Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 9 nº 17 (abril/2009 - setembro/2009) – pág. 77-88
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

A MATEMÁTICA RECREATIVA DE EULER: NÚMEROS AMIGOS*

Nelo D. Allan
UNEMAT – Brasil

(aceito para publicação em março de 2009)

Resumo

A teoria de números até o século XVIII era considerada como matemática recreativa. Estudados pelos gregos, os números especiais tinham significados astrológicos, cotidianos ou filosóficos. Nesta categoria estão os números perfeitos, abundantes, amigos, poligonais, fórmulas para primos e primos especiais como os de Mersenne. Estes tópicos também foram tratados por Fermat. Muitos destes problemas apresentam questões que até hoje estão em aberto; foi o que atraiu Euler. Apesar de não resolver a maioria dos problemas envolvidos, o trabalho de Euler teve um impacto profundo nestes tópicos. Aqui ele desenvolve a teoria de congruências e a de funções multiplicativas. O tópico de que vamos tratar é a teoria dos números amigos. Um par de números chama-se amigo se cada um dos números é a soma dos divisores próprios do outro, como, por exemplo, o par {220, 284}, conhecido desde a Antiguidade. Por volta do século IX, Thabit ibn Qurrat apresentou uma fórmula que forneceu mais dois novos pares redescobertos por Fermat e Descartes. O gênio de Euler transformou as três soluções em 60. Hoje sabemos mais de onze milhões de pares. Nosso objetivo é fazer comentários sobre os três trabalhos de Euler neste tópico.

Palavras-chave: matemática recreativa, teoria dos números, números amigos.

Abstract

Up to the 18th century, number theory was considered as recreational mathematics. Studied by the Greeks, special numbers had astrological, philosophