

**UMA ABORDAGEM DA ANÁLISE MATEMÁTICA PARA ALGUNS PROBLEMAS DERIVADOS
DAS CONCEPÇÕES FILOSÓFICAS DE ZENON, ANTIFON E BRISON**

I. F. Balieiro e M. R. Soares
UNESP - Brasil

(aceito para publicação em maio de 2008)

Resumo

A Análise Matemática pode ser compreendida como o estudo de processos infinitos envolvendo grandezas contínuas. O presente trabalho expõe, identifica, analisa e discute vestígios de processos infinitos implícitos nos pensamentos filosóficos de Zenon, Antifon e Brison. E, por meio de uma metodologia de pesquisa em História da Matemática, tais pensamentos são interpretados em uma linguagem da Análise Matemática, utilizando-se dos conceitos de seqüências, séries, supremo e ínfimo. Por conseguinte, o ferramental lógico-formal da Análise Matemática, viabiliza desenvolver argumentos que apresentam uma resposta aos problemas filosóficos derivados das idéias desses antigos filósofos gregos.

Palavras-chaves: História; Filosofia; Análise Matemática; Paradoxo; Zenon.

Abstract

Mathematical Analysis can be understood as the study of infinite processes involving continuous quantities. The present work exposes, identifies, analyzes and discusses traces of infinite processes implicit on the philosophic thought of Zeno, Antiphon and Bryson. And, by means of a research methodology in Mathematical History, such thoughts are interpreted in a Mathematical Analysis' language, using the concept of sequences, series, supremum and infimum. Therefore, the logical-formal tooling of Mathematical Analysis enables the developing of arguments that present an answer to philosophic problems derivate from the ideas of such ancient Greek philosophers.

Keywords: History; Philosophy; Mathematical Analysis; Paradox; Zeno.

Introdução

Os refinados conceitos de seqüências e séries que se têm hoje são resultados de um longo processo histórico de desenvolvimento e aprimoramento de idéias que surgiram na Grécia Antiga. De fato, como não podia deixar de ser, os filósofos gregos da Antigüidade já

mostravam em suas concepções filosóficas, vestígios do conceito de série. Assim Zenon de Eléia (490-430 a.C.) quando expõe aos filósofos de sua época seus argumentos, em particular, os paradoxos de Aquiles e a tartaruga e da Dicotomia, na verdade, antecipa um problema que será, nos tempos modernos, abordado utilizando-se o conceito de série.

Antifon de Atenas (480-411 a.C.) cogitou o seguinte método para o cálculo da área de um círculo: por meio de sucessivas duplicações do número de lados de um polígono regular, inscrito num círculo, a diferença entre as áreas do círculo e dos polígonos ao fim se exauriria; Brison (450-390 a.C.) aprimora o método de Antifon, considerando polígonos regulares inscritos e circunscritos em um círculo. Ambos, no entanto, se depararam com a necessidade de tratar com processos infinitos, o que para eles, na época, era impraticável. Para superar tal entrave no concretizar das idéias de Antifon e Brison foi utilizado, posteriormente, o chamado método de exaustão atribuído a Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.). Neste artigo utiliza-se a completude do sistema dos números reais, precisamente os conceitos de supremo e ínfimo, para viabilizar os processos infinitos propostos por Antifon e Brison.

1 – Influência das Civilizações Babilônica e Egípcia na Formação da Filosofia Grega

Inicialmente, apresenta-se um panorama histórico com o intuito de se identificar alguns vestígios de uma primeira noção intuitiva dos conceitos de seqüências e de séries nos fragmentos de textos de alguns filósofos ou nos escritos de alguns comentaristas, que por seu inquirir, refletir e conjecturar num processo cíclico, quer atuantes nas esferas filosóficas, teológicas, matemáticas ou outras, acabaram abordando o tema e tornando-se relevantes na gênese de tais conceitos.

Convém salientar o porquê de se começar tal estudo pelos textos de um filósofo grego ou, especificamente, na Grécia. Com efeito, sabe-se, como enfatizam alguns historiadores da Matemática, em particular Struik, que:

As matemáticas orientais surgiram como uma ciência prática com os objetivos de facilitar o cálculo do calendário, a administração das colheitas, a organização das obras públicas e a cobrança de impostos. (Struik, 1992, p.47)

E mesmo, “as matemáticas mesopotâmicas atingiram um nível mais elevado do que o obtido pelas matemáticas egípcias” (Struik, 1992, p.56). Desse modo, ao considerar esse caráter pragmático presente na matemática oriental, convém expressar que os gregos foram além dos objetivos predominantemente práticos e das soluções de problemas através de prescrições ritualísticas, aos quais egípcios e babilônicos parecem ter se limitado. Ou seja, os gregos, por meio da reunião de experiências adquiridas através do intercâmbio cultural com os egípcios e babilônios, promoveram a criação de uma abordagem dedutiva e sistemática, construindo teorias que visavam organizar e facilitar a manipulação do conhecimento em contraposição ao conhecimento empírico e fragmentário que os povos do Oriente tinham recolhido durante alguns séculos. Como afirma Reale:

Está demonstrado historicamente que os povos orientais com os quais os gregos tinham contato possuíam verdadeiramente uma forma de ‘sabedoria’, feita de convicções religiosas, mitos teológicos e ‘cosmogônicos’, mas não uma ciência filosófica baseada na razão pura (no logos, como dizem os gregos). Ou seja,

possuíam um tipo de sabedoria análogo a que os próprios gregos possuíam antes de criar a filosofia. (Reale, 1990, p.12-13)

Ao ponderar as considerações estabelecidas por Struik e Reale é necessário explicitar que há um respeito pelos empreendimentos realizados pelos egípcios e babilônios na matemática, pois esses mostram um considerável avanço em processos aritméticos, algébricos e geométricos. De fato, ao avaliar os problemas descritos nos papiros¹ egípcios e nas plaquetas de argila² dos babilônicos, observa-se que essas civilizações utilizaram a aritmética, a álgebra e a geometria para diversos propósitos: no comércio e na administração, na medição de superfícies de terrenos, para estimar a produção agrícola, no cálculo de volumes de reservatórios e da quantidade de ladrilhos ou blocos de rochas necessários para construir um templo ou uma pirâmide e no estudo da astronomia³ com o intuito de confeccionar calendários astronômicos⁴ para satisfazer suas necessidades domésticas, comerciais e religiosas. Ainda que os egípcios e babilônios apresentassem uma matemática bem desenvolvida não havia traços de demonstrações em sua prática, segundo Bicudo:

Bourbaki salienta que “não há, hoje, qualquer dúvida de que houve uma matemática pré-helênica bem desenvolvida. Não somente são as noções (já muito abstratas) de número inteiro e de medida de quantidade comumente usadas nos documentos mais antigos que nos chegaram do Egito ou da Caldéia, mas a álgebra babilônia, por causa da elegância e segurança de seus métodos, não deve ser concebida como uma simples coleção de problemas resolvidos por um tatear empírico” (Bourbaki, 1969, p.9). No entanto, não encontramos, seja nos documentos egípcios, seja naqueles da já mais encorpada matemática babilônia, qualquer traço do que se assemelhe a uma “demonstração”, no sentido formal da palavra. O conceito de ciência dedutiva era desconhecido dos povos orientais da antiguidade. Seus textos matemáticos, que chegaram até nós, são, em geral, coletâneas de problemas, mais ou menos interessantes, e suas soluções, em forma de prescrição, como as indicações das etapas de um ritual, oferecido a uma deidade. Nada de teoremas e demonstrações, nada de definições, nada de axiomas. (Bicudo, 1998, p. 307-308)

Os filósofos gregos assimilaram desses povos seus princípios empíricos, satisfazendo assim seus interesses puramente intelectuais e estabelecendo fundamentos teóricos que sustentam tais princípios. Desse modo, procuraram encontrar demonstrações dedutivas e rigorosas (no contexto da época) para os princípios empíricos presentes nas referidas aplicações práticas. Conforme Russell:

Ocupo-me (...) das matemáticas, não por si mesmas, mas em relação à filosofia grega – relação essa que, principalmente em Platão, era muito estreita. A preeminência dos gregos aparece com mais nitidez nas matemáticas e na astronomia do que em qualquer outra coisa. O que fizeram na arte, na literatura e na filosofia, pode julgar-se melhor ou pior segundo os gostos, mas o que

¹ Gilling, R. J. *Mathematics in the Time of the Pharaohs*. New York: Dover, 1982.

² Neugebauer, O. *The Exact Sciences in Antiquity*. New York: Dover, 1969.

³ Ciência ainda confusamente perdida no enovelado da astrologia.

⁴ Sideral, Solar, Lunar e Lunissolar.

realizaram na geometria está inteiramente acima de qualquer questão. Aprenderam alguma coisa do Egito e um pouco menos da Babilônia; mas o que obtivera dessas fontes foi, nas matemáticas, principalmente regras rudimentares e, na astronomia, registros de observações que se estendem sobre período muitos longos. A arte da demonstração matemática foi, quase inteiramente, de origem grega. (Russell, 1969, p.242)

2 – Algumas Concepções Filosóficas que Influenciaram os Princípios Matemáticos na Grécia Antiga

Após essas considerações históricas e filosóficas pode-se afirmar, conforme a tradição dos relatos históricos de filósofos e comentadores, que têm início, com Tales de Mileto⁵ (624-546 a.C.), a Filosofia e a Matemática grega. Tales é considerado um dos sete sábios⁶ da Antigüidade e o primeiro membro da chamada escola jônica; assim, como os demais membros dessa escola, Tales foi um filósofo da natureza que através de observações empíricas sobre os seres e os fenômenos, especialmente os meteorológicos, chegou à concepção de que todo o universo estava submetido a um processo e a uma transformação contínua, e conjecturou que: *a água é o princípio da natureza*, conforme relatos de Simplicio de Cilícia⁷ (490-560), em seus comentários à *Física*, 23, 21-29, de Aristóteles (384-322 a.C.):

El agua es el principio de la naturaleza húmeda y lo que comprende en sí a todas las cosas. En consecuencia, pensaron que el agua es el principio de todo y sostuvieron que la tierra reposa sobre agua. (Lan e Juliá, 1986v.1, p.68-69)

Assim, com essa nova maneira de pensar as questões impostas pelo universo, buscando princípios geradores da natureza, surge um novo tipo de homem, o filósofo, que se contrapõe ao homem sacerdote que buscava exclusivamente o poder, a riqueza, as honras e o interesse na possível vida após a morte.

O pensamento filosófico jônico continha íntima conexão com o problema cosmológico buscando um princípio concreto para a natureza, enquanto na escola pitagórica, fundada por Pitágoras de Samos⁸ (582-497 a.C.), o pensamento filosófico adquire outra característica: a mesma preocupação em estudar a essência das coisas, os primeiros princípios e causa do que existe em consonância com as concepções da escola jônica, embora admitindo como princípio uma entidade abstrata, ou seja, os problemas metafísicos.

Frente ao pensamento jônico, onde a água é o elemento primordial, o pitagorismo apresenta uma nova e original característica em relação à natureza de tal elemento, propondo o número como novo elemento primordial, isto é, a onipotência e onipresença do número em todas as coisas que compõem o cosmo. Desse modo, segundo relatos de Aristóteles, na

⁵ Uma das maiores cidades helênicas da Ásia Menor, pertencente ao território da Cária.

⁶ O emprego mais antigo da palavra “sábio” em grego refere-se à destreza ou habilidade em exercícios de alguma prática artesanal; e depois, à destreza própria do estadista, como era o caso dos “sete sábios”. Platão, em *Protágoras* 343a, nos oferece o mais antigo testemunho de uma lista dos “sete sábios”, em que figuram: Tales de Mileto, Pítaco de Mitilene, Bias de Priene, Sólon de Atenas, Cleóbulo de Lídia, Misón de Quenea e Quilón de Lacedemônia.

⁷ Cilícia era uma província romana no atual território da Turquia e da Síria, em torno da cidade de Tarso.

⁸ Uma das principais ilhas gregas do Mar Egeu, hoje cidade de Samos.

Metafísica, I 5, 985-986a, Pitágoras e os pitagóricos supuseram que os elementos dos números eram os elementos de todas as coisas existentes e que todo o céu era harmonia e número.

Em tiempos de éstos, (es decir, de los atomistas), y aun antes, los llamados pitagóricos cultivaron las matemáticas y fueron los primeros en hacerlas avanzar; y, entrenados en ellas, creyeron que los principios de ellas eran principios de todas las cosas existentes. Ahora bien, puesto que los números son, por naturaleza, los primeros de ellas, y en los números les parecía contemplar muchas semejanzas con las cosas que existen y con las que se generan, más que en el fuego, en la tierra y en el agua (puesto que tal propiedad de los números (constituía para ellos la) justicia, mientras tal otra el alma y el intelecto, otra la oportunidad, y análogamente con cada una de las demás cosas, por así decirlo), y tras ver en los números las propiedades y relaciones de la escala musical: y, en fin, puesto que las demás cosas, en toda su naturaleza, parecían asemejarse a los números y que los números (parecían ser) los primeros de toda la naturaleza, supusieron que los elementos de los números eran los elementos de todas las cosas existentes, y que todo el cielo era armonía y número. Y cuantas concordancias podían mostrar en los números y en las armonías en relación a las propiedades y partes del cielo y en relación al ordenamiento cósmico íntegro, las reunían y adecuaban a éstas. Y si se producía algún vacío, los apremiaba el deseo de tener una obra coherente... También parece que éstos consideraban que el número era principio, tanto en cuanto materia de las cosas existentes como en relación con (sus) propiedades y estados, mientras los elementos del número son lo par y lo impar: uno (lo par), limitado, otro (lo impar), infinito, y lo uno proviene de ambos (es, en efecto, tanto par como impar); el número, por su parte, (proviene) de lo uno; y que todo el cielo es, como se ha dicho, números. Ahora bien, otros de ellos dicen que hay diez principios, que se ordenan en columnas paralelas: límite e infinito, impar y par, uno y multiplicidad, derecha e izquierda, macho y hembra, en reposo y en movimiento, recto y curvado, luz y tiniebla, bueno y malo, cuadrado y oblongo. (Lan e Juliá, 1986v.1, p.228-229)

