 1) está erradamente associada a Pitágoras, pois, como sabemos, esta configuração consta da demonstração dada por Euclides. Ele observa que “apesar de ser a mais antiga e talvez a menos elegante entretanto *é a demonstração que se encontra em quase todos os compêndios de geometria*” (p. 15, grifo dos autores). Talvez essa afirmação justifique sua falha, ou seja, André Rebouças perpetua um erro. Ele não entra em detalhes sobre as etapas da demonstração.

Em Loomis, esse caso recebe tratamento destacado (p. 119 – 121).

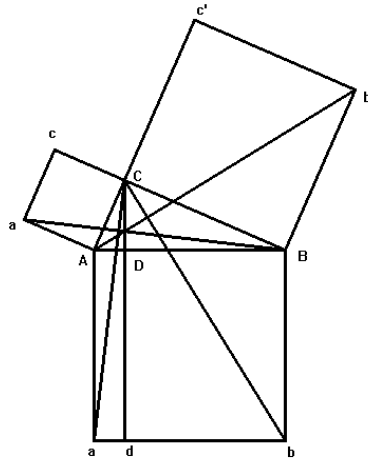


Fig. 1

André Rebouças prossegue com a demonstração de Stockler (fig. 2), que, segundo ele, era “muito menos vulgarizada” (p 15).

De acordo com Silva (2003),

Francisco de Borja Garção Stockler (1759 – 1829), defensor das idéias liberais proclamadas pela Revolução Francesa, foi tachado de jacobino, isto é, acusado de pertencer ao partido daqueles que pretendiam destronar D. João VI, em Portugal. Enfrentou problemas políticos e viu-se forçado a emigrar para o Brasil. Com a vinda da família real para o País, Stockler conseguiu justificar-se perante o rei e readquiriu a simpatia do soberano. Stockler exerceu, no Rio de Janeiro, entre outras funções, o cargo de primeiro diretor da Academia Militar, fundada em 1810. Escreveu muitas obras matemáticas e também sobre outras áreas do conhecimento (p. 115).

Vejamos como André Rebouças descreve esta demonstração:

Depois de construídos os quadrados sobre os três lados do triângulo retângulo, tiram-se pelos quatro vértices A, B, a e b. Do quadrado construído sobre a hipotenusa, paralelas aos catetos: fica assim subdividido este quadrado em quatro

triângulos, iguais ao dado, e em um pequeno quadrado central $\alpha\beta\gamma\delta$, cujos lados são exatamente iguais à diferença entre os dois catetos.

Ao quadrado construído sobre o maior cateto acrescenta-se do lado do ângulo reto o construído sobre o menor; traça-se uma paralela $k\beta'$ ao lado do maior quadrado a uma distância igual ao menor cateto; prolongando o lado $\delta'\alpha'$ do menor quadrado auxiliar obtêm-se dois retângulos, cujas diagonais $k\delta'$ e $B\beta'$ os dividem em quatro triângulo, iguais ao triângulo dado, ficando ainda no interior do quadrado, construído sobre o maior cateto um pequeno quadrado $c'\beta'\alpha'\gamma'$ de lado igual à diferença entre os dois catetos, exatamente como na subdivisão, acima descrita, do quadrado construído sobre a hipotenusa, donde resulta evidentemente a demonstração do teorema (p. 15).

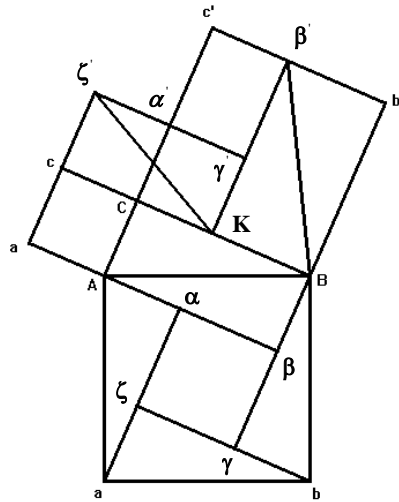


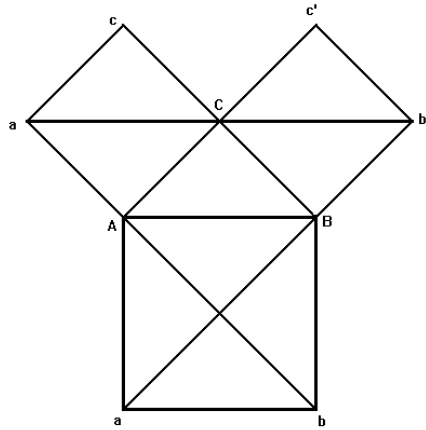
Fig. 2

André Rebouças ainda descreve um caso particular desta demonstração, no qual o triângulo retângulo dado é isósceles. Para ele,

cada um dos quadrados, construídos sobre os catetos se divide pelas suas diagonais em dois triângulos iguais ao dado, e o quadrado, construído sobre a hipotenusa, em quatro triângulos também iguais ao dado, desaparecendo o

quadrado central, cujos lados são nulos nessa hipótese especial (p. 15 – 16).

