Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 8 nº 15 (abril/2008 - setembro/2008) - pág. 1-12
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

TRÊS MOMENTOS NO DESENVOLVIMENTO DA TEORIA DOS FUNCIONAIS ANALÍTICOS SEGUNDO LUIGI FANTAPPIÈ

Plínio Zornoff Táboas
Uniararas - Brasil

(aceito para publicação em fevereiro de 2008)

Resumo

O objetivo desse artigo é demonstrar a importância das atividades brasileiras de Luigi Fantappiè (1901-1956), em sua estada na USP entre 1934 e 1939, para o desenvolvimento da Teoria dos Funcionais e para a consolidação das atividades de pesquisas científicas matemáticas no Brasil.

Palavras Chaves: Luigi Fantappiè, Teoria dos Funcionais Analíticos, História da Matemática no Brasil.

Abstract

This article has the objective to demonstrate the importance of brasilian activities of Luigi Fantappiè, on his period of time in the *Universidade de São Paulo (USP)* from the year 1934 until 1939, for the development of Functionals Theory and for consolidation of the activities in scientific mathematic researches in Brazil.

Keywords: Luigi Fantappiè, Analitics Functionals Theory, History of Mathematics in Brazil.

Introdução

Este artigo tem por finalidade apresentar como tese a contribuição de Luigi Fantappiè (1901-1956) ao estudo da Teoria dos Funcionais desenvolvida em sua passagem pelo Brasil entre os anos 1934 e 1939, bem como atestar a influência que tal contribuição legou ao desenvolvimento da produção científica matemática brasileira, que passou, a partir desse período, de consumidora a também produtora no cenário global. A classificação em três momentos distintos, a saber, antes da vinda de Fantappiè ao Brasil (década de 1920 e início dos anos trinta), o já citado período brasileiro e o tempo passado após a sua volta para a Itália, não estava consagrada, ainda, pura e simplesmente por falta de registros que desvelassem o momento intermediário. O texto *'Funcionais de Funções de Várias*

Variáveis – Memória de Luigi Fantappiè', transcrito por Cândido Lima da Silva Dias[1] como anotações de um curso oferecido por Fantappiè na USP entre 1936 e início de 1939[2] a alunos de um grupo de estudos avançados em matemática, pretende-se como prova cabal desse segundo momento. Para que se possa compreender inequivocamente esta contribuição, uma alteração na conceituação do *fazer matemática* convencional deve passar por uma suspensão – atitude de clara inspiração fenomenológica – até que se perceba o *novo fazer matemático* não somente como desenvolvimento de resultados, mas também como prática de reflexão, construção e transferência de conhecimento. Então, a análise crítica e comparativa do mencionado texto de Fantappiè com textos sobre o mesmo tema, tais como *'I Funzionali Analiciti'* (1928), *'I Funzionali delle Funzione di due Variabili'* (1930), *'Nuovi Fondamenti della Teoria dei Funzionali Analitici'* (1940) e *'Teoria de los funcionales analíticos y sus aplicaciones'* (1943)[3], todos de Fantappiè, além do texto *'La théorie des fonctionnelles analytiques et ses applications'* (1951), de Franco Pellegrino [PELLEGRINO], eleva o curso e o respectivo texto brasileiro a categoria de produção científica matemática de acordo com esta nova concepção de fazer história da matemática e apresenta, como subproduto, um singular florescer de Matemática Brasileira. Ainda que a relevância matemática do texto *'Funcionais de Funções de Várias Variáveis – Memória de Luigi Fantappiè'*, possa ser desmerecida ao avaliá-lo segundo a ótica da história convencional de uma matemática que deve apresentar resultados pujantes em termos internalistas, pois o que se apresenta ali não é mais do que a sistematização inicial e inconclusa de uma ferramenta passível de aplicações não exemplificadas no referido texto e o que o próprio Fantappiè alega na introdução do *'Nuovi Fondamenti della Teoria dei Funzionali Analitici'* (1940) é que a formalização da teoria fora realizada primeiramente nos já mencionados trabalhos de 1928 e de 1930, conta a favor da tese pretendida neste artigo o fato de que Luigi Fantappiè havia declarado através de comunicado, feito na seção que deu publicidade para o 'Seminário Matemático e Físico da Universidade de São Paulo' dentro do 'Jornal de Matemática Pura e Aplicada da Universidade de São Paulo – Volume 1º – Fascículo 1º – Junho de 1936', que a sua conferência 'Origem e desenvolvimento da teoria dos Funcionais' serviria *"como capítulo introdutório ao tratado sobre a teoria dos funcionais, que deverá aparecer brevemente"* [FANTAPPIÈ, 1936, p.97]. Portanto, há razões evidentes para acreditar que o texto *'Funcionais...'*, compilado por Dias, seja o fruto das sementes já plantadas desde a Itália e agora regadas com as divulgações que Fantappiè fez na Academia de Ciências, no Rio de Janeiro, através de sua palestra 'O desenvolvimento da Matemática dos últimos cinqüenta anos e no futuro próximo', e no 'Seminário Matemático e Físico da Universidade de São Paulo', com a conferência anteriormente mencionada, no ano de 1935[4]. Mais ainda, este texto certamente serviu de

[1] Ver tradução do texto integral em TÁBOAS, p.113-73.

