Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 8 nº 15 (abril/2008 - setembro/2008) - pág.29-41
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

LEYENDO A EULER: ALGUNOS PROBLEMAS CONCERNIENTES A CIERTAS CLASES DE TRIÁNGULOS

Vicente Meavilla
Universidad de Zaragoza - España

(aceito para publicação em maio de 2007)

Resumen

Este artículo ofrece una adaptación del trabajo original de Euler *Proprietates triangulorum, quorum anguli certam inter se tenent rationem* (1767). En él, Eulero resuelve un problema de geometría utilizando tópicos elementales de geometría sintética, trigonometría y matemática discreta. Durante el proceso de resolución se pone de manifiesto el orden, la precisión y la tenacidad del sabio suizo en la búsqueda de una solución, cualidades éstas indispensables en el quehacer del buen matemático.

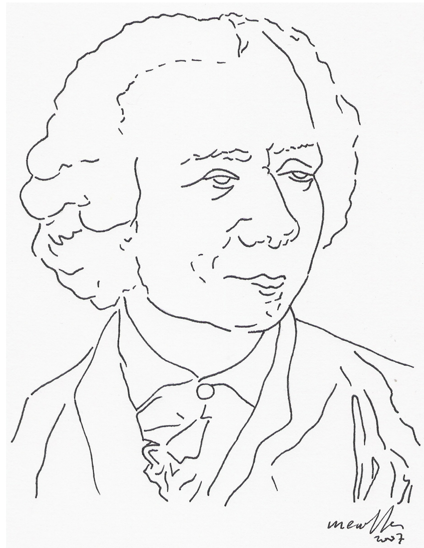
Palabras Claves: Euler, geometria, trigonometria, matemática discreta, resolución de problemas, enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

Abstract

This article offers an adaptation of the original work of Euler Proprietates triangulorum, quorum anguli certam inter se tenent rationem (1767). In it, Euler solves a geometry problem using elementary topics of synthetic geometry, trigonometry and discreet mathematics. During the resolution process it is showed the order, the precision and the tenacity of Euler in the search of a solution, qualities these indispensable in the activities of the good mathematicians.

Keywords: Euler, geometry, trigonometry, discreet mathematics, resolution of problems, teaching and learning of the Mathematics

El 15 de abril de 2007 celebramos el tricentésimo aniversario del nacimiento de Leonhard Euler, uno de los científicos más notables de toda la historia. Aprovechando este acontecimiento nos parece oportuno dedicar este artículo a la memoria *Proprietates triangulorum, quorum anguli certam inter se tenent rationem* (Propiedades de los triángulos cuyos ángulos tienen entre sí alguna razón)[1] en la que el erudito suizo establece algunas relaciones entre las longitudes de los lados de un triángulo a partir de otras entre las amplitudes de sus ángulos.



La elección de este texto se debe, por una parte, a que la mayoría de los contenidos matemáticos que intervienen son de carácter elemental y, por otro lado, a que en él se pone de manifiesto el estilo claro y preciso de Eulero.

1. El contenido de la memoria

67

PROPRIETATES
TRIANGVLORVM, QVORVM ANGVLI
CERTAM INTER SE TENENT RATIONEM.

Auctore

L. EVLERO.

A lo largo de las treinta y seis páginas del trabajo, Euler resuelve once problemas en los que deduce las ecuaciones polinómicas que deben satisfacer las longitudes de los lados de un triángulo cuando las amplitudes de dos de sus ángulos guardan una razón determinada.

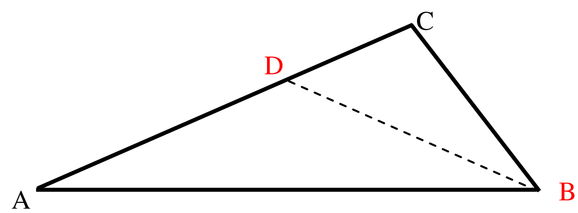
[1] *Novi Commentarii Academiae Scientarum Petropolitanae* 11, 1767, pp. 67-102.

Advirtamos que el simbolismo algebraico utilizado en todo el discurso es casi idéntico al actual. Tan sólo una pequeña diferencia: Euler escribe aa, bb, cc,... en lugar de a^2, b^2, c^2, . . . Notemos también, que para la unidad imaginaria se usa el *radical* $\sqrt{-1}$ en lugar del símbolo i, que fue introducido por Euler en 1777, diez años después de que fuesen publicadas las *Proprietates triangulorum*.
En las líneas que siguen presentamos una adaptación de los siete primeros problemas al lenguaje y estilo moderno. Sin embargo, hemos procurado respetar el razonamiento deductivo del sabio de Basilea.

2. Los problemas

Problema 1

Si en un triángulo ABC se verifica que $\angle B = 2\angle A$, determinar la relación entre las longitudes de sus lados AB = c, AC = b y BC = a.



Bisequemos el ángulo B por la recta BD. Con esto, el triángulo BCD es semejante al ABC.

Entonces:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{CD} \quad \text{o} \quad \frac{b}{a} = \frac{c}{BD} = \frac{a}{CD}$$

Por tanto:

$$BD = \frac{ac}{b} \quad \text{y} \quad CD = \frac{a^2}{b}$$

Además:

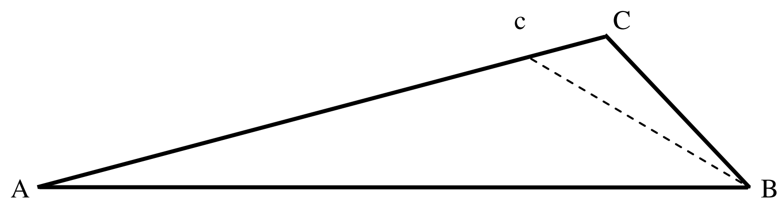
$$AD = AC - DC = b - \frac{a^2}{b} = \frac{b^2 - a^2}{b}$$

Como AD = DB, resulta que:

$$\frac{b^2 - a^2}{b} = \frac{ac}{b} \Rightarrow b^2 - a^2 = ac \Rightarrow b^2 - a^2 - ac = 0 \Rightarrow b^2 - a(a + c) = 0$$

Problema 2

Si en un triángulo ABC el ángulo ABC es el triple del ángulo A, determinar la relación entre las longitudes de sus lados AB = c, AC = b y BC = a.



Desde el punto B tracemos la recta Bc de modo que el ángulo CBc sea igual al ángulo A. Entonces, el ángulo Abc será doble que A. Por tanto, el triángulo Abc es como el del problema 1.

El triángulo BCc es semejante al ACB, entonces:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AB}{Bc} = \frac{BC}{Cc} \quad \text{o} \quad \frac{b}{a} = \frac{c}{Bc} = \frac{a}{Cc}$$

Por tanto:

$$Bc = \frac{ac}{b} \quad \text{y} \quad Cc = \frac{a^2}{b}$$

Además:

$$Ac = AC - Cc = b - \frac{a^2}{b} \Rightarrow Ac = \frac{b^2 - a^2}{b}$$

Si en el triángulo ABc ponemos AB = γ, Ac = β y Bc = α, entonces, en virtud del problema precedente, se tiene que:

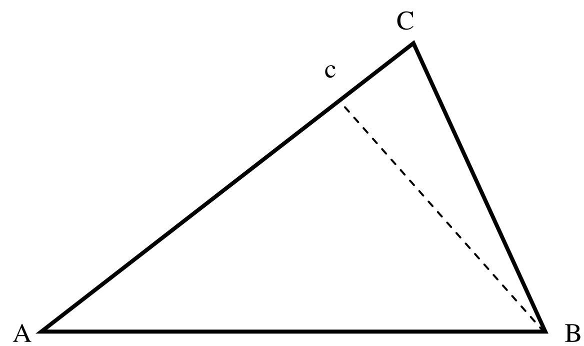
$$\beta^2 - \alpha^2 - \alpha\gamma = 0$$

Ahora bien, como $\gamma = c$, $\beta = \frac{b^2 - a^2}{b}$, $\alpha = \frac{ac}{b}$, sustituyendo en la expresión anterior resulta:

$$\frac{\left(b^2 - a^2\right)^2}{b^2} - \frac{a^2c^2}{b^2} - \frac{ac^2}{b} = 0 \Rightarrow b^3 - ab^2 - a^2b - a(c^2 - a^2) = 0$$

Problema 3

Si en el triángulo ABC el ángulo ABC es cuádruplo del A, determinar la relación entre las longitudes de sus lados AB = c, AC = b y BC = a.