Este caso poderia ser representado pela figura abaixo.



Não encontramos em Loomis nenhum caso igual ao de Stockler, apenas demonstração semelhante para o caso particular descrito por André Rebouças (p. 102, 5^a dem., fig. 108). A única diferença é que cada quadrado construído sobre os catetos está dividido pelas suas duas diagonais e o quadrado construído sobre a hipotenusa, além das diagonais, pelos segmentos que unem os pontos médios dos lados desse quadrado. Loomis ainda faz referência aos livros de R.A. Bell e Cheveland no qual são usadas apenas as diagonais no quadrado construído sobre a hipotenusa, ou seja, a construção descrita por André Rebouças para o caso particular acima citado.

A terceira demonstração da série (fig. 3) encontra-se, segundo André Rebouças, no “Resumo de Geometria do Manual do Bacharelado em letras” de autoria de M.L. Sardou. Vejamos a seguir sua descrição:

Construídos os três quadrados sobre os lados do triângulo retângulo dado, e um retângulo $c\beta c'C$ preenchendo a área compreendida entre os quadrados sustentados pelos catetos, prolonga-se até o perímetro da figura a perpendicular Cd e os lados Aa e Bb do quadrado construído sobre a hipotenusa.

Ficam dessa arte formados paralelogramos, equivalentes respectivamente aos quadrados construídos sobre os catetos e aos retângulos $ADAs$ e $BDbd$, em que a perpendicular Cde dividiu o quadrado, construído sobre a hipotenusa,

resultando imediatamente dessas equivalências a demonstração do teorema (p. 16).

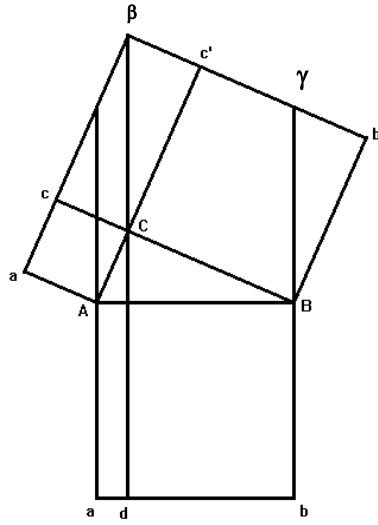


Fig. 3

Essa demonstração também é apresentada por Loomis (p. 125, 42^a dem., fig. 142), que atribui essa prova a Lecchio (1753). Várias outras referências são dadas por Loomis; uma delas, segundo ele, afirma que “essa prova é um caso particular do teorema de Pappus” (p. 126). Ambas as demonstrações seguem os mesmos procedimentos.

A próxima demonstração, correspondente à figura 4 abaixo, é antecipada pela seguinte observação:

Foi lendo a 6 de março de 1866 no acampamento de Talacortá essa demonstração [M.L. Sardou, fig. 4] que tive a idéia de aperfeiçoá-la, suprimindo o traçado do retângulo auxiliar, compreendido entre os quadrados construídos sobre os catetos e reduzindo as linhas de construção a paralelas à hipotenusa e aos catetos do triângulo dado.

Ultimamente o nosso ilustre consocio o Dr José Augusto Nascentes Pinto, revendo a meu pedido alguns compêndios de Geometria, encontrou no “Novo Manual do Bacharelado de Ciências” a demonstração do quadrado da hipotenusa com os aperfeiçoamentos que eu imaginara, dada por M. H. Sonnet (p. 16).

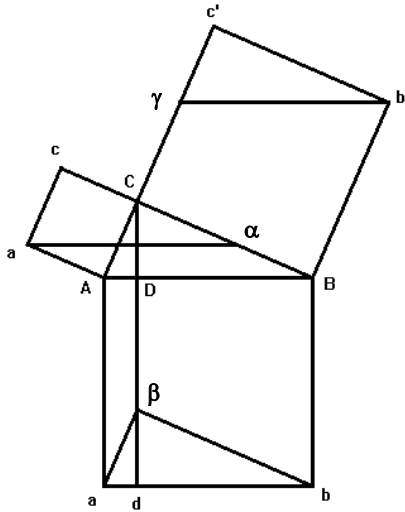


Fig. 4

Para ele,

a simples inspeção da respectiva figura demonstra que as linhas de construção se reduzem à perpendicular Cd à hipotenusa, às paralelas a essa linha à $a'\alpha$ e $b'\gamma$ e às paralelas aos catetos $a\beta$ e $b\beta$.