[2] Estimativa baseada, primeiro, na conferência *'Origem e desenvolvimento da teoria dos Funcionais'* apresentada no Seminário Matemático e Físico da Universidade de São Paulo no ano de 1935 e divulgada em 1936 no 1º Fascículo do 1º Volume do *Jornal de Matemática Pura e Aplicada da Universidade de São Paulo* e, segundo, na volta definitiva de Fantappiè à Itália no início de 1939.

[3] Daqui para frente chamado também de *texto espanhol*.

[4] O fato de a publicação do 'Jornal de Matemática Pura e Aplicada da Universidade de São Paulo' ser datada de Junho de 1936 reforça a suspeita de que o texto *'Funcionais ...'* tenha sido produzido, na melhor das hipóteses,

base para o desenvolvimento das questões acerca do tópico sobre a Teoria dos Funcionais no curso *'Alta analise'* que Fantappiè ministrou entre os verões de 1939 e 1940, no *Reale Istituto Nazionale di Alta Matematica* em Roma, e que depois foi publicado sob as guardas deste mesmo instituto como *'Nuovi Fondamenti della Teoria dei Funzionali Analitici'* (acima citado), pois quase todo o texto brasileiro é repassado na íntegra para este último. As diferenças são as seguintes: o texto italiano distancia-se do brasileiro suave e paulatinamente, depois da apresentação do Capítulo 1, com a incorporação de termos mais modernos para o tratamento de funções regulares e na medida em que avança e leva a cabo as intenções declaradas de confeccionar os Funcionais Analíticos, além, é claro, de apresentar uma introdução mais contundente já que o trabalho é devidamente concluído. Seria leviano, no entanto, acreditar que todo o processo de criação no sentido da expansão desta teoria para funcionais de funções de várias variáveis complexas tivesse se dado na passagem de Fantappiè pelo Brasil, em absoluto, mas o processo de maturação se deu também neste país. Ainda assim, o texto *'Funcionais…'* apresentado no Brasil chegou a apenas caracterizar rigorosamente as regiões funcionais lineares R através de seus conjuntos característicos A na variedade de Segre V_{2n} [5], quando, na verdade, o que se observa na análise de e na aplicação a problemas da física e da própria matemática é a necessidade de algo mais, ou seja, dos próprios funcionais analíticos potencializados pelas suas *indicatrizes*, identificadoras de suas propriedades essenciais como atesta a fórmula fundamental de representação dos funcionais analíticos [FANTAPPIÈ, 1928, p.54 e PELLEGRINO, p.400-4]. Além do mais, com o avanço do estudo da análise e da topologia, o trabalho em estruturar o campo de atuação dos funcionais analíticos sobre uma variedade linear imersa num espaço euclidiano de dimensão adequada acaba se reduzindo a uma esfera complexa unitária de um euclidiano, como atesta a *'Teoria de los funcionales analíticos y sus aplicaciones'* [FANTAPPIÈ, 1943, p.18-21; ver também nota de rodapé em PELLEGRINO, p.361], na qual fica implicitamente sintetizada a discussão para o caso geral n-dimensional, tão caro para Fantappiè em seus trabalhos brasileiro e romano.

Se a argumentação desenvolvida até aqui seguir com base num corte transversal do tempo histórico, feito exatamente no contorno que enquadra a cena em que se concebe o texto brasileiro *'Funcionais...'*, de Luigi Fantappiè, nem será preciso uma análise pormenorizada para desqualificá-lo como matematicamente relevante. Neste caso específico, principalmente, o trabalho de corte transversal, por apoiar-se demasiadamente

---

ainda naquele ano ou então no ano seguinte, e conseqüentemente reforça uma outra suspeita que é a de que o referido texto não tenha sido concluído (ver nota 2 acima).

[5] *"Teorema II – A uma região funcional linear R do espaço $\wp^{(n)}$ está sempre associado um conjunto fechado A da variedade de Segre V_{2n} (que se chama 'característica da região funcional linear') tal que a região R é formada unicamente por todas as funções $y(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ regulares em A"* (*in* TÁBOAS, p.167, Apêndice 1) e *"Vemos, assim, no que se refere àqueles particulares conjuntos do espaço funcional $\wp^{(n)}$ dados pelas regiões funcionais lineares R, que se estabelece uma correspondência biunívoca sem exceção entre tais regiões R e seus conjuntos fechados A (característicos) da variedade de Segre V_{2n} que não esgotam a própria variedade e, portanto, o estudo das regiões funcionais lineares que são conjuntos do espaço funcional $\wp^{(n)}$ poderá, de agora em diante, ser feito através do estudo destes conjuntos fechados A, que são, ao contrário, conjuntos da variedade de Segre V_{2n}, a um número finito de dimensões"* (*in* TÁBOAS, p.171-2, Apêndice 1).