Desde el vértice B tracemos la recta Bc de modo que el ángulo CBc sea igual al A. Como el ángulo ABc es triple que el A, el triángulo ABc es como el del problema 2. Además, el triángulo BCc es semejante al triángulo ACB.

Entonces, como antes, resulta que:

$$Bc = \frac{ac}{b} \quad , \quad Cc = \frac{a^2}{b} \quad , \quad Ac = \frac{b^2 - a^2}{b}$$

Si en el triángulo ABc ponemos AB = γ, Ac = β y Bc = α, entonces, en virtud del problema anterior, se tiene que:

$$\beta^3 - \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta - \alpha(\gamma^2 - \alpha^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{b^2 - a^2}{b}\right)^3 - \frac{ac}{b}\left(\frac{b^2 - a^2}{b}\right)^2 - \left(\frac{ac}{b}\right)^2\left(\frac{b^2 - a^2}{b}\right) - \frac{ac}{b}\left(c^2 - \left(\frac{ac}{b}\right)^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^4 - a(c + 2a)b^2 - a(c + a)(c^2 - a^2) = 0$$

Problema 4

Si en el triángulo ABC el ángulo ABC es quíntuplo del A, determinar la relación entre las longitudes de sus lados AB = c, AC = b y BC = a.

Apoyándose en el resultado del problema anterior y procediendo de modo similar a los casos precedentes, Euler obtiene la siguiente relación entre las longitudes de los lados del triángulo ABC en el que el ángulo ABC es quíntuplo del A.

$$b^5 - ab^4 - 2a^2b^3 - a(c^2 - 2a^2)b^2 - a^2(c^2 - a^2)b - a(c^2 - a^2)^2 = 0$$

Problema 5

Si en el triángulo ABC el ángulo ABC es séxtuplo del A, determinar la relación entre las longitudes de sus lados AB = c, AC = b y BC = a.

En este caso, la relación obtenida es:

$$b^6 - a(c + 3a)b^4 - a(c + a)(c^2 + ac - 3a^2)b^2 - a(c + a)(c^2 - a^2)^2 = 0$$

Corolario 1

Si el ángulo ABC es el séptuplo de A, entonces la relación entre las longitudes de los lados del triángulo es:

$$b^7 - ab^6 - 3a^2b^5 - a(c^2 - 3a^2)b^4 - a^2(2c^2 - 3a^2)b^3 - a(c^2 - a^2)(c^2 - 3a^2)b^2 - a^2(c^2 - a^2)b - a(c^2 - a^2)^3 = 0$$

Corolario 2

Si el ángulo ABC es el óctuplo de A, entonces la relación entre las longitudes de los lados del triángulo viene dada por:

$$b^8 - a(c + 4a)b^6 - a(c^3 + 3ac^2 - 3a^2c - 6a^3)b^4 - a(c + a)(c^2 - a^2)(c^2 + ac - 4a^2)b^2 - a(c + a)(c^2 - a^2)^3 = 0$$

Escolio

Si el ángulo ABC es igual a n · BAC, siendo n un número natural no nulo, los resultado obtenidos hasta el momento se pueden resumir en la tabla siguiente:

n	Relación entre las longitudes de los lados del triángulo ABC [2]
1	$b - a = 0$. . . . . A
2	$b^2 - a(a + c) = 0$. . . . . B
3	$b^3 - ab^2 - a^2b - a(c^2 - a^2) = 0$. C
4	$b^4 - a(c + 2a)b^2 - a(c + a)(c^2 - a^2) = 0$. . . . . D
5	$b^5 - ab^4 - 2a^2b^3 - a(c^2 - 2a^2)b^2 - a^2(c^2 - a^2)b - a(c^2 - a^2)^2 = 0$. . . . . E
6	$b^6 - a(c + 3a)b^4 - a(c + a)(c^2 + ac - 3a^2)b^2 - a(c + a)(c^2 - a^2)^2 = 0$. . . . . F

[2] El caso n = 1 corresponde al triángulo isósceles en el que se cumple obviamente que $a = b \Rightarrow b - a = 0$.