Cada um dos quadrados construídos sobre os catetos é equivalente aos paralelogramos $Aa\alpha B$ e $ABb'\gamma$, que são iguais aos paralelogramos $AC\alpha B$ e $CBb\beta$, também equivalentes aos dois retângulos em que a perpendicular Cd dividiu o quadrado, construído sobre a hipotenusa (p. 16).

Não encontramos em Loomis nenhuma demonstração igual ou análoga a essa. No entanto, conseguimos localizar a mesma demonstração no *Tratado de Geometria Elementar*⁶, de José Maria Couceiro da Costa⁷ (p. 127), publicado em 1868, em Lisboa.

⁶ COSTA, J.M. Couceiro da. *Tratado de Geometria Elementar*. Lisboa: Imprensa Nacional, 1868. (Elementos de Mathematica).

⁷ O General José Maria Couceiro da Costa nasceu no dia 6 de setembro de 1930, em Fataúncos, São Pedro do Sul, Portugal. Em 1839, ingressou no Colégio Militar, completando o curso em 1847. Posteriormente, em 1847 matriculou-se na Escola Politécnica e na Escola do Exército. Em 1857 toma posse da cadeira de Geografia Cronologia e História do Colégio Militar e, no ano seguinte, é nomeado por concurso, professor de Matemática. No ano de 1860 foi promovido Lente Proprietário da cadeira de Matemática no mesmo colégio. Em 1864, ingressa no Corpo de Engenharia do exército. É autor de uma série de obras para o ensino de matemática, entre elas *Tratado de Aritmética, Noções gerais dos sólidos geométricos e Tratado de Trigonometria*.

Coincidentemente, este livro era destinado ao Colégio Militar. Não há referência sobre a autoria da demonstração.

A demonstração de Terquem (fig. 5), denominação dada por André Rebouças, é a quinta a ser apresentada. Segundo sua narrativa, ele tomou conhecimento deste e do próximo caso na mesma ocasião descrita acima. Na demonstração,

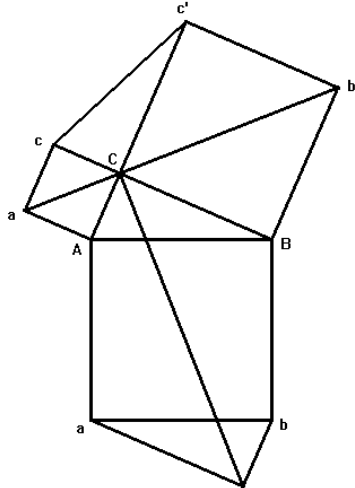


Fig. 5

principia-se por estabelecer a equivalência dos hexágonos BFEDCG e BACMNL por serem iguais respectivamente às partes situadas de um lado e de outro das diagonais FC e NA.

Ora, como um desses hexágonos compõe-se evidentemente dos quadrados construídos sobre os catetos e de dois triângulos iguais ao dado e outro desses mesmos dois triângulos e do quadrado construído sobre a hipotenusa, conclui-se desse simples raciocínio a verdade do teorema em questão (p. 16).

Loomis afirma, de acordo com F.C. Boon, *Miscellaneous Mathematics*, (1924, p. 107), que esta demonstração foi dada por Leonardo da Vinci (1452 – 1519). Ele também faz referência a outros livros. No entanto, o nome de Terquem não é citado. Segundo Heath (1956, p. 356), essa demonstração encontra-se no único trabalho científico de Leonardo da Vinci.

Estas breves informações estão baseadas numa pequena biografia escrita para o *Dicionário Histórico dos Educadores Portugueses*, que foi gentilmente cedida por José Couceiro da Costa.

Até o presente momento, todas as demonstrações apresentadas são do Tipo 2, A, segundo a classificação dada por Loomis.

A demonstração a seguir (fig. 6) difere de todas as anteriores, pois um quadrado é construído externo a um dos lados, a saber, o quadrado da hipotenusa, um dos quadrados é construído interno a um dos catetos e o outro é trasladados, ou seja, Tipo 2, I. Nessa demonstração

circunscreve-se o triângulo dado por um quadrado, BDFH cujos lados são iguais à soma dos catetos; controí-se depois o quadrado ACEG sobre a sua hipotenusa e tiram-se as paralelas AI, EJ e GL.

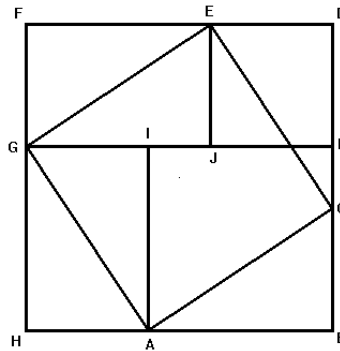


Fig. 6

Nota-se então que se do quadrado HBDF tiram-se quatro triângulos iguais ao dado obtêm-se ou o quadrado construído sobre a hipotenusa ou os dois quadrados ABIL e EJDL que têm exatamente por lados os catetos do triângulo dado (p. 16).

André Rebouças atribui essa demonstração a um tenente coronel de artilharia do exército francês.

Loomis apresenta quatro casos semelhantes a esse (p. 197, 171^a dem., fig. 269; p. 202, 181^a dem., fig. 279; p. 209, 196^a dem., fig. 294; p. 210, 197^a dem., fig. 295; p. 213, 204^a dem., fig. 302). A diferença entre esses casos e o descrito acima consiste na posição dos quadrados correspondentes aos catetos.

A última demonstração citada por André Rebouças (fig. 7) foi dada, segundo ele, por Benjamim Constant Botelho de Magalhães. Vejamos a formulação de Rebouças:

CONSTRUÇÃO – Feita a construção dos quadrados sobre os lados do triângulo ABC tire-se do ponto Ba para a reta DE a perpendicular Bn e nela tome-se a contar do mesmo ponto

uma parte $BO=AC$; una-se o ponto O a D e E e prolongue-se EO até encontrar AB .

DEMONSTRAÇÃO – Resulta da construção que:

1º Os quadriláteros $BCOE$ e $ABOD$ são paralelogramos, equivalentes aos retângulos $ADmn$ e $Cemn$ por terem a mesma base e a mesma altura; donde o quadrado

$$ADCD = BAOD + BCOE \quad (1)$$

2º- Os triângulos OBS e ABC são iguais por terem iguais, cada um a cada um, um lado e dois ângulos, a saber:

$OB=AC$ por construção, ângulos B e S iguais como retos e $SOB=BAC$ por terem lados perpendiculares e aberturas em sentidos diversos, donde $BS=BC$ e $OS=AB$, e por conseguinte o quadrado $ABA'B'$ é equivalente ao paralelogramo $ABOD$ por terem a mesma base e alturas iguais $OS=AA'$; e o quadrado $BCbc$ equivalente ao paralelogramo $BOEC$ por terem a mesma base BC e alturas iguais $BS=Bb$.

Substituindo estas equivalências na equação (1) temos: $ACED=ABA'B'+BCbc$ como se pretendia demonstrar (p. 17).

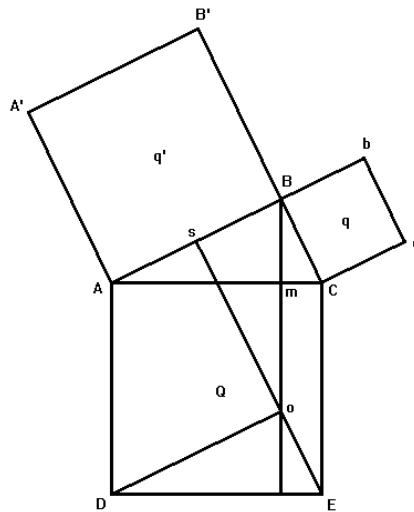


Fig. 7

Como podemos observar, este é o único caso em que André Rebouças apresenta minúcias da demonstração.

Não encontramos em Loomis nenhuma demonstração igual a essa⁸.

André Rebouças finaliza seu trabalho com a seguinte observação:

Tais são as sete demonstrações do teorema do quadrado da hipotenusa de que tenho atualmente conhecimento: comunico-as ao Instituto Politécnico principalmente no escopo de ser útil aos consócios que se ocupam do ensino da geometria elementar (p. 17).

Passemos agora às demonstrações apresentadas por Sebastião Serebrenick mencionando que ele assume a autoria da primeira demonstração.

Seja o triângulo retângulo BAC; BDEC, BFGA e AHKC – os quadrados construídos sobre a hipotenusa e os catetos. Trata-se de demonstração que o primeiro desses quadrados é equivalente à soma dos outros dois.