As doutrinas e concepções filosóficas pitagóricas conduziram seus partidários a estudarem as propriedades dos números relacionadas com a aritmética, a geometria elementar plana e a espacial, a música e a astronomia. Esses estudos constituíram um programa essencial para a formação dos discípulos dessa escola filosófica e, com Filolau de Crotona⁹(470-390 a.C.), foram divulgados para um maior número de adeptos, já que a escola pitagórica era uma espécie de irmandade secreta mística, política, científica e religiosa. Porém, antes disso, na primeira metade do século V a.C., houve o aparecimento de uma outra escola filosófica chamada Eleata, cujo fundador foi Parmênides de Eléia¹⁰ (549-420 a.C.).

Com Parmênides, apresenta-se uma nova forma no pensamento reflexivo, isto é, a ação necessária da razão como processo dialético do pensar, surgindo como primeiro resultado dessa operação natural a distinção entre o que é a essência e o que é a forma das coisas. Diante da realidade sensível que se percebe, com pequena diferença nas acepções, existe

⁹ Hoje Crotona, na Idade Média, Cotrone, uma das cidades mais poderosas da magna Grécia, na costa oriental do Brúcio (ou Brúcio, antiga região da Itália), fundada pelos Aqueus, em 710 a.C.

¹⁰ Região do Peloponeso, na Grécia. Hoje Vélia na Itália.

uma realidade eterna, imutável e imóvel do ser. Portanto, o homem deve buscar esta realidade por detrás das aparências do mundo dos sentidos e discernir a verdade (o ser) da suposta opinião (o não ser). Com efeito, Parmênides buscava um modo de se obter a verdade através do pensamento, segundo relatos de Proclo de Bizâncio (412-487), em seus comentários ao *Timeu*, I 345, 18-20, de Platão, e Simplício de Cilícia, em seus comentários à Física, 116, 28-32-117, 1, de Aristóteles:

Pues bien, te diré, escucha con atención mi palabra, cuáles son únicos caminos de investigación que se puede pensar; uno: que es y que es posible no ser; es el camino de la persuasión (acompañã, en efecto, a la Verdad); el otro: que no es y que es necesario no ser. Te mostraré que este sendero es completo inescrutable; no conocerás, en efecto, lo que no es (pues es inaccesible) ni lo mostrarás. (Lan e Juliá, 1986v.1, p.436)

Nesta passagem observa-se que, na primeira asserção de Parmênides, o caminho logicamente transitável que pode ser percorrido pelo pensamento para se buscar a verdade é através de: *o que é e o que é possível não ser*. E na segunda asserção o caminho intransitável é: *o que não é e o que é necessário não ser*; pois seria contraditório pensar que existe o que não é. Ou segundo explicação elaborada por Sciacca:

Vimos que os filósofos precedentes procuram um princípio eterno e universal do devir e da multiplicidade das coisas. Parmênides, pela primeira vez, formula este problema de modo crítico. Existem as coisas e um seu princípio tendo aqueles caracteres opostos a este, resultando daí que o princípio tem uma essência que lhe é própria. Conclui ainda que as coisas não são no mesmo sentido que é o princípio; portanto, só o princípio é uno, eterno, imóvel; portanto, ainda, o princípio é o Ser e só o Ser pode ser princípio. Daí a afirmação parmenídea: só o Ser é. Por outro lado, pensar é pensar algo; não há pensamento sem um objeto do próprio pensamento, que não pode ter objeto senão isso que é; portanto, o objeto do pensamento é o Ser e somente o conhecimento do Ser é conhecimento verdadeiro. (Sciacca, 1967, p.32)

Pode-se dizer, conforme Russell, que sua doutrina foi exposta num poema intitulado *Sobre a Natureza*¹¹ e escrito numa entoação profética e alegórica¹². Parmênides não mostra os procedimentos para se chegar à verdade, porém inicia uma forma de pensamento crítico com relação ao conhecimento vigente e introduz, na construção do conhecimento científico, um rigor lógico que não foi alcançado pelo empirismo jônico nem pelo misticismo pitagórico, e que procura descobrir na capacidade racional do homem a qualidade que o possibilita ter conhecimento sobre a essência.

O que torna Parmênides historicamente importante é ter inventado uma forma de argumento metafísico que, desta ou daquela forma, é encontrado na maioria dos filósofos posteriores, incluindo Hegel. Dele, diz-se, com freqüência, ter sido o

¹¹ Teofrasto diz que Empédocles foi admirador de Parmênides e um imitador seu ao escrever poemas, pois este também publicou em versos seu discurso *Sobre a Natureza*. (Lan e Juliá, 1986, p.415)

¹² Derivada do grego, significa: palavra ou imagem que desperta o pensamento de outra. Por exemplo: o apólogo e a parábola são espécies de alegorias.

inventor da lógica, mas o que realmente inventou foi a metafísica baseada na lógica. (Russell, 1969, p.56)

Além disso, conforme Campos, ao citar Szabó, a forma mais arcaica de demonstração é por redução ao absurdo e a mais antiga aplicação dessa prova encontra-se em Parmênides, segundo relato de Simplicio de Cilícia, em seus comentários à *Física*, 145, 6-11, de Aristóteles:

*Pues qué génesis le buscarías?
Como, de dónde habría crecido?
De lo que no es, no te permito que lo digas ni pienses, pues no se puede decir ni pensar lo que no es.
Y qué necesidad lo habría impulsado a nacer antes o después, partiendo de la nada?
Así es forzoso que exista absolutamente o no (exista).* (Lan e Juliá, 1986v.1, p.424)

Com efeito, segundo Campos, essa argumentação parmenídea pode ser parafraseada assim:

*Lo que es, no es generado.
No se puede decir ni pensar lo que no es.
Si lo que es es generado, entonces, tendría que haber sido generado de lo que no es.
De lo que no es, nada puede generarse.
Lo que es, no es generado.* (Campos, 1991, p.22)

Um segundo exemplo dessa aplicação do método de redução ao absurdo por Parmênides, conforme relato de Simplicio de Cilícia, em seus comentários à *Física*, 145, 20-21, de Aristóteles:

*Como podría ser después lo que es?
Como se generaría?
Pues si se generó, no es ni (es) si ha de ser en algún momento futuro.* (Lan e Juliá, 1986v.1, p.424-425)

Com efeito, segundo Campos, essa argumentação parmenídea pode ser parafraseada assim:

Si lo que es, no es generado, entonces, lo que es generado, no es. (Campos, 1991, p.22)

Desse modo, a escola eleata negava a validade dos sentidos como meio para alcançar a verdade. De acordo com esse preceito, os eleatas pretendem demonstrar que, através da razão, seriam capazes de provar que a mensagem dos sentidos deveria ser ignorada.