7	$b^7 - ab^6 - 3a^2b^5 - a(c^2 - 3a^2)b^4 - a^2(2c^2 - 3a^2)b^3 - a(c^2 - a^2)(c^2 - 3a^2)b^2 - a^2(c^2 - a^2)b - a(c^2 - a^2)^3 = 0$. . . . . G
8	$b^8 - a(c + 4a)b^6 - a(c^3 + 3ac^2 - 3a^2c - 6a^3)b^4 - a(c + a)(c^2 - a^2)(c^2 + ac - 4a^2)b^2 - a(c + a)(c^2 - a^2)^3 = 0$. . . . . H

Habiendo llegado a este punto se acaban los razonamientos de geometría sintética y comienza otro tipo de discurso.

Problema 6

Si en el triángulo ABC los ángulos A y B son tales que $\angle B = 2i\angle A$, siendo 2i un número entero y par cualquiera, determinar la relación entre las longitudes de sus lados AB = c, AC = b y BC = a.

Consideremos la tabla:

i	Relación entre las longitudes de los lados del triángulo ABC
1	$B = b^2 - a(a + c) = 0$
2	$D = b^4 - a(c + 2a)b^2 - a(c + a)(c^2 - a^2) = 0$
3	$F = b^6 - a(c + 3a)b^4 - a(c + a)(c^2 + ac - 3a^2)b^2 - a(c + a)(c^2 - a^2)^2 = 0$
4	$H = b^8 - a(c + 4a)b^6 - a(c^3 + 3ac^2 - 3a^2c - 6a^3)b^4 - a(c + a)(c^2 - a^2)(c^2 + ac - 4a^2)b^2 - a(c + a)(c^2 - a^2)^3 = 0$

A partir de ella, Euler presenta las relaciones entre las longitudes de los lados del triángulo bajo una nueva apariencia.

i	Relación entre las longitudes de los lados del triángulo ABC
1	$B = (b^2 - a^2) - ac = 0$
2	$D = (b^2 - a^2)^2 - ac(b^2 - a^2) - a^2c^2 - ac^3 = 0$
3	$F = (b^2 - a^2)^3 - ac(b^2 - a^2)^2 - 2a^2c^2(b^2 - a^2) - ac^3(b^2 - 2a^2) - a^2c^4 - ac^5 = 0$
4	$H = (b^2 - a^2)^4 - ac(b^2 - a^2)^3 - 3a^2c^2(b^2 - a^2)^2 - ac^3(b^2 - 3a^2)(b^2 - a^2) - a^2c^4(2b^2 - 3a^2) - ac^5(b^2 - 3a^2) - a^2c^6 - ac^7 = 0$

De aquí, se descubre que:

$D - B(b^2 - a^2) = -a^2c^2 - ac^3$

$F - D(b^2 - a^2) = -a^2c^2(b^2 - a^2) + a^3c^3 - a^2c^4 - ac^5$

$H - F(b^2 - a^2) = -a^2c^2(b^2 - a^2)^2 + a^3c^3(b^2 - a^2) - a^2c^4(b^2 - 2a^2) + 2a^3c^5 - a^2c^6 - ac^7$

Además:

$D - B(b^2 - a^2 + c^2) = -b^2c^2$

$F - D(b^2 - a^2 + c^2) = -b^2c^2(b^2 - a^2) + ab^2c^3$

$H - F(b^2 - a^2 + c^2) = -b^2c^2(b^2 - a^2)^2 + ab^2c^3(b^2 - a^2) + a^2b^2c^4 + ab^2c^5$

De donde, dividiendo los dos miembros de las expresiones anteriores por $-b^2c^2$, resulta:

$$\frac{B(b^2 - a^2 + c^2) - D}{b^2c^2} = 1$$

$$\frac{D(b^2 - a^2 + c^2) - F}{b^2c^2} = (b^2 - a^2) - ac^2 = B$$

$$\frac{F(b^2 - a^2 + c^2) - H}{b^2c^2} = (b^2 - a^2)^2 - ac(b^2 - a^2) - a^2c^2 - ac^3 = D$$

. . . .