na análise internalista, acaba se tornando ainda mais nocivo à compreensão histórica, pois trata o tema à luz do tempo presente do corte e, como conseqüência, mostra que o texto brasileiro de Fantappiè nada traz de novo em termos científicos convencionais. No entanto, ao restabelecer a investigação sob os moldes da história tratada como um *feixe de trajetórias* à Josep Fontana [FONTANA, 1998; ver também FONTANA, 2000], que prescinde do corte transversal, mas que de forma alguma dispensa a observação da paisagem presente, é o fato da dimensão temporal da análise correr nos dois sentidos, para o passado e para o futuro, indo além dos contornos de análise do presente e, como conseqüência, haver não somente a identificação de uma *relevância histórica*, mas também um resgate da importância matemática dos *'Funcionais...'*, pois o seu conteúdo parece conter a essência de todo o desenvolvimento dessa área de pesquisa da Análise Funcional. Importante ressaltar aqui que a ocorrência do curso na USP e a existência das suas respectivas notas efetuadas por Dias [*in* TÁBOAS, p.113-73] demonstram que o processo de maturação de Fantappiè em relação à teoria dos funcionais analíticos não se deu por um mergulho solitário em estudos matemáticos, mas através de um processo dinâmico de reflexão, transmissão e construção de conhecimentos, cujos esforços renderam à matemática brasileira um desenvolvimento comprovado pelas contribuições, por exemplo, de Omar Catunda e Cândido Lima da Silva Dias, dentre outros[6].

Os *'Funcionais...'*

Este processo de maturação é comprovado por conta de que certas estruturas, que versam sobre representação de $\underline{n^{uplas}}$ complexas sobre uma Variedade de Segre V_{2n}, se apresentam consolidadas no texto brasileiro, mas não aparecem em trabalhos anteriores como os já citados de 1928 e de 1930. O que Fantappiè apresenta – que é talvez a sua primeira e grande marca na produção científica matemática brasileira, quando se toma o *novo fazer matemática* como ponto de partida para análise – nestes seus *'Funcionais...'* são os ajustes que tornaram possível a associação biunívoca entre os números de uma estrutura algébrica de n dimensões complexas e os pontos de uma Variedade de Segre V_{2n} sobre a hiper-esfera unitária de dimensão $[(n+1)^2-2]$ imersa num espaço euclidiano real de dimensão $[(n+1)^2-1]$. A construção desse modelo é considerada por Fantappiè em *'I Funzionali delle Funzioni di due Variabili'* (1930) – para dimensão complexa 2 – e retomada de forma idêntica no Capítulo I de *'Nuovi Fondamenti della Teoria dei Funzionali Analitici'* (1940). No entanto, em trabalhos como *'Teoría de los funcionales analíticos y sus aplicaciones'* (1943) e *'La théorie des fonctionnelles analytiques et ses applications'* (1951), de Franco

[6] Apenas como garantia de qualidade da produção científica, vale observar citações [69], [70], [71], [72] e [73] de Omar Catunda e [76] e [111] de Cândido Lima da Silva Dias, referenciadas em PELLEGRINO, p. 474 e 476, a saber: *CATUNDA, O. 'Sobre as funções de funções de matrizes' (Jornal Mat. Pura e Apl. São Paulo, vol.I, fasc. 2, 1937), 'Un teorema sugl'insieme, che si reconnette alla teoria dei funzionali analitici' (Rend. Lincei, vol XXIX, serie 6ª, 1º sem. 1939, p.17), 'Sobre os sistemas de equações de variações totais em mais de um funcional incógnito' (Anais da Acad. Brasileira de Ciências, t. XIV, n. 2, 30 de junho de 1942), 'Sui sistemi di equazioni alle variazioni totali in piu funzionali incogniti' (En préparation)* (sic.)*, 'Sobre os fundamentos da teoria dos funcionais analíticos' (Tese para a cadeira de Análise Matemática); DIAS, C. L. da S. 'Sobre o conceito de funcional analítico' (Anais da Acad. Brasileira de Ciências, t. XV, n. 1, 31 de Março de 1943) e DIAS, C. L. da S. 'Aplicação dos grupos contínuos finitos a equações diferenciais ordinárias' (En préparation)* (sic.).