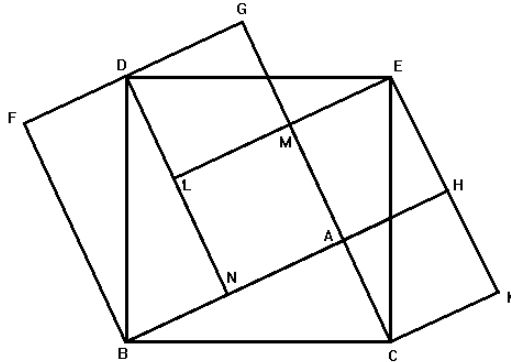


Fig. 8

Ora, o quadrado BDEC compõe-se de 4 triângulos iguais ao dado mas um quadrado (LMAN). O quadrado BFGA contém 2 retângulo, esses mesmo quadrado e mais um retângulo LDGM que é igual ao retângulo MEHA. Mas este mais o quadrado construído sobre o outro cateto (AHCK) dão dois triângulos.

⁸ Este fato já tinha sido apresentado por SILVA (2001, p. 25)

Logo os dois quadrados dos catetos conterão 4 triângulos e um quadrado – o mesmo que o quadrado da hipotenusa (p. 100).

Loomis apresenta vinte e uma demonstrações desse tipo, ou seja, o quadrado construído interno à hipotenusa e os quadrados construídos externos aos catetos, e baseadas no princípio de equivalência. No entanto, nenhuma dessas é igual à apresentada por Sebastião Serebrenick.

A próxima demonstração para o teorema foi atribuída por Serebrenick a P. Fabre, de Saint-Étienne.

Seja o triângulo retângulo BAC e BCED – o quadrado construído sobre a hipotenusa.

Tiremos AF paralela e igual a BD, e unamos DF e FE. Baixemos CH perpendicular a FE, vindo ela a ser a altura do paralelograma [sic] ACEF. Sendo esta a altura (CH) igual a base (AC) do paralelograma [sic], graças a igualdade dos triângulos CHE e CAB, que têm as hipotenusas e os ângulos em C iguais, teremos:

$$ACEF = AC^2$$

e semelhantemente:

$$ABDF = AB^2.$$

Notando que os triângulos BAC e DEF são iguais, temos

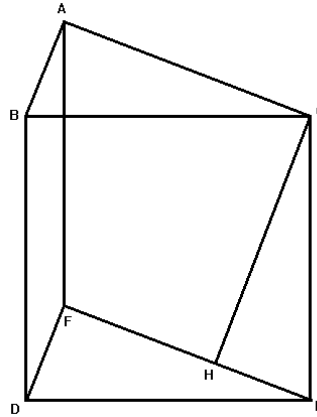


Fig. 9

$$\begin{aligned}
 AC^2 + AB^2 &= ACEF + ABDF \\
 &= BDFEC + BAC = \\
 &= BDFEC + DEF = BDEC = BC^2
 \end{aligned}$$

ou

$$AC^2 + AB^2 = BC^2 \text{ (p. 100).}$$

Não encontramos em Loomis nenhum caso igual a este.

A terceira demonstração apresentada por Serebrenick é a prova associada a Leonardo da Vinci, já descrita acima. Não vemos necessidade de tecer mais comentários.

Quanto à próxima demonstração (fig. 10), a quarta, novamente, Sebastião Serebrenick assume a autoria, como já tinha feito com a primeira.

Seja BAC um triângulo retângulo, BCDE, ACFH e AKLB – os quadrados construídos sobre a hipotenusa e os catetos.

O quadrilátero BCFM é comum ao quadrado da hipotenusa e ao construído sobre o cateto b. O triângulo CDF, que está no quadrado da hipotenusa, tem seu correspondente BAC no quadrado de b.

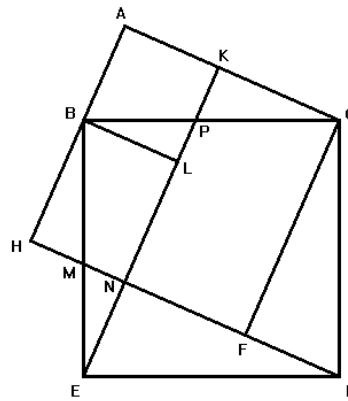


Fig. 10

Para demonstrar a equivalência do resto, vemos que de um lado sobrou o triângulo MED, e do outro – o triângulo BHM e o quadrado de c. Este último triângulo é, porém, igual a KPC; logo, teremos desse outro lado: os triângulos BAC e PLB.

O primeiro destes é igual ao triângulo END, e o segundo – ao triângulo MNE, ficando assim provada a equivalência requerida pelas teses (p. 123).

Duas configurações iguais à figura acima são apresentadas por Loomis (p. 176, 131^a dem., fig. 229 e p. 177, 132^a dem., fig. 230). As demonstrações dadas diferem quanto às equivalências para demonstrar a igualdade pretendida no teorema. As equivalências feitas por Sebastião Serebrenick também diferem de ambas, podendo, assim, ser considerada uma demonstração distinta quando comparada com as apresentadas por Loomis.