De este modo se obtiene la sucesión 1, B, D, F, H, K, M, O, . . . en la que:

$$\begin{aligned}
D &= (b^2 - a^2 + c^2)B - b^2c^2 \cdot 1 \\
F &= (b^2 - a^2 + c^2)D - b^2c^2 \cdot B \\
H &= (b^2 - a^2 + c^2)F - b^2c^2 \cdot D \\
K &= (b^2 - a^2 + c^2)H - b^2c^2 \cdot F \\
M &= (b^2 - a^2 + c^2)K - b^2c^2 \cdot H \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

En otras palabras, la sucesión 1, B, D, F, H, K, M, O, . . . es una relación de recurrencia que, utilizando el simbolismo moderno, se puede definir en los siguientes términos:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1 \\
a_1 &= (b^2 - a^2) - ac \\
a_i &= (b^2 - a^2 + c^2)a_{i-1} - b^2c^2a_{i-2} \qquad (i \geq 2) \qquad [1]
\end{aligned}$$

Dicha relación de recurrencia es lineal, homogénea, de segundo orden, y con coeficientes constantes.

Su solución general es de la forma:

$$U\,(r_1)^i + V(r_2)^i\,,$$

donde r_1 y r_2 son las raíces de la ecuación $r^2 - (b^2 - a^2 + c^2)r + b^2c^2 = 0$, asociada a [1].

Dado que:

$$r_1 = \frac{b^2 - a^2 + c^2 + \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}}{2}$$

$$r_2 = \frac{b^2 - a^2 + c^2 - \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}}{2}\,,$$

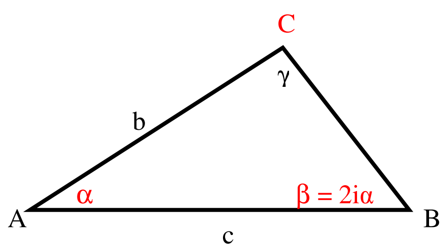
resulta que la solución general de la relación de recurrencia es:

$$a_i = U\left(\frac{b^2 - a^2 + c^2 + \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}}{2}\right)^i +$$
$$+ V\left(\frac{b^2 - a^2 + c^2 - \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}}{2}\right)^i \qquad [2]$$

Además:

$$a_0 = U + V = 1$$
$$a_1 = \frac{U+V}{2}(b^2 - a^2 + c^2) + \frac{U-V}{2}\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2} =$$
$$= \frac{1}{2}(b^2 - a^2 + c^2) + \frac{U-V}{2}\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2} = b^2 - a^2 - ac \Rightarrow$$
$$\Rightarrow U - V = \frac{2(b^2 - a^2 - ac) - (b^2 - a^2 + c^2)}{\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}} =$$
$$= \frac{b^2 - (a+c)^2}{\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}}$$

Escolio



A partir de la figura anterior, resulta inmediato que:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 - a^2 + c^2}{2bc} \qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}}{2bc}$$
$$\cos\beta = \cos 2i\alpha = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \Rightarrow 1 + \cos 2i\alpha = \frac{(a+c)^2 - b^2}{2ac}$$

Con esto, la expresión [2] se convierte en:

$$a_i = U(bc \cdot \cos\alpha + bc\sqrt{-1} \cdot \operatorname{sen}\alpha)^i + V(bc \cdot \cos\alpha - bc\sqrt{-1} \cdot \operatorname{sen}\alpha)^i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_i = Ub^ic^i(\cos i\alpha + \sqrt{-1}\cdot \text{sen } i\alpha) + V\, b^ic^i(\cos i\alpha - \sqrt{-1}\cdot \text{sen } i\alpha)$$