Pellegrino, já não mais é feita tal construção, pois assume-se a análise de funções sobre a esfera complexa unitária – as quais deverão ser tomadas em princípio como pertencentes ao espaço de definição dos funcionais – como ponto de partida para o desenvolvimento da teoria, deixando claro, assim, que houve uma assimilação completa da associação entre o espaço complexo S_n e a variedade de Segre V_{2n} no correr dos anos [FANTAPPIÈ, 1943, p.18; PELLEGRINO, p.361]. A confirmação desta tese sobre a maturidade do texto brasileiro fica mais uma vez explicitada a partir das definições sumárias que Fantappiè apresenta para os conceitos de *'distância esférica'* e de *'distância quadrada'* [FANTAPPIÈ, 1943, p.18], que sintetizam, ao sabor da nota explicativa de Franco Pellegrino sobre o uso de apenas funções de uma variável [PELLEGRINO, p.361], em contraposição a toda a discussão detalhada feita no item 3 do capítulo 1 dos *'Funcionais...'* [FANTAPPIÈ *in* TÁBOAS, p.128-9]. Bem, estas noções têm a função de estabelecer bases para a construção de uma topologia própria sobre a variedade de Segre V_{2n} que permita depois discutir conceitos de 'proximidade' entre funções e estabelecer em definitivo a estrutura de um espaço funcional como domínio para a ação de funcionais analíticos lineares. A partir das concepções de distância esférica (ou simplesmente distância, doravante) entre dois pontos de V_{2n} e de vizinhança esférica de um ponto P_0 (bola aberta de raio ε em torno de P_0) serem apresentadas, são fornecidas as definições de *ponto de acumulação*, *conjunto fechado*, *distância entre conjuntos*, *diferença entre conjuntos* – que traduzem os mesmos conceitos que essas expressões indicam atualmente –, *região* e *vizinhança de conjunto*, caras ao desenvolvimento do conceito de função analítica sobre V_{2n}. Neste ponto, por conta das propriedades topológicas observadas e num movimento clássico de análise, porém mais detalhado nos *'Funcionais...'* do que no texto espanhol, Fantappiè lança mão do Teorema de Bolzano-Weierstrass e conclui que a variedade de Segre V_{2n} é compacta. Também observa, pelo Teorema de Borel-Lebesgue, que toda cobertura de um conjunto fechado da variedade de Segre V_{2n} possui sempre uma subcobertura finita. Com relação ao conceito de *região*, o texto brasileiro é mais confuso do que detalhista e o texto espanhol mais eficiente ao conceituar *ponto interior* para definir região como todo conjunto constituído exclusivamente por pontos dessa categoria. Já uma *região conexa* se restringe àquelas em que quaisquer dois de seus pontos podem ser ligados por uma curva contínua inteiramente contida na região, ou seja, como V_{2n} é uma variedade imersa num espaço euclidiano, a idéia de curva contínua está indissociavelmente impregnada por uma conceituação moderna do termo. Porém, todos os textos analisados aqui nesta tese referem-se invariavelmente a conceitos que são seguidos do adjetivo *regular*, que dá ao sujeito a medida de estar associado a alguma função contínua ou a uma função que pode desenvolver-se em série de potências em cada ponto (algo próximo ao conceito usual emprestado às funções analíticas) e indica a opção conceitual de Severi (como apontam as notas em cada um dos textos). A despeito disto, interessante é observar que as *regiões* de V_{2n} são conexas ou formadas por partes conexas, já que toda vizinhança é em si uma *região*. Como já observado anteriormente, em rigorosa congruência com o *'Nuovi Fondamenti della Teoria dei Funzionali Analitici'* (1940), do próprio Fantappiè, são definidas, ainda, *vizinhança de um conjunto* – formada por todos os pontos vizinhos do conjunto – e *domínio* – formado por uma região acrescentada de sua eventual vizinhança. É nesse ponto em que os textos de Fantappiè iniciam, então, a discussão acerca da definição de função analítica de variável(eis) complexa(s) e de suas nuances mais vantajosas para o desenvolvimento das regiões funcionais, domínios dos funcionais analíticos. Este é, também, precisamente o ponto de partida da resenha sobre os tais funcionais analíticos que Franco Pellegrino [PELLEGRINO, p.357-477], na qual assume os conceitos até aqui apresentados como algo de domínio comum aos iniciados no tema.

Assim, no último item, o de número 5, do Capítulo 1 de seus *'Funcionais...'* [FANTAPPIÈ *in* TÁBOAS, p.137-8], Fantappiè apresenta o que se deve entender por função regular num ponto de certa *região R* da Variedade de Segre V_{2n} com o cuidado de ramificar a definição para os dois casos possíveis: aquele em que o ponto em questão é finito, ou seja, cujas coordenadas são todas finitas, e sobre o qual a função é passível de desenvolvimento em série de potências numa sua conveniente vizinhança, e o caso em que o ponto é infinito e a função deve se anular, quando vista como uma nova função que age sobre uma *região* R_1, resultante da transformação linear e não degenerada de *R* e que associa o ponto infinito a um ponto finito de R_1. A partir daí, Fantappiè conceitua função localmente analítica como toda função definida e regular em cada ponto da *região R* da Variedade de Segre V_{2n}, ainda que esta região não seja conexa. Além disso, ele toma o cuidado de caracterizar as funções analíticas em *sentido estrito* como aquelas que são localmente analíticas numa *região conexa R*, eventualmente Riemanniana (região em que dois pontos sobrepostos com mesmas coordenadas separam folhas diferentes de uma cobertura de tal região, ou seja, todo ponto de qualquer uma das duas folhas possui uma conveniente vizinhança dentro da própria folha e que não contém o ponto na interseção), da Variedade de Segre V_{2n}, mas que não sejam prolongáveis[7] (garantindo assim a univocidade de sua definição) a outro *R*, que por isso é considerado seu *campo natural de existência*. O efeito de se trabalhar com o conceito de região Riemanniana é o de garantir que certas funções analíticas possam porventura assumir valores distintos em um mesmo ponto, fator que determina uma não necessária, mas possível ampliação na quantidade de funções a serem incorporadas no conjunto em que agem os funcionais analíticos. Por fim, Fantappiè observa que toda função localmente analítica em sentido estrito fica totalmente determinada pelos valores assumidos na vizinhança de um ponto qualquer do seu campo natural de existência e que, contrariamente, para identificar uma função analítica basta apresentar uma região *R* na qual a função estará definida e os valores por ela aí assumidos. É, assim, natural a opção por tratar prioritariamente de função que não esteja definida numa *cobertura* da Variedade de Segre, pois, desta forma, ela resultaria nula em toda região conexa [ver FANTAPPIÈ *in* TÁBOAS, p.139]. Os mesmos passos dados aqui são seguidos pelo trabalho espanhol diferenciando as funções localmente analíticas quando o são em toda a *região R* de definição como *funções ultrarregulares*; e encerra a seção com a definição de

[7] Se uma função $y_0(t)$ localmente analítica está definida em uma região R_0, então toda função $y_1(t)$ também localmente analítica, porém definida em uma região R_1 que contém R_0, e ainda por cima coincidente com $y_0(t)$ em R_0, é chamada prolongamento desta última.

prolongamento de uma função analítica, identicamente ao que está formulado na nota 7 acima [FANTAPPIÈ, 1943, p.20-1].