A quinta demonstração que compõe esta série é atribuída a Pitágoras, o que é mencionado por Serebrenick. Não vemos necessidade de transcrevê-la, mas cabe a observação que os dois quadrados apresentado na configuração clássica estão sobrepostos, como mostra a figura 11.

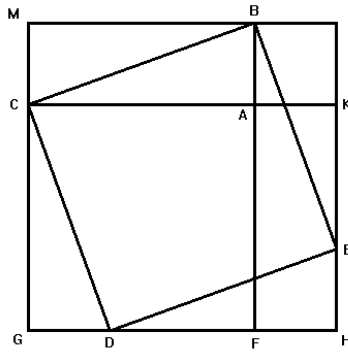


Fig. 11

Segue a sexta demonstração apresentada por Sebastião Serebrenick (fig. 12):

Seja BAC um triângulo retângulo: DBC – semi-quadrado construído sobre a hipotenusa; DE – perpendicular a AB.

Os triângulos BAC e BED são iguais; logo: $ED = BA$ e $BE = AC$.

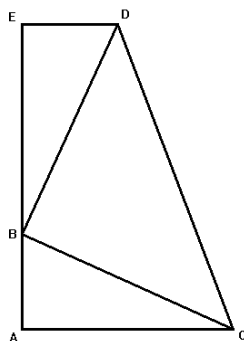


Fig. 12

A área do trapézio AEDC é igual a soma das áreas dos três triângulos:

$$\frac{AB + ED}{2} \cdot AC = 2 \left(\frac{AC \cdot AB}{2} + \frac{BC^2}{2} \right)$$

ou

$$(AC + AB) \cdot AC = AC \cdot AB + BC^2$$

ou

$$AC^2 + AB^2 = BC^2.$$

A mesma configuração e os mesmos procedimentos dados acima são apresentados por Loomis (p. 231, 231^a dem., fig. 330). Ele ainda observa que essa foi a demonstração dada pelo ex-presidente americano James A. Garfield.

A sétima demonstração desta série foi assim apresentada (fig. 13):

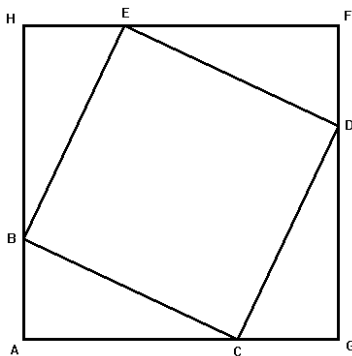


Fig. 13

BAC – o triângulo BCED – quadrado construído sobre a hipotenusa.

DG, EH – perpendicular a AC, AB.

Os triângulos BAC, CDG, DEF e BHE são iguais. AGFH é pois um quadrado, e tem-se:

$$AGFH = 4BAC + BCDE$$

ou

$$(AB+BH)2 = 2 \cdot AB \cdot AC + BC^2$$

ou, por ser BH = AC,

$$AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

Essa demonstração também é apresentada por Loomis (p. 49, 34ª dem., fig. 32). Difere das demais apresentadas pois é uma demonstração do Tipo 1, de acordo com Loomis.

Segundo Heath (1956, p. 364) esta demonstração foi dada pelo matemático hindu Bháskara. Loomis atribui a Bháskara outra demonstração (p. 50, 36ª dem., fig. 34).

Na seqüência de demonstrações, temos o caso da figura 14.

Representemos por a, b e c a hipotenusa e os catetos do triângulo dado.

Tomando sobre uma reta qualquer [fig. 14) AB = b e BC = c, construamos os quadrados ADBE e BFHC. A área do hexágono assim formado ADEFHC é assim a das áreas dos quadrados, construídos sobre os catetos.

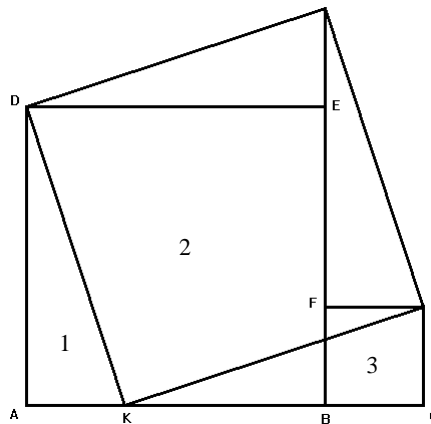


Fig. 14

Tomando ainda $AK = c$ (donde $KC = b$), tracemos as retas DK e HK , que decomporão o hexágono em três partes, designados na figura pelos algarismos 1, 2 e 3. As partes 1 e 3 são triângulos retângulos, iguais ao dado.