Además:

$$U - V = \frac{b^2 - (a+c)^2}{\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}} =$$

$$= \frac{b^2 - (a+c)^2}{\sqrt{-(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)}} =$$

$$= \frac{b^2 - (a+c)^2}{\frac{2bc\sqrt{-(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)}}{2bc}} = \frac{b^2 - (a+c)^2}{2bc\sqrt{-1}\cdot \text{sen}\alpha}$$

Por tanto:

$$V - U = \frac{(a+c)^2 - b^2}{2bc\sqrt{-1}\cdot \text{sen}\alpha} = \frac{2ac\left[(a+c)^2 - b^2\right]}{2ac\cdot 2bc\sqrt{-1}\cdot \text{sen}\alpha} = \frac{2ac\left(1 + \cos 2i\alpha\right)}{2bc\sqrt{-1}\cdot \text{sen}\alpha} = \frac{a\left(1 + \cos 2i\alpha\right)}{b\sqrt{-1}\cdot \text{sen}\alpha}$$

Por otro lado:

$$\frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}2i\alpha} = \frac{a}{b}$$

Consecuentemente:

$$V - U = \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}2i\alpha}\cdot\frac{1+\cos 2i\alpha}{\sqrt{-1}\cdot \text{sen}\alpha} = \frac{1+\cos 2i\alpha}{\sqrt{-1}\cdot \text{sen}2i\alpha} = \frac{1+\cos^2 i\alpha - \text{sen}^2 i\alpha}{2\sqrt{-1}\cdot \text{sen } i\alpha\cdot \cos i\alpha} =$$

$$= \frac{2\cos^2 i\alpha}{2\sqrt{-1}\cdot \text{sen } i\alpha\cdot \cos i\alpha} = \frac{\cos i\alpha}{\sqrt{-1}\cdot \text{sen } i\alpha}$$

Entonces:

$$U + V = 1$$

$$V - U = \frac{\cos i\alpha}{\sqrt{-1}\cdot \text{sen } i\alpha}$$

De donde, sumando y restando miembro a miembro, se obtiene que:

$$U = \frac{-\cos i\alpha + \sqrt{-1}\cdot \text{sen } i\alpha}{2\sqrt{-1}\cdot \text{sen } i\alpha} \quad , \quad V = \frac{\cos i\alpha + \sqrt{-1}\cdot \text{sen } i\alpha}{2\sqrt{-1}\cdot \text{sen } i\alpha}$$

Con esto, la solución de la relación de recurrencia viene dada por:

$$a_i = \frac{b^i c^i}{2\sqrt{-1}\cdot \operatorname{sen} i\alpha}\left[\begin{array}{l}\left(\cos i\alpha + \sqrt{-1}\cdot \operatorname{sen} i\alpha\right)\left(-\cos i\alpha + \sqrt{-1}\cdot \operatorname{sen} i\alpha\right)\\ + \left(\cos i\alpha + \sqrt{-1}\cdot \operatorname{sen} i\alpha\right)\left(\cos i\alpha - \sqrt{-1}\cdot \operatorname{sen} i\alpha\right)\end{array}\right]$$

Problema 7

Si en el triángulo ABC se verifica que $\angle\beta = (2i + 1)\angle\alpha$, siendo $2i + 1$ un número entero impar cualquiera, deducir la relación existente entre las longitudes a, b y c de sus lados.