Franco Pellegrino, ao fazer sua resenha acima citada sobre o desenvolvimento da Teoria dos Funcionais, concebe estruturas despojadas de tudo que é prolixo e sintetiza as discussões apresentadas sobre funções como argumentos de funcionais analíticos nas memórias brasileira e espanhola de Fantappiè. Ele rapidamente introduz os elementos fundamentais para a análise dos funcionais analíticos, primeiro com uma justificativa para utilização de funções mais gerais do que as analíticas à Weierstrass, assim como o ocorrido no trabalho espanhol, que são as localmente analíticas e continua mais adiante com a definição de função bi-regular ao invés de ultrarregular que aparece no texto espanhol, precedida de uma rápida observação a respeito das vantagens trazidas por esta nova categoria e que se tornariam visíveis no desenrolar do texto. Com exatamente as mesmas considerações a respeito das singularidades associadas às funções localmente analíticas que estão presentes também no texto espanhol, Pellegrino finaliza os comentários sobre *campo natural de existência* de funções desta categoria com a mesma idéia de prolongamento.

A partir desse ponto, os três trabalhos até aqui analisados com mais detalhes apresentam as propriedades elementares do espaço funcional, mas, mais uma vez, por conta de Fantappiè trabalhar numa variedade de Segre V_{2n} na sua *Memória* brasileira, alguns ajustes que identificam plenamente a concepção de função localmente analítica com os conceitos de função ultrarregular (trabalho espanhol) e função bi-regular (trabalho de Franco Pellegrino) são levados a cabo. Dessa forma, o espaço funcional $\wp^{(n)}$ é constituído por uma região *R* da variedade V_{2n}, na qual está definida uma função regular $y(t_1,t_2,\ldots,t_n)$. Porém, esta região *R* não poderá esgotar toda a variedade de Segre V_{2n}, sob pena da função $y(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ se identificar com a função nula, que por força do seu caráter absolutamente restritivo, é excluída como ponto do espaço funcional. Duas outras observações importantes são feitas: a primeira delas deriva do fato de que a região R de definição de y é um subconjunto próprio de $\wp^{(n)}$ e diz que o seu conjunto complementar I (em relação a $\wp^{(n)}$) é fechado e contém sempre um ponto do espaço funcional $\wp^{(n)}$; a segunda consideração toma o cuidado de fazer uma diferenciação para preservar idéias acerca de univocidade e afirma que todo possível prolongamento y_1 de um ponto $y = y(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ pertencente ao espaço funcional $\wp^{(n)}$ é diferente de y [FANTAPPIÈ *in* TÁBOAS, p.140-41].

As noções topológicas básicas de vizinhança restrita e vizinhança linear são conceituadas, então, para os pontos do espaço funcional. O trabalho brasileiro diferencia-se do trabalho espanhol e do texto de Franco Pellegrino na medida em que o primeiro apresenta *vizinhança linear* antes de *vizinhança restrita*. A *vizinhança linear (A)* de um ponto y_0 do espaço funcional $\wp^{(n)}$, definido numa região R_0, é o conjunto de todas as funções localmente analíticas y que são regulares no fechado *A* e cujos campos de existências contêm *A*. Nestas mesmas condições e dado um real $\sigma > 0$, a *vizinhança restrita* (ou simplesmente *vizinhança*) (A, σ) do ponto y_0 é o conjunto de todas as funções regulares em *A* para as quais vale

$$\left| y(t_1, t_2, \ldots, t_n) - y_0(t_1, t_2, \ldots, t_n) \right| < \sigma \,, \tag{*}$$

qualquer que seja $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in A$. Independentemente da ordem em que estas definições estão apresentadas, nos três trabalhos elas são imediatamente sucedidas pela consideração de que as vizinhanças *(A, σ)* de uma função y_0, estão contidas na vizinhança linear *(A)* da mesma função, qualquer que seja a escolha do real positivo σ. Este parece ser o motivo que evidencia a opção por definir, primeiro, vizinhança restrita e, depois, vizinhança linear, no trabalho espanhol e no texto de Pellegrino. Franco Pellegrino credita a Omar Catunda [PELLEGRINO, p.363] [8] a melhoria da estrutura de definições no sentido de privilegiar uma compreensão mais rápida e clara para o desenvolvimento teórico e justifica, ainda, esta opção com a citação antecipada do teorema que caracteriza o espaço funcional através de conjuntos fechados sobre a variedade de Segre V_{2n}.

Depois, é constatado que a vizinhança linear *(A)* de uma função y_0 contém todas as vizinhanças *(A, σ)* desta função, que é uma conclusão óbvia se for acrescentado à definição de vizinhança linear a desigualdade (*). Mas não é só isso, pois para toda função y da vizinhança linear *(A)* de y_0 é possível encontrar uma conveniente vizinhança de y_0 que contém y. Essa operação pode ser realizada observando-se que $y - y_0$ é uma função contínua em A e, portanto, existe um valor máximo M tal que $\left| y - y_0 \right| \leq M$. Assim, tomando-se $\sigma > M$, y resultará interior à vizinhança *(A, σ)* de y_0. Disso tudo, pode-se tirar uma nova idéia: a vizinhança linear *(A)* de y_0 é um conjunto numérico do espaço funcional $\wp^{(n)}$ que contém todas as vizinhanças *(A, σ)* desta função.