3 – Vestígios Históricos de Processos Infinitos Elaborados por Zenon de Eléia

3.1 – O Paradoxo da Dicotomia

Um discípulo de Parmênides que merece destaque é Zenon de Eléia (490-435 a.C.), conforme relata Platão, no diálogo *Parmênides*, 127a-c:

Antifonte, pues, afirmaba que Pitodoro contó que cierta vez llegaron Zenón y Parménides para las Grandes Panateneas. Parménides era ya bastante anciano, notoriamente canoso, aunque de aspecto bello y noble; tenía alrededor de sesenta y cinco años, mientras Zenón estaba próximo a los cuarenta, alto y de apariencia agradable: se decía que era el predilecto de Parménides. Y contó que fueron huéspedes de Pitodoro, fuera de los muros del barrio de los alfareros. Y allí llegaron Sócrates y varios más junto a él, ansiosos de escuchar la obra de Zenón, pues era la primera vez que era introducida en Atenas, gracias a ellos. Sócrates era entonces muy joven. (Lan e Juliá, 1986v.1, p.409)

Conseqüentemente, Zenon de Eléia, ao defender as teses estabelecidas por seu mestre, elabora uma série de argumentos¹³, ou melhor, aporias¹⁴ que tentam mostrar o caráter absurdo das teses do movimento e da multiplicidade do ser. Assim, em particular, neste artigo são expostos e analisados algumas aporias estabelecidas por Zenon que revelaram aspectos paradoxais com relação à possibilidade do movimento. Para tal estudo consideram-se os argumentos denominados de *Dicotomia* e de *Aquiles-Tartaruga*; o primeiro considera um espaço infinitamente divisível e um tempo limitado, conforme o relato de Simplicio de Cilícia, em seus comentários à *Física*, 1013, 4-16, de Aristóteles:

El primer argumento es éste. Si existe el movimiento, es necesario que el móvil recorra infinitas magnitudes en un tiempo limitado. Como esto es imposible, el movimiento no existe. Zenón demuestra esta hipótesis a partir de la distancia que recorre el móvil. Como toda distancia es divisible hasta el infinito, es necesario que el móvil alcance primero la mitad de la distancia que debe recorrer, y luego la totalidad. Pero antes de recorrer la mitad del todo, debe recorrer la mitad de ésta; y, previamente, la mitad de esta mitad. Si estas mitades son infinitas, porque es posible obtener la mitad de toda mitad ya obtenida, es imposible recorrer infinitas magnitudes en un tiempo limitado. (Lan e Juliá, 1986v.2, p.48-49)

3.2 – Uma Abordagem da Análise Matemática para o Paradoxo da Dicotomia

Em conformidade com as condições impostas pelo primeiro argumento de Zenon de Eléia, pode-se resolvê-lo, utilizando um modelo físico-matemático contemporâneo, da seguinte forma: seja S a distância a ser percorrida pelo móvel em um tempo finito t e suponha que o móvel possua uma velocidade constante v (Note que, nessas condições, em um tempo finito t o móvel percorrerá a distância vt). Antes de percorrer esta distância S é necessário que o móvel percorra a distância $\frac{S}{2}$, observe que resta $\frac{S}{2}$ para ser percorrida; no entanto, antes de percorrer a distância $\frac{S}{2}$ é necessário que o móvel percorra a distância $\frac{S}{2^2}$, observe que resta $\frac{S}{2} + \frac{S}{2^2}$ para ser percorrida, e assim sucessivamente. Portanto, Zenon

¹³ Zenon se junta ao seu mestre Parmênides (que dizia que, o que é, é um conceitualmente, e múltiplo em aparência) com quarenta demonstrações de que o que é, é uno, pois considerou que era correto defender seu próprio mestre. E também, de acordo com seu mestre, que sustentava que o que é, é imóvel, ofereceu cinco demonstrações de que o que é, é imóvel. (Lan e Juliá, 1986v.2, p.29)

¹⁴ Aporias, derivada do grego, significa dificuldade para passar, falta ou privação.

admitiu dividir a distância S a ser percorrida pelo móvel em um número infinito de pedaços, todos de comprimento não nulo, de forma que a distância S seria obtida pela soma destes infinitos pedaços, e ele, embora não pudesse aferir tal fato, estava certo, pois:

$$\frac{S}{2} + \frac{S}{2^2} + \dots + \frac{S}{2^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S}{2^n} = S \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = S \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - 1 \right) = S \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 \right) = S.$$

No entanto, Zenon, talvez por não possuir para o tempo um modelo geométrico conveniente, como tinha para a distância, asseverou que não seria possível dividir o tempo finito $t = \frac{S}{v}$, que se afirma será gasto para percorrer a distância S , em um número infinito de partes não nulas cuja soma fosse finita. Porém, observa-se que: para percorrer a distância $\frac{S}{2}$, o móvel gastará um tempo $\frac{t}{2}$; para percorrer a distância $\frac{S}{2^2}$, o móvel gastará um tempo $\frac{t}{2^2}$; e assim sucessivamente. Portanto, é possível dividir o tempo t , gasto pelo móvel para percorrer a distância S , em infinitas parcelas não nulas de modo que sua soma seja finita. De fato:

$$\frac{t}{2} + \frac{t}{2^2} + \dots + \frac{t}{2^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t}{2^n} = t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = t \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - 1 \right) = t \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 \right) = t.$$

A soma S da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S}{2^n}$ evidencia, segundo os pressupostos estabelecidos no argumento de Zenon, que ele dividiu a distância a ser percorrida em infinitas partes cuja soma era finita. Já a soma t da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t}{2^n}$ indica que também é possível dividir o tempo $t = \frac{S}{v}$ de maneira conveniente de modo a percorrer S no tempo $t = \frac{S}{v}$ tal resultado contraria a afirmação de Zenon: é impossível percorrer infinitas magnitudes num tempo limitado.

Dessa forma, as afirmações Zenonianas são aparentemente verdadeiras, porém, quando são investigadas num quadro sinóptico matemático weierstrassiano, o quadro sinóptico zenoniano se mostra falso e se revela uma realidade paradoxal.