Como en el problema 6, Euler construye una tabla a partir de las relaciones obtenidas para i = 0, 1, 2, 3.

i	Relación entre las longitudes de los lados del triángulo ABC
0	$A = b - a = 0$
1	$C = b^3 - ab^2 - a^2b - a(c^2 - a^2) = 0$
2	$E = b^5 - ab^4 - 2a^2b^3 - a(c^2 - 2a^2)b^2 - a^2(c^2 - a^2)b - a(c^2 - a^2)^2 = 0$
3	$G = b^7 - ab^6 - 3a^2b^5 - a(c^2 - 3a^2)b^4 - a^2(2c^2 - 3a^2)b^3 - a(c^2 - a^2)(c^2 - 3a^2)b^2$ $- a^2(c^2 - a^2)^2b - a(c^2 - a^2)^3 = 0$

Dicha tabla también se puede escribir así:

i	Relación entre las longitudes de los lados del triángulo ABC
0	$A = (b - a)= 0$
1	$C = (b - a)(b^2 - a^2) - ac^2 = 0$
2	$E = (b - a)(b^2 - a^2)^2 - ac^2(b^2 + ab - 2a^2) - ac^4 = 0$
3	$G = (b - a)(b^2 - a^2)^3 - ac^2(b^2 - a^2)(b^2 + 2ab - 3a^2) - ac^4(b^2 + ab - 3a^2) - ac^6 = 0$

Manejando convenientemente esta información, Euler es capaz de descubrir que la sucesión A, C, E, G, I, L, N, . . . se puede definir de modo recurrente a partir de las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned}
E &= (b^2 - a^2 + c^2)C - b^2c^2 \cdot A\\
G &= (b^2 - a^2 + c^2)E - b^2c^2 \cdot C\\
I &= (b^2 - a^2 + c^2)G - b^2c^2 \cdot E\\
L &= (b^2 - a^2 + c^2)\, I - b^2c^2 \cdot G\\
N &= (b^2 - a^2 + c^2)L - b^2c^2 \cdot I\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Como en el problema 6, estamos en presencia de una relación de recurrencia lineal, homogénea, de segundo orden, y con coeficientes constantes.

Su solución general es de la forma

$$Ub^ic^i(\cos i\alpha + \sqrt{-1}\cdot \operatorname{sen} i\alpha) + Vb^ic^i(\cos i\alpha - \sqrt{-1}\cdot \operatorname{sen} i\alpha)$$

Después de una serie de cálculos, Euler obtiene las siguientes expresiones para U y V.

$$U = \frac{f \cdot \text{sen}(2i+2)\alpha \cdot \left(-\cos i\alpha + \sqrt{-1} \cdot \text{sen}\, i\alpha\right)}{\sqrt{-1} \cdot \text{sen}(i+1)\alpha}$$

$$V = \frac{f \cdot \text{sen}(2i+2)\alpha \cdot \left(\cos i\alpha + \sqrt{-1} \cdot \text{sen}\, i\alpha\right)}{\sqrt{-1} \cdot \text{sen}(i+1)\alpha},$$

donde $f = \dfrac{a}{2\text{sen}\alpha}$

TRIANGVLORVM. 87

ac propterea adipiſcimur:

$$\mathfrak{A} = \frac{f\,\text{ſin.}(2i+2)\alpha}{\sqrt{-1}.\text{ſin.}(i+1)\alpha}\left(-\text{coſ.}\,i\alpha + \sqrt{-1}.\text{ſin.}\,i\alpha\right) \text{ et}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{f\,\text{ſin.}(2i+2)\alpha}{\sqrt{-1}.\text{ſin.}(i+1)\alpha}\left(\text{coſ.}\,i\alpha + \sqrt{-1}.\text{ſin.}\,i\alpha\right)$$

vnde perſpicuum eſt, fore

$$\mathfrak{A}(\text{coſ.}\,i\alpha + \sqrt{-1}.\text{ſin.}\,i\alpha) + \mathfrak{B}(\text{coſ.}\,i\alpha - \sqrt{-1}.\text{ſin.}\,i\alpha) = 0,$$

quo ipſo veritas inductionis noſtrae euincitur. His autem obſeruatis, nunc demum ſolutionem noſtri Problematis directe aggredi licet.

Problema 8.

26. Si in triangulo ABC angulus B ad angulum A rationem teneat quamcunque multiplam, vt n ad 1, relationem, quae inde inter latera trianguli $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ intercedit, analytice inueſtigare.

Solutio.