Agora fixado o espaço funcional e seu conseqüente sistema de vizinhanças, mostra-se que o seu comportamento é o mesmo que o de um espaço topológico por atender aos três postulados de Hausdorff. Na verdade, o texto brasileiro demonstra inicialmente que o conjunto de vizinhanças lineares de uma função localmente analítica satisfaz os postulados de Hausdorff e, posteriormente, que o sistema formado pelas vizinhanças *(A, σ)* de uma tal função satisfaz também o conhecido postulado da separação. O texto espanhol e o de Pellegrino fixam apenas suas atenções no espaço funcional analítico (com suas funções ultrarregulares e birregulares, respectivamente), dotado da tal estrutura de vizinhanças restritas, para caracterizá-lo como espaço topológico, de forma análoga ao que é feito no trabalho brasileiro. Além de tudo isso, observa-se ainda uma sutil diferença entre o texto espanhol e o trabalho de Pellegrino que é uma suplementação, fornecida neste último, que diz respeito à natureza topológica do espaço das funções localmente analíticas e birregulares [PELLEGRINO, p.365], que o aproxima mais uma vez do texto brasileiro, por conta do já citado postulado da separação. Vale observar, no entanto, que Luigi Fantappiè já havia feito apreciação dessa idéia em uma breve nota que enviara para o *Reale Istituto Nazionale di Alta Matematica* de Roma, em 1940, sob o título *'Lo spazio funzionale analitico come spazio topologico T_0 '*.[FANTAPPIÈ, 1940(2)].

[8] Este tipo de citação importa mais para este trabalho do que a averiguação do próprio trabalho de Catunda, pois dá mostra de sua grandeza junto à comunidade científica a qual está inserido.

A síntese conquistada no processo de lapidação teórica, efetuada ao longo do tempo, permite um avanço mais acentuado para o desenvolvimento do estudo dos funcionais analíticos, a ponto de que as propriedades topológicas de conjuntos dos espaços funcionais acabam por levar, no texto espanhol de Fantappiè e no texto de Franco Pellegrino, mais rapidamente às mesmas conclusões que Fantappiè tira nos seus *'Funcionais...'*. Assim, enquanto o texto brasileiro, após apresentar os conceitos de *ponto de acumulação* e de *região funcional* [FANTAPPIÈ *in* TÁBOAS, p.148-52], opta por discutir *linha analítica* e *variedade analítica* [FANTAPPIÈ *in* TÁBOAS, p.150-60], por apresentar a estrutura algébrica de *módulo com multiplicadores* e por fim conceituar *região funcional* linear do espaço funcional [FANTAPPIÈ *in* TÁBOAS, p.160-1ss.] para somente então apresentar os dois teoremas que domesticam, por assim dizer, a caracterização das *regiões funcionais* como conjuntos fechados sobre a variedade complexa que contém o espaço funcional sob análise, o texto espanhol e o texto de Franco Pellegrino optam por outra abordagem [FANTAPPIÈ, 1943, p.24 e PELLEGRINO, p.365-6] e fazem uma pequena inversão para atacar de forma mais direta estes dois resultados, deixando por último a apresentação da discussão, não menos importante, sobre *linhas analíticas de um espaço funcional*. No entanto, a discussão não pode deixar de tocar novamente um ponto de extrema importância no desenvolvimento do trabalho brasileiro, que é a questão da expansão pretendida por Fantappiè em relação a trabalhos anteriores, ou seja, a sua busca por trabalhar com funcionais de várias variáveis. A despeito das simplificações conquistadas com o desenvolvimento interno da disciplina ao longo do tempo, o movimento efetuado por Fantappiè na divulgação brasileira só foi levado integralmente a cabo no texto romano *'Nuovi Fondamenti della Teoria dei Funzionali Analitici'* (1940), o que por si só já é evidência de importância histórica. Neste sentido, é fator determinante a observação de que o texto compilado por Dias apresente a discussão de Variedades Analíticas como extensão do conceito de Linhas Analíticas.

Seguem daqui, imediatamente os teoremas de caracterização dos espaços funcionais lineares mencionados na Introdução, ao contrário do que é feito no texto brasileiro – como já observado acima –, mas as demonstrações são precisamente as mesmas nos três trabalhos, a menos, é claro, dos já mencionados ajustes técnicos requeridos no trabalho brasileiro [FANTAPPIÈ *in* TÁBOAS, p.166-7; FANTAPPIÈ, p.24-5; PELLEGRINO, p.367-8].

O trabalho brasileiro se fecha quase melancolicamente, por assim dizer, após a conclusão apoteótica desta caracterização das regiões funcionais que reduzem seu estudo aos conjuntos fechados sobre a variedade de Segre V_{2n} (ou sobre a esfera complexa em [FANTAPPIÈ, 1943, p.27] e em [PELLEGRINO, p.370]).