Giremos de 90° o triângulo 1 em torno do vértice D e o triângulo 3 em redor do vértice H , no sentido indicado pelas setas. Nestas novas posições, juntamente com a parte restante 2, um quadrado construído sobre a hipotenusa.

Encontramos esta demonstração em Loomis (p. 203 – 4, 183^a dem., fig. 281). No entanto, o princípio usado para a mesma é a equivalência das áreas.

Esta demonstração é apresentada por Heath (p. 364 – 5). Segundo ele, ela é atribuída ao matemático árabe Thabit b. Qurra (826 – 901) por na-Narizi. Os passos apresentados por Heath são os mesmos dados por Loomis. Não encontramos em Loomis referência a Thabit b. Qurra. As demonstrações de Loomis e Heath diferem quanto às construções feitas para obter essa configuração mas o princípio usado é o mesmo.

A nona demonstração do teorema dada por Sebastião Serebrenick está descrita abaixo:

BAC – o triângulo (fig. 71[15]), $BCED$ – quadrado da hipotenusa.

DI , EG – perpendicular a AB ; DF , HC – perpendicular a EG .

Os triângulos BAC , DFE e CHE são iguais.

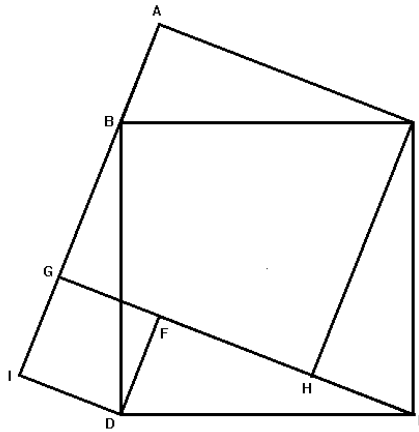


Fig. 15

Temos pois:

$$BDFHC + DEF + CHE = BDFHC + BAC + BID$$

ou

$$BCED = AGHC + DIGF$$

i é [sic] o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.

Esta demonstração é apresentada por Loomis (p. 194, 265^a dem., fig. 263).

A décima demonstração dada por Sebastião Serebrenick é a de Euclides, cuja origem é mencionada por Serebrenick como um fato. Além de um esboço do processo usado por Euclides, ele apresenta uma outra construção para chegar à equivalência desejada.

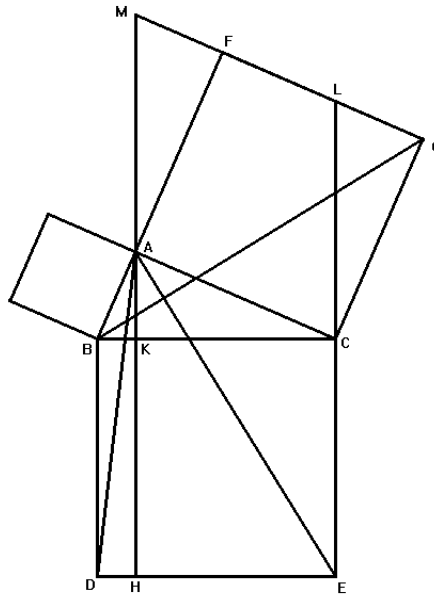


Fig. 16

A demonstração dada por Euclides, e que todos os compêndios trazem baseia-se na igualdade dos triângulos BCG e ACE, para estabelecer a equivalência das figuras ACGF e KCEH.

Pode-se chegar mais facilmente ao mesmo resultado, notando que cada uma destas figuras é equivalente ao

paralelogramo ACLM (CL = CB pela igualdade dos triângulos CGL e BAC).

A última “demonstração” desta série difere de todas as demais, pois não é propriamente uma demonstração. Ela se limita em traduzir para a linguagem geométrica a relação existente entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo:

Sejam a , b e c os números que, com uma mesma unidade linear, exprimem a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo.

Sabemos que entre esses números existe a relação

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Mas, a^2 , b^2 e c^2 são os números que representam, numa mesma unidade superficial, AS ÁREAS dos quadrados, cujos lados são respectivamente a , b e c . Por conseguinte, a igualdade acima exprime que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

Na final da série de demonstrações, Sebastião Serebrenick apresenta uma classificação para os casos descritos. Segundo ele,

examinando essas diversas demonstrações do Teorema de Pitágoras, podemos classifica-las [sic] em três categorias.

Um – de natureza puramente geométrica, que, no fundo, só lançam mão da equivalência de figuras, como, p. ex., as demonstrações: 1a, 2a, 5a, 10a.

Outras – de natureza, por assim dizer, analítico-geométrica; ex.: as demonstrações 6a e 7a.