Poſito angulo $A = \alpha$, vt ſit angulus $B = n\alpha$, erit, vti ex angulorum doctrina conſtat:

$$\text{coſ.}\,n\alpha + \sqrt{-1}.\text{ſin.}\,n\alpha = (\text{coſ.}\,\alpha + \sqrt{-1}.\text{ſin.}\,\alpha)^n \text{ et}$$

$$\text{coſ.}\,n\alpha - \sqrt{-1}.\text{ſin.}\,n\alpha = (\text{coſ.}\,\alpha - \sqrt{-1}.\text{ſin.}\,\alpha)^n, \text{ ideoque:}$$

$$\frac{\text{coſ.}\,n\alpha + \sqrt{-1}.\text{ſin.}\,n\alpha}{\text{coſ.}\,n\alpha - \sqrt{-1}.\text{ſin.}\,n\alpha} = \left(\frac{\text{coſ.}\,\alpha + \sqrt{-1}.\text{ſin.}\,\alpha}{\text{coſ.}\,\alpha - \sqrt{-1}.\text{ſin.}\,\alpha}\right)^n.$$

Iam prout n eſt numerus par vel impar, duo caſus ſunt euoluendi.

Sit primo $n = 2i$, et vtrinque radix quadrata extrahatur, fietque:

$$\frac{\text{coſ.}\,i\alpha + \sqrt{-1}.\text{ſin.}\,i\alpha}{\text{coſ.}\,i\alpha - \sqrt{-1}.\text{ſin.}\,i\alpha} = \left(\frac{\text{coſ.}\,\alpha + \sqrt{-1}.\text{ſin.}\,\alpha}{\text{coſ.}\,\alpha - \sqrt{-1}.\text{ſin.}\,\alpha}\right)^i$$

nunc

3. Consideraciones de carácter didáctico

¿Qué puede aportar este texto de Euler a la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas?

(1) En primer lugar, el problema que se plantea es interesante, motivador y fácil de comprender. Además, tiene su origen en un problema relativamente sencillo (los lados opuestos a los ángulos iguales de un triángulo isósceles son iguales) que se generaliza al caso en que la amplitud de uno de los ángulos de un triángulo es múltiplo de la amplitud de otro ($\angle B = n \cdot \angle A$).

(2) En la resolución del problema, Euler empieza por considerar casos concretos sencillos ($\angle B = 2\angle A$, $\angle B = 3\angle A$, . . . $\angle B = 8 \angle A$) y obtiene, vía geometría sintética, las relaciones entre las longitudes de los lados del triángulo correspondiente. La estrategia de reducir un problema a casos más sencillos suele ser un buen principio para abordar la resolución de muchas cuestiones matemáticas.

(3) Durante el proceso de resolución, Eulero pone en práctica tópicos elementales de geometría sintética (semejanza de triángulos), trigonometría plana (razones trigonométricas, teorema del seno, teorema del coseno), y matemática discreta (resolución de relaciones de recurrencia lineales, homogéneas y con coeficientes constantes). Consecuentemente, algunos de los problemas que hemos presentado en este artículo podrían servir de inspiración para el diseño de algunas actividades de enseñanza-aprendizaje para alumnos de Educación Secundaria (12-16 años), Bachillerato (16-18 años) y primeros cursos universitarios.

(4) El orden, la precisión y la tenacidad de Euler en la búsqueda de la solución debería servir de ejemplo a todos los estudiantes que se inician en el aprendizaje de las Matemáticas. Estos contenidos de carácter actitudinal, de los que tanto se dice y tan poco se hace, suelen estar presentes en muchos de los trabajos de los grandes maestros.

(5) Por último, la sección de la memoria *Proprietates triangulorum, quorum anguli certam inter se tenent rationem* a la que hemos prestado atención en las líneas precedentes, nos permite aprender Matemáticas con uno de los intelectuales más sobresalientes de toda la historia de la humanidad. Un lujo que no está al alcance de todos los mortales.

Referencias on line

The Euler Archive: The works of Leonhard Euler online
http://www.math.dartmouth.edu/~euler/

Vicente Meavilla Seguí
Dpto. de Matemáticas
Universidad de Zaragoza – España

E-mail: vmeavill@hotmail.com