Conclusão

Ainda que o trabalho espanhol de Fantappiè e o de Franco Pellegrino dêem continuidade aos estudos da teoria dos funcionais com a apresentação dos resultados estruturados a partir do conceito de *linha analítica do espaço funcional*, o último é um pouco mais detalhista [PELLEGRINO, p.370] e apresenta, em mais uma pequena diferenciação em relação ao primeiro, uma discussão sobre *regiões funcionais não lineares* [PELLEGRINO, p.372], o que revela os avanços incorporados pelo desenvolvimento da teoria. Agora sim uma rápida análise do que em geral fecha um primeiro capítulo, ao contrário do que ocorre no texto brasileiro, de estudos sobre funcionais analíticos: as *linhas analíticas sobre o espaço funcional*. A definição segue o mesmo roteiro nas três obras em destaque, observando sempre os ajustes técnicos mais intensos no trabalho brasileiro e a diferenciação praticamente semântica entre função ultrarregular (no espanhol) e função bi-regular (no de Pellegrino): considere uma função $y = y(t,\alpha)$ a duas variáveis complexas t e α que, para cada α_0 de uma região Ω da esfera complexa α, se reduz a uma função regular $y_0 = y(t,\alpha_0)$ definida e regular em uma região $M(\alpha_0)$ da esfera complexa t, que depende, naturalmente, de α_0. Seja, ainda, $I(\alpha_0)$ o conjunto fechado complementar de $M(\alpha_0)$ e suponha, por fim, que a função $y = y(t,\alpha)$ seja contínua em α neste fechado. Assim, para todo $\alpha_0 \in \Omega$ fixado de maneira arbitrária, a cada real $\varepsilon > 0$ corresponde uma vizinhança $E(\alpha_0)$ de α_0 contida em Ω e tal que, para qualquer $\alpha \in E(\alpha_0)$, a distância entre os conjuntos fechados $I(\alpha)$ e $I(\alpha_0)$ seja menor do que ε. Nestas condições, o conjunto de funções na variável t que se obtém a partir da função $y(t,\alpha)$, ao variar α em Ω, constitui o que se chama de *linha analítica* L do espaço funcional, e α é o parâmetro que individualiza cada ponto $y_0 = y(t,\alpha_0)$ sobre a linha analítica L. O trabalho brasileiro contém ainda, como já descrito anteriormente, a concepção de *variedade analítica*, que, ao invés de trabalhar com uma função nas variáveis t e α da definição de linha analítica, toma r parâmetros $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_r$ para constituir de maneira semelhante a L uma variedade V_{2r} imersa na variedade de Segre $V_{2(n+r)}$.

Após uma discussão conceitual e exemplificação, os trabalhos se remetem a um teorema que no texto brasileiro é chamado de *'teorema de origem'* [FANTAPPIÈ *in* TÁBOAS, p.158] e que é apresentado por Fantappiè no texto espanhol da seguinte maneira, considerando-se $y_0 = y(t,\alpha_0)$ ponto de uma linha analítica: *"Tomando al arbitrio un entorno (A,σ) de $y_0(t)$ se puede encontrar en Ω un entorno $E(\alpha_0)$ de α_0 tal, que para todos los puntos de $E(\alpha_0)$ las funciones de la línea $y = y(t,\alpha)$ queden en el entorno (A,σ) de $y_0(t)$ "* [FANTAPPIÈ, 1943, p.29; ver também PELLEGRINO, p.373-4]. O texto espanhol e o texto de Franco Pellegrino exploram um pouco mais este último resultado e concebem *'fragmento de linha analítica'* como uma *região* Ω' interior a Ω, formada pelos valores de α associados aos pontos de uma linha analítica *L* penetrada por uma região funcional *R* e que contém tais pontos de *L*, conceito similar ao trecho regular de variedade analítica no trabalho brasileiro.

No entanto, o trabalho de Pellegrino somente finaliza esse primeiro passo no desenvolvimento da teoria de funcionais analíticos com apresentação de mais um resultado, que de certa forma antecipa a fórmula fundamental[9] que caracteriza um funcional linear:

[9] *I funzionali analitici*, Memoria del prof. Luigi Fantappiè, 1928 – Capitolo II – 33. Valore del funzionale lineare per una funzione qualunque del campo di definizione, p.54: *"Questa formola ($F[y(t)] = \frac{1}{2\pi i}\int_C v(t)y(t)dt$),*

"Si toutes les fonctions d'une ligne analytique $y = y(t, \alpha)$ qu'on obtien pour chaque α sur λ appartiennent à une région linéaire (A), cette région contient aussi la fonction $y(t) = \int_{\lambda} c(\alpha)\, y(t, \alpha) d\alpha$ " [PELLEGRINO, p.374].