3.3 – Paradoxo de Aquiles-Tartaruga

O segundo argumento estabelecido por Zenon de Eléia, conforme relato de Simplicio de Cilícia, em seus comentários à Física, 1014, 9 – 1015, 2, de Aristóteles é:

El argumento es llamado “Aquiles” porque en él se ocupa de Aquiles¹⁵, quien, según dice el argumento, no puede dar alcance a la tortuga que persigue. Pues es necesario que el perseguidor, antes de alcanzar la meta, llegue primero al lugar del cual partió el que huye. Pero cuando el perseguidor llegue a este punto, el que huye avanzó una cierta distancia, si bien ésta es menor que la que recorrió el perseguidor, que es más veloz. Pero avanzó: no se estuvo quieto. Y nuevamente en el tiempo en que el perseguidor alcanza el punto al que llegó el que huye, éste avanzó algo, si bien menos que lo que se había movido antes, pues es más lento que el perseguidor. Y así, siempre que el perseguidor avanza hasta donde había llegado el que huye, que es más lento, éste ha avanzado algo. Aunque el recorrido es cada vez menor, sin embargo algo recorre, pues está siempre en movimiento. Por el hecho de suponer distancias cada vez menores hasta el infinito - a causa de la división de las magnitudes hasta el infinito - no sólo Héctor¹⁶ no será alcanzado por Aquiles; tampoco lo será una tortuga. Supóngase que se trata de un estadio¹⁷. Una tortuga avanza a partir de la mitad del estadio, y Aquiles avanza diez veces más en el mismo tiempo. Aquiles, desde el comienzo del estadio, inicia la persecución de la tortuga, y avanza medio estadio, de modo que llega a la mitad del mismo, de donde partió la tortuga. Pero ésta avanzó ya la décima parte de la mitad restante del estadio. Aquiles recorre entonces la décima parte de esta mitad del estadio; pero la tortuga avanzó la décima parte de la mitad restante. Y Mientras quede una décima parte de cualquier distancia, y ella tenga a su vez una décima parte, la tortuga estará siempre delante de Aquiles, y jamás ninguno de los dos podrá recorrer la totalidad del estadio. (Lan e Juliá, 1986v.2, p.51-52)

3.4 – Uma Abordagem da Análise Matemática para o Paradoxo de Aquiles - Tartaruga

Para estudar profundamente qualquer fenômeno da natureza, a Ciência recorre a abstrações, concentrando a atenção em partes importantes deste fenômeno e desprezando outras, consideradas secundárias. Em mecânica teórica as abstrações desse tipo são noções acerca de ponto material¹⁸ e corpo rígido¹⁹.

Assim, para se abordar e analisar o segundo problema de Zenon, consideram-se tanto Aquiles como a Tartaruga pontos materiais que iniciam, num mesmo instante de tempo, um movimento retilíneo e uniforme, esse numa mesma direção e sentido. Além disso, supõe-se

¹⁵ Aquiles, filho da ninfa dos mares Tétis e de Peleu, rei de Ftia, na Tessália, é o principal herói grego da *Iliada*. Recusou-se a lutar por causa de uma briga com Agamêmnon, até que a morte de seu amigo Pátroclo forçou-o a matar Heitor.

¹⁶ Heitor, filho mais velho de Príamo e de Hécuba, era marido de Andrômaca e pai de Astíanax; durante a batalha, liderou os mais bravos troianos. Foi morto por Aquiles, como vingança pela morte de Pátroclo.

¹⁷ O *estádio* é uma das unidades de comprimento utilizada na Grécia antiga. Como era habitual na Antigüidade não havia uma só medida para o estádio, pois, por exemplo, o estádio que empregou Eratóstenes para medir a circunferência da Terra era aproximadamente 158 metros (estádio egípcio); enquanto, o comprimento do estádio olímpico (estádio ático) era de 192 metros.

¹⁸ Chama-se ponto material a partícula material cujas dimensões nas condições do problema estudado podem ser desprezadas.

¹⁹ Chama-se corpo rígido um corpo no qual a distância entre cada par de pontos permanece invariável em todas as condições. Em outras palavras, o corpo rígido conserva invariável sua forma geométrica.

que as posições destes pontos materiais podem ser determinadas no sentido positivo sobre um eixo orientado Ox , cuja origem será o ponto O . A velocidade da Tartaruga (v_t) será uma parte da velocidade de Aquiles (v_a); já a distância que separa Aquiles (que está na posição que dista A_0 da origem sobre o eixo) da Tartaruga (que está na posição que dista T_0 da origem sobre o eixo) será designada por d_0 . Desse modo, pode-se considerar as seguintes seqüências: $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$, onde T_k indica a k -ésima posição ocupada pela Tartaruga; $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$, onde A_k indica a k -ésima posição ocupada por Aquiles; $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$, onde t_k indica o k -ésimo instante de tempo considerado nesse processo; $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$, onde d_k indica a distância entre T_k e A_k sobre o eixo Ox .

Em conformidade com as condições impostas pelo problema de Zenon pode-se resolvê-lo da seguinte forma:

Sejam as velocidades da Tartaruga e de Aquiles, expressas pela relação funcional $v_t = rv_a$ (1), onde $r \in \mathbb{R}$ é tal que $0 < r < 1$, indica que a velocidade da Tartaruga é uma parte da velocidade de Aquiles. Considere v_a constante, em um tempo t , Aquiles percorre um

espaço $v_a t$ e a Tartaruga um espaço $v_t t$. Assim, transcorrido o instante de tempo $t_1 = \frac{d_0}{v_a}$,

obtm-se $d_0 = v_a t_1$ (2) e, simultaneamente, o deslocamento de T_0 para T_1 gera a expressão:

$d_1 = v_t t_1$ (3); ao substituir (1) e (2) em (3) obtém-se a expressão:

$d_1 = v_t t_1 = (rv_a)t_1 = r(v_a t_1) = rd_0$ (4); sendo assim, Aquiles ocupa agora a posição $A_1 = T_0$ (que dista d_0 de A_0), porém, a Tartaruga ocupa agora a posição T_1 (que dista d_1 de T_0).

Após transcorrido o instante de tempo $t_2 = \frac{d_1}{v_a}$, obtém-se $d_1 = v_a t_2$ (5) e, simultaneamente,

o deslocamento de T_1 para T_2 gera a expressão: $d_2 = v_t t_2$ (6); ao substituir (1), (5) e (4) em

(6) obtém-se a expressão: $d_2 = v_t t_2 = (rv_a)t_2 = r(v_a t_2) = rd_1 = r(rd_0) = r^2 d_0$. Agora, observe que Aquiles ocupa a posição $A_2 = T_1$ (que dista d_1 de A_1), porém, a Tartaruga ocupa a posição T_2 (que dista d_2 de T_1). E assim, sucessivamente, transcorrido o instante de tempo

$t_k = \frac{d_{k-1}}{v_a}$ obtém-se $d_k = r^k d_0$ (7). Pode-se notar que a distância que separa Aquiles da

Tartaruga diminui paulatinamente; de fato, basta calcular o limite da expressão (7): $\lim_{k \rightarrow \infty} d_k = \lim_{k \rightarrow \infty} r^k d_0 = d_0 \lim_{k \rightarrow \infty} r^k = 0$ (8)²⁰. Zenon, bem como seus contemporâneos, não possuía uma noção suficientemente ampla e precisa do conceito de infinito que permitisse lidar com todos os problemas que envolvem tal conceito. Dessa forma, Zenon imaginava que para percorrer a soma das infinitas distâncias d_k , que separam Aquiles da Tartaruga, seria gasto um tempo infinito, impossibilitando, conseqüentemente, que Aquiles a alcançasse. Nota-se,

²⁰ Ver anexo 1.

no entanto, que a soma S , dessas infinitas distâncias d_k , que deve ser percorrida por Aquiles para alcançar a Tartaruga, é finita: $S = \sum_{k=0}^{\infty} d_k = d_0 \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{d_0}{1-r}$ (9)²¹. Tendo em

vista que o tempo gasto por Aquiles para percorrer a distância d_k é $t_{k+1} = \frac{d_k}{v_a}$, segue que para percorrer S o tempo, t , gasto por Aquiles será também finito e igual a:

$$t = \sum_{k=0}^{\infty} t_{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k}{v_a} = \frac{1}{v_a} \sum_{k=0}^{\infty} d_k = \frac{1}{v_a} \sum_{k=0}^{\infty} d_0 r^k = \frac{d_0}{v_a} \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{d_0}{v_a} \cdot \frac{1}{1-r} = \frac{d_0}{v_a(1-r)}.$$

Com efeito, observa-se no segundo argumento que Zenon estabelece e aceita um modelo geométrico no qual subdivide todo o trajeto em um número infinito de partes não nulas cada vez menores. Considerando que para percorrer separadamente cada uma dessas partes é necessário uma quantidade de tempo, é natural afirmar que o tempo gasto para o trajeto total será a soma de todas essas frações de tempo. Mas a afirmação de Zenon, que Aquiles não alcançará a Tartaruga, equivale a afirmar que Aquiles não a alcançará num tempo finito. Ou seja, pode-se concluir que Zenon não aceita um modelo geométrico para o tempo, não podendo, portanto, dividi-lo em um número infinito de partes não nulas cuja soma seja finita.

É perfeitamente compreensível essa concepção zenoniana restrita de tempo. Ela advém do fato de que tal conceito é bastante sutil. Basta notar que tal conceito teve sua compreensão alterada com o advento da teoria da relatividade estabelecida por Albert Einstein (1879-1955).

Porém, há uma definição matemática de tempo, conforme Arnold com algumas modificações, que pode ser enunciada da seguinte maneira:

1. um espaço afim A^n de dimensão n se distingue de IR^n pelo fato de em A^n a origem das coordenadas não ser fixada;
2. todo grupo de IR^n opera sobre A^n como um grupo de translações: $a \rightarrow a+b$, $a \in A^n$, $b \in IR^n$ e $a+b \in A^n$;
3. o Universo ou espaço-tempo é um espaço afim de dimensão 4, que se designa por A^4 ;
4. os pontos de A^4 são chamados pontos do Universo ou eventos;
5. as translações de A^4 geram um espaço vetorial IR^4 ;
6. o tempo é uma aplicação linear $t: IR^4 \rightarrow IR$ do espaço vetorial IR^4 , das translações do Universo, sobre o eixo real do tempo;
7. chama-se intervalo de tempo do evento $a \in A^4$ para o evento $b \in A^4$ o número $t(b-a)$ ²².

²¹ Ver anexo 2.

²² Ver anexo 3

As aporias de Zenon, independentemente de seus objetivos, tiveram importantes conseqüências para o desenvolvimento ulterior da matemática grega; pode-se citar como contribuições diretas de Zenon certos recursos de ordem lógica, metodológica e técnica. Assim, o processo dicotômico, freqüente em suas aporias, foi utilizado por outros filósofos-geômetras como recurso de demonstração. O método de redução ao absurdo, tão utilizado pelos geômetras gregos, é um resultado do princípio da não contradição, sustentáculo dos raciocínios desse filósofo eleata que o manejou com tanta habilidade a ponto de ser considerado por Aristóteles como o inventor da dialética. Desse modo, conforme Diógenes Laércio, nas duas passagens abaixo:

Aristóteles en su Sofista dice que Empédocles fue inventor de lá retórica, y Zenón de la dialéctica. (Diogenes Laercio,1973, p.1324)

e

Aristóteles dice fue inventor de la dialéctica, como Empédocles de la retórica. (Diogenes Laercio,1973, p.1336)

4 – Vestígios Históricos de Processos Infinitos Elaborados por Antifon e Brison

Durante o século VI a.C. as condições de vida nas colônias gregas da Ásia Menor são alteradas, em razão das mudanças na economia e facilidades nas transações comerciais. Desse modo, houve um fortalecimento econômico e social daqueles que viviam do comércio, da navegação e do artesanato, marcando definitivamente a decadência da organização social baseada numa aristocracia hereditária e, conseqüentemente, alterando também o quadro econômico, político, social e cultural de Atenas; assim, segundo Sciacca, houve a necessidade de uma filosofia que caracterizasse os interesses dessa nova classe social.

As condições alteradas de Atenas entre a segunda metade do século VI e o fim do século V (transformada em centro da cultura grega); a necessidade de uma filosofia mais aderente à vida concreta e mais interessada pelos problemas do homem que pelos problemas da natureza; a potência política após a vitória sobre os persas e a nova ordenação democrática contribuíram para determinar a passagem dos pré-sofistas aos sofistas. Mais que especular em torno da origem e do princípio primeiro do mundo, é o próprio mundo assim como ele é, como cada dia o vivemos na nossa vida de homens, que é colocado como problema. A vitória sobre os persas, o esplendor da vida política, as liberdades democráticas, a prosperidade econômica, o vínculo sempre mais estreito entre cultura e política mudam a orientação da filosofia. (Sciacca, 1967v.1, p.38)

Com efeito, essa nova vertente filosófica (filosofia sofística), contribuiu para que o homem fosse preparado para cuidar de si e progredir a todo custo na comunidade. Assim, o ensino era planejado pelo sofista²³, de forma cuidadosa e minuciosa, para que os jovens gregos aprendessem a usar argumentos lógicos que não pudessem ser contrariados, buscando

²³ Conforme Russell: A palavra “sofista” não tinha, a princípio, sentido pejorativo; significava, bastante aproximadamente, o que hoje chamamos “professor”.

despertar o sentido crítico da investigação em oposição a todo dogmatismo. Segundo Sciacca, o sofista e a sofística caracterizam-se por:

(...) o sofista, que abandona a indagação em torno do “princípio” das coisas e concentra a sua atenção sobre o homem e seus problemas humanos (políticos, morais, jurídicos, estéticos etc.). Sofista é propriamente aquele que exercita a profissão de sábio (do mestre de virtudes) e ensina mediante estipêndio. O intento da sofística, mais que especulativo, é prático-educativo: a cultura (e a filosofia) como instrumento de formação do homem para a vida pública (do homem político) como meio de educação, limitada ao interesse por tudo o que é humano e pode ser útil aos assuntos públicos como aos privados. A filosofia tem por objeto o homem no mundo; portanto, torna-se antropologia. (Sciacca, 1967, p.38-39)

4.1 – A Abordagem de Antifon e Brison para o Cálculo da Área do Círculo

Pode-se conjecturar que esta forma de pensamento sofístico auxiliou de alguma maneira os métodos de demonstrações utilizados pelos geômetras gregos, pois se conhecem na História da Matemática Grega pelo menos dois geômetras considerados sofistas, conforme Michel²⁴: Antifon²⁵ de Atenas (480-411 a.C.), o sofista, orador rival de Sócrates (470-399 a.C.) que, como educador da juventude ateniense, dedicou-se às diversas ciências, autor da obra Sobre a verdade. Como geômetra, Antifon é conhecido por suas pesquisas relativas à quadratura do círculo, isto é, segundo Temístio (317-387), inscrevendo progressivamente no círculo polígonos regulares de 3, 6, 12, 24, 48, ... , $3 \cdot 2^k$, ... , ($k \geq 0$) lados.

En cambio: respecto de Antifón nada tendría que decir el geómetra, porque, inscribiendo un triángulo equilátero en el círculo, y sobre cada uno de los lados del triángulo inscrito un triángulo isósceles con vértice en la circunferencia del círculo y haciendo lo mismo continuamente creía que, una vez u otra, coincidiría el lado del triángulo final, a pesar de ser línea recta, con la periferia. (Bacca, 1961, p.44)

Ou, conforme Simplicio, inscrevendo progressivamente no círculo polígonos regulares de 4, 8, 16, 32, ... , 2^k , ... , ($k \geq 2$) lados.

Antifon describió un círculo e inscribió en él una de las superficies poligonales que pueden ser inscritas. Sea, por caso, el cuadrado del polígono inscrito... (Bacca, 1961, p.44)

²⁴ Michel, 1950, p.182-183.

²⁵ Qualificado de “o sofista” para se distinguir de seu contemporâneo Antifon de Romante, orador e político ateniense.

Antifon queria chegar, com essa duplicação progressiva, a um ponto no qual, por sua pequenez, os lados do polígono se confundiriam com os arcos mínimos correspondentes, e a área do polígono, cada vez mais, se confundiria com a área do círculo.

Ainda de acordo com Michel²⁶, o outro sofista é Brison²⁷ de Heracles ou Brison o sofista (450-380 a.C.), filho do historiador Heródoto de Heracles. Como geômetra Brison é conhecido por suas pesquisas relativas à quadratura do círculo, isto é, segundo Aristóteles, Alexandre de Afrodísia (200-300), Temístio (317-387) e João Filopono (490-566), inscrevendo e circunscrevendo progressivamente no círculo polígonos regulares de 4, 8, 16, 32, ..., 2^k , ..., ($k \geq 2$) lados, de tal forma que a diferença entre a área do polígono circunscrito (sempre maior do que a área do círculo) e a área do polígono inscrito (sempre menor do que a área do círculo) resulte mínima, isto é, aproxima-se cada vez mais de zero; e as áreas dos polígonos inscritos e circunscritos, cada vez mais, aproximam-se do valor da área do círculo.

Pero la cuadratura del círculo por Bryson es erística y sofisticada, porque no procede según los principios propios de la geometría, sino según otros más generales. Que el circunscribir al círculo un cuadrado e inscribir otro dentro y entre los dos cuadrados otros más y decir después que el círculo es lo que se halla entre los dos cuadrados, y parecidamente decir que el cuadrado intermedio entre los dos cuadrados dichos es menor que el cuadrado circunscrito y mayor que el inscrito y que las (cosas) que son de vez mayores y menores que las demás son iguales entre sí, - por tanto son iguales el círculo y el cuadrado -, procede de ciertos principios generales falsos: generales, porque podrían convenir a números, a tiempos, a lugares y a otras cosas; falsos, con todo, porque ocho y nueve son mayores y menores que diez y siete y, a pesar de ello no son iguales. (Bacca, 1961, p.45)

4.2 – Uma Abordagem da Análise Matemática para os Problemas de Antifon e Brison

Uma figura plana F é uma parte do plano limitada por uma curva fechada Γ que se denomina fronteira da figura F .

Diz-se que o polígono está inscrito numa figura plana F , quando todos pontos desse polígono pertencem à figura F ou à sua fronteira. Além disso, diz-se que o polígono está circunscrito na figura F , quando todos pontos dessa figura F e de sua fronteira pertencem ao polígono. Conforme as definições expostas, a área de qualquer polígono inscrito na figura F não é maior que a área de qualquer polígono circunscrito nessa figura F .

Seja $\{P_i\}$ o conjunto numérico das áreas dos polígonos regulares inscritos numa figura F e seja $\{P_c\}$ o conjunto numérico das áreas dos polígonos regulares circunscritos nessa figura F , observe que para todo i e c , vale: $P_i < P_c$. Denota-se o supremo do conjunto $\{P_i\}$ por A_i , o qual denomina-se área inferior da figura F e o ínfimo do conjunto $\{P_c\}$ por A_s , o qual denomina-se área superior da figura F . Desse modo, nota-se que a área inferior A_i da

²⁶ Michel, 1950, p.226-227.

²⁷ Não confundir com Brison filho de Estipão, um dos mestres de Pírron, ou com Brison de Acaia, preceptor de Crates, nem com o Brison citado por Jâmblico entre os discípulos imediatos de Pitágoras.

figura F não pode ser maior do que a área superior dessa figura, isto é, $A_i \leq A_s$. Com efeito, suponha que é válida a desigualdade contrária $A_i > A_s$. Então, tomando $\frac{A_i - A_s}{2} = \varepsilon > 0$ e tendo em conta a definição supremo e ínfimo, encontra-se um polígono inscrito na figura F cuja área P_i seja maior do que o número $A_i - \varepsilon = \frac{A_i + A_s}{2}$, ou seja, $\frac{A_i + A_s}{2} < P_i$, e um outro polígono circunscrito na figura F com área P_c menor do que o número $A_s + \varepsilon = \frac{A_i + A_s}{2}$, ou seja, $P_c < \frac{A_i + A_s}{2}$. Assim, comparando as duas desigualdades obtidas, encontra-se que $P_c < P_i$, o que é impossível.

Pode-se definir que uma figura plana F é mensurável quando a área superior A_s coincide com a área inferior A_i . Além disso, o número $A = A_i = A_s$ denomina-se área da figura F .

De acordo com o que foi exposto, enuncia-se e demonstra-se a seguinte proposição: para que a figura F seja mensurável é necessário e suficiente que para qualquer número ε pode-se indicar um polígono circunscrito e um polígono inscrito na figura F tais que sua diferença seja menor do que ε , isto é, existem P_i e $P_c < \varepsilon$ tais que $P_c - P_i < \varepsilon$. Demonstra-se a condição necessária: seja a figura F mensurável, isto é, $A = A_i = A_s$. Dado que A_i e A_s são o supremo e ínfimo dos conjuntos $\{P_i\}$ e $\{P_c\}$, para qualquer número $\varepsilon > 0$, pode-se indicar um polígono inscrito na figura F tal que sua área P_i se diferencia de $A_i = A$ em menos de $\frac{\varepsilon}{2}$, isto é, $A - P_i < \frac{\varepsilon}{2}$. Para este mesmo $\varepsilon > 0$ pode-se indicar um polígono

circunscrito na figura F tal que sua área P_c se diferencia de $A_s = A$ em menos de $\frac{\varepsilon}{2}$, isto é, $P_c - A < \frac{\varepsilon}{2}$. Portanto, somando as desigualdades obtidas, encontra-se que $P_c - P_i < \varepsilon$.

Por fim, demonstra-se a condição suficiente: sejam P_c e P_i as áreas dos polígonos para os quais $P_c - P_i < \varepsilon$. Dado que $P_i \leq A_i \leq A_s \leq P_c$, tem-se que $A_s - A = A_s - A_i$. Portanto, a figura é mensurável.

Anexo 1

A afirmação contida em (8) pode ser demonstrada da seguinte forma: dado $a > 1$ temos que existe $p \in \mathbb{R}$ tal que $a = 1 + p$, sendo assim, da desigualdade de Bernoulli²⁸ segue $a^k = (1 + p)^k \geq 1 + kp$. Portanto $\lim_{k \rightarrow \infty} a^k = 0$. Uma vez que $0 < r < 1$, tem-se $\frac{1}{r} > 1$, e

²⁸ Jakob Bernoulli (1654-1705), matemático suíço.

pelo visto acima segue que $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{r}\right)^k = 0$, assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq k_0$ vale $\left(\frac{1}{r}\right)^k > \frac{1}{\varepsilon}$, logo para todo $k \geq k_0$ tem-se $r^k < \varepsilon$. Donde resulta que $\lim_{k \rightarrow \infty} r^k = 0$.

Anexo 2

A afirmação contida em (9) pode ser demonstrada da seguinte forma: considere a progressão geométrica $S_k = d_0 + d_0 r + \dots + d_0 r^k$ (10). Multiplicando S_k por r tem-se $rS_k = rd_0 + d_0 r + \dots + d_0 r^{k+1}$ (11) e subtraindo (11) de (10) tem-se $(1-r)S_k = d_0 - d_0 r^{k+1}$ ou $S_k = \frac{d_0 - d_0 r^{k+1}}{1-r} = \frac{d_0}{1-r} - \frac{d_0 r^{k+1}}{1-r}$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_0}{1-r} - \frac{d_0}{1-r} \lim_{k \rightarrow \infty} r^{k+1} = \frac{d_0}{1-r}$, pois, do Anexo 1, tem-se $\lim_{k \rightarrow \infty} r^{k+1} = 0$.

Anexo 3

Definição 1. Seja V um espaço linear sobre um corpo comutativo qualquer. Um conjunto arbitrário A denomina-se espaço afim (ligado a V) se existe uma aplicação que a cada par $\alpha, \beta \in A$ faz corresponder um vetor de V denotado $\overrightarrow{\alpha\beta}$ tal que se cumprem os axiomas:

1. para quaisquer $\alpha \in A$ e $a \in V$, existe um e um único $\beta \in A$ para o qual $\overrightarrow{\alpha\beta} = a$;
2. quaisquer que sejam $\alpha, \beta, \gamma \in A$, cumpre-se a relação $\overrightarrow{\alpha\beta} + \overrightarrow{\beta\gamma} = \overrightarrow{\alpha\gamma}$.

Definição 2. Uma bijeção $\psi: A \rightarrow A'$ denomina-se isomorfismo de A sobre A' , se existe um isomorfismo $\varphi: V \rightarrow V'$, dito isomorfismo associado a ψ , tal que para quaisquer pontos $\alpha, \beta \in A$, vale a relação $\overrightarrow{\psi(\alpha)\psi(\beta)} = \varphi(\overrightarrow{\alpha\beta})$.

Diz-se que os espaços afins A e A' , são isomorfos, se existe um isomorfismo de A sobre A' .

Definição 3. Seja A um espaço afim. Cada isomorfismo de A sobre A denomina-se transformação afim de A .

Definição 4. Seja A um espaço afim arbitrário. Cada transformação afim de A cujo isomorfismo associado é idêntico denomina-se translação de A .

Referências Bibliográficas

- Arnold, V. Les Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique. Moscou: Mir, 1976.
- Bacca, J. D. G. Textos Clasicos para la Historia de las Ciencias. Caracas: Universidad Central de Venezuela, 1961.
- Bicudo, I. Platão e a Matemática. Letras Clássicas 2, 301-315, 1998.
- Campos, A. Introducción a la Lógica y la Geometría Griegas Anteriores a Euclides. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 1991.
- Diogenes, L. Vidas de Filósofos Mas Ilustres. Madrid: Gredos, 1973.
- Edwards, C. H. The Historical Development of the Calculus. New York: Springer-Verlag, 1979.
- Ilín, V., Pozniak, E. Fundamentos del Análisis Matemático. Moscou: Mir, 1991. 3v.
- Lan, C. E., Juliá, V. E. Los Filósofos Presocráticos. Madrid: Gredos, 1986. 3v.
- Michel, P. H. De Pythagore a Euclide: Contribution a L'Histoire des Mathématiques Préeuclidiennes. Paris: Les Belles Lettres, 1950.
- Postnikov, M. Lições de Geometria Analítica. Moscou: Mir, 1988. vol. 1.
- Reale, G., Antiseri, D. História da Filosofia. São Paulo: Paulus, 1990. 3v.
- Russell, B. História da Filosofia Ocidental. Rio de Janeiro: Zahar, 1969. vol. 1.
- Russell, B. Misticismo e Lógica e outros Ensaio. Rio de Janeiro: Zahar, 1977.
- Russell, B. Introdução à Filosofia Matemática. Rio de Janeiro: Zahar, 1981.
- Sciacca, M. F. História da Filosofia. São Paulo: Mestre Jou, 1967. 3v.
- Struik, D.J. História Concisa das Matemáticas. Lisboa: Gradiva, 1994.

I. F. Balieiro* e **M. R. Soares****
UNESP – Campus de Ilha Solteira
Departamento de Matemática

E-mail: (*) balieiro@mat.feis.unesp.br
(**) reicher@mat.feis.unesp.br