Finalmente, a última demonstração (11ª) – de natureza analítica, que supõe as grandezas geométricas substituídas por números.

Considerações finais

Aumenta no Brasil o número de estudiosos das atividades matemáticas desenvolvidas, em sentido amplo, em nosso país. Como diz Schubring, já citado na introdução, isso é importante a fim de investigar a extensão dos conhecimentos matemáticos na sociedade. Nesse sentido, as pesquisas realizadas por André Mattedi Dias e Circe Mary Silva, entre outros, têm aberto linhas promissoras. A análise de revistas de Matemática, de teses de concurso, monografias e livros publicados no Brasil por pessoas

que hoje não seriam reconhecidas como matemáticos profissionais tem que ser mais explorada. Pesquisas em andamento pelos autores desse trabalho e outros mostram, por exemplo, o interesse em nosso país pelos problemas clássicos gregos de construção e pela História da Matemática.

Referência Bibliográficas

- BOS, H.J.M, MEHRTENS, M (1977). The interactions of Mathematics and Society in History: some exploratory remarks. *Historia Mathematica*, 4, pp. 7 - 30.
- CHERVEL, A. (1990). História das disciplinas escolares: Reflexões sobre um campo de pesquisa. *Teoria e Educação*, 2, pp. 177 - 228.
- DIAS, A. L. M. (2000). A Revista Brasileira de Mathematica (1929 – 193?). *Episteme*, Porto Alegre, n. 11, jul./dez, pp. 37 - 56.
- HEATH, T. L (1956). *The thirteen books of the Elements*, vol 1 (books I and II). New York: Dover Publications.
- LOOMIS, E. S.(1940). *The Pythagorean proposition*. Ann Arbor, Michigan, USA:NCTM.
- MEHRTENS, H., HENK BOS, IVO SCHNEIDER (herausgeber) (1981). *Social History of Nineteenth Century Mathematics*. Boston – Basel – Stuttgart: Birkhäuser.
- REVISTA BRASILEIRA DE MATEMATICA ELEMENTAR (1930). ns. 7/8/9, março-maio, n. 10, junho, ns. 11/12, julho-agosto.
- SCHUBRING, G. (1981). The conception of pure mathematics as an instrument in the professionalization of mathematics, in MEHRTENS, H., HENK BOS, IVO SCHNEIDER (herausgeber) – *Social History of Nineteenth Century Mathematics*. Boston – Basel – Stuttgart: Birkhäuser, pp 111 - 134.
- SCHUBRING, G (1985a). Gegensätze in den Mathematik-Auffassungen von Amateuren und Professionellen: eine Fallstudie zur Kreisquadrieren und deren Implikationen für die Didaktik, in Hans-Georg Steiner und Heinrich Winter (herausgeber) *Mathematik Didaktik, Bildungsgeschichte, Wissenschaftsgeschichte*. Köln: Aulis Verlag, pp. 65 - 68.
- SCHUBRING, G (1985b). Die Geschichte der Entstehung des Mathematiklehrer-Berufs. Systematische Hauptlinien und methodischen Probleme Inhaltsspezifischen Bildungsgeschichte, in Hans-Georg Steiner und Heinrich Winter (herausgeber) *Mathematik Didaktik, Bildungsgeschichte, Wissenschaftsgeschichte*. Köln: Aulis Verlag, pp. 95 - 100.
- SILVA, C. M. S. (2001). Matemática brasileira: história e relações políticas, in John FOSSA (ed.). *Anais do IV Seminário Nacional de História da Matemática*. Rio Claro: SBHMat.
- SILVA, C. M. S., LORENZONI, C. A.C. (2003). O velho conhecido Teorema de Pitágoras e suas demonstrações. *Revista História e Educação Matemática*. Sociedade Brasileira de História da Matemática, Rio Claro, SP. v.2, n. 2, Jun/Dez 2001, Jan/Dez 2002, Jan/Jun 2003, pp. 111 - 122.
- STRUICK, D.J.(1942). On the sociology of mathematics. *Science and Sociology*, 6, pp. 58 - 70.

Bruno Alves Dassie – Universidade
Estácio de Sá

Endereço: Rua Elzir Brandão, 113, ap.
402, bloco C – 24241-140 - Santa Rosa -
Niterói - RJ

E-mail: badassie@ig.com.br

João Bosco Pitombeira de Carvalho –
Pontifícia Universidade Católica do Rio de
Janeiro – PUC-Rio

Endereço: Rua Nascimento Silva, 122, ap.
401 – 22421-020 – Ipanema – Rio de
Janeiro - RJ

E-mail: jbpit@rdc.puc-rio.br