O segundo passo "natural" nesse estudo sobre funcional analítico é efetivamente defini-lo, e também ao funcional analítico linear, e explorar as propriedades advindas principalmente do conceito de *indicatriz do funcional*. Isso é feito de forma rápida no texto espanhol de Fantappiè e no texto de Franco Pellegrino, o que alimenta com certeza a frustração em relação ao texto brasileiro inconcluso, até mesmo porque Fantappiè já faz uso da indicatriz, num particular estudo unidimensional em [FANTAPPIÈ, 1932, p.20]. Assim, a construção desse segundo passo é realizada, em linhas gerais, através das seguintes etapas: definição de funcional analítico, discussão a respeito da continuidade de funcionais analíticos sobre uma linha analítica e continuidade em geral, definição de funcionais analíticos lineares, derivação sob o sinal de funcionais lineares e integração de funcionais lineares, estudo de funcionais lineares de uma série, continuidade de funcionais lineares, apresentação de indicatriz anti-simétrica e simétrica de um funcional linear e o potencial para o cálculo de seus valores, apresentação do resultado que gera a fórmula fundamental de funcionais lineares, seguidos de estruturação do cálculo simbólico entre operadores funcionais lineares e posteriores aplicações [FANTAPPIÈ, 1943, p.31-56; PELLEGRINO, p.375ss]. Como já visto, nada disso está contemplado no trabalho brasileiro, porém não se deve desqualificá-lo a ponto de ser considerado tão somente uma leitura introdutória ao tema e de, portanto, ter o papel histórico de servir como transferência de conhecimento científico. Não, ele vai além! Apesar de ter sido dito no primeiro parágrafo deste capítulo que a peça brasileira se 'mostra inconclusa' e que 'já havia ganhado mundo', ela na verdade aprofunda as discussões, obviamente restritas à caracterização de regiões funcionais lineares, feitas com *'I Funzionali Analiciti'* (1928) – que trabalha com funcionais de funções de uma variável – e *'I Funzionali delle Funzione di due Variabili'* (1930), avançando com análise para funcionais de funções de várias variáveis.

No entanto, o fato provável mais marcante de toda essa história do desenvolvimento da teoria dos funcionais analíticos é que Fantappiè prometeu no *Jornal de Matemática Pura e Aplicada*, em sua publicação de 1936 (ver Introdução acima), um texto a ser publicado no Brasil. Fantappiè ficaria neste país até praticamente fins de 1938, voltando para a Itália em 1939, portanto o referido texto deveria ter sido desenvolvido num intervalo de tempo de dois anos. Como já mencionado anteriormente, o texto compilado por Dias deve ter sido o resultado de tal investida e a sua interrupção, ao final de um primeiro capítulo, parece ter sido motivada pelo retorno de Fantappiè à Itália. O reforço das convicções nessa tese vem exatamente da análise do acima citado *'Nuovi fondamenti della*

---

fondamentale per tutta la teoria dei funzionali analitici, ci permete di calcolare il valore di un qualunque funzionale lineare F per qualunque funzione y(t) del suo campo di definizione, appena sia conosciuta la funzione indicatrice v(t) del funzionale. Mentre dunque la formola $v(\alpha) = F_t\left[\frac{1}{t-\alpha}\right]$ ci fa conoscere per ogni funzionale analitico lineare la sua funzione indicatrice, la formola ora trovata, vicecersa, ci individua completamente il funzionale F, quando se ne conosca l'indicatrice."

teoria dei funzionali analitici', que tem o seu primeiro capítulo praticamente idêntico ao texto brasileiro, diferenciando-se na introdução e prosseguindo com o desenvolvimento da teoria. Assim, suspeita-se que ao chegar a Roma e assumir a tarefa de ministrar um curso de análise matemática, Fantappiè valeu-se das exposições já apresentadas para o grupo de novos pesquisadores – por ele formado no Brasil – como ponto de partida para suas aulas, o que justificaria a congruência entre os textos e relevaria em definitivo a importância matemática e histórica dos *'Funcionais de Funções de Várias Variáveis'*.

Referências Bibliográficas

FANTAPPIÈ, L. *I Funzionali analitici*., Cagliari: S.N.,1928.

FANTAPPIÈ, L. *Funzionali delle funzioni di due variabilli*. Roma: S.N., 1930.

FANTAPPIÈ, L. (diretor) *Jornal de Matemática Pura e Aplicada da Universidade de São Paulo*. São Paulo: Edições da Universidade de São Paulo, 1936 (Volume 1º - Fascículo 1º - Junho). 97p.

FANTAPPIÈ, L. *Lo spazio funzionale analitico come spazio topologico T_0*. Roma: Reale Istituto Nazionale di Alta Matematica, 1940. 7p.

FANTAPPIÈ, L. *Nuovi fondamenti della teoria dei funzionali analitici*. Roma: Reale Istituto Nazionale di Alta Matematica, 1940. 88p.

FANTAPPIÈ, L. *Teoria de los funcionales analiticos y sus aplicaciones*. Barcelona: Consejo Superior de Investtigaciones Científicas, 1943. 56p.

FANTAPPIÈ, L. *Opere Scelte*. Vol.1. Reprint. Roma: Unione Matematica Italiana, 1973.

FONTANA, J. História: análise do passado e projeto social. Tradução de Luiz Roncari. Bauru: EDUSC. 1998. 396p.

FONTANA, J. Introdução ao estudo da história geral. *Tradução de Heloísa Reichel. Bauru: EDUSC. 2000. 409p.*

PELLEGRINO, F. *La théorie des fonctionnelles analytiques et ses applications*. In LÉVY, P. *Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle*. 2. éd. des Leçons d'analyse fonctionnelle, avec un complément sur les fonctionnelles analytiques, par F. Pellegrino. Paris, Gauthier-Villars, 1951 (Collection de monographies sur la théorie des fonctions). 482p.

TÁBOAS, P. Z. *Luigi Fantappiè: influências na matemática brasileira. Um estudo de história como contribuição para a educação matemática.* Rio Claro: UNESP, Tese de Doutorado, 2005. 207p.

Plínio Zornoff Táboas
Doutor pela UNESP – Rio Claro em
Educação Matemática/História da Matemática
Professor: UNIARARAS
Colégio Leonardo de Jundiaí
E-mail: mptaboas@linkway.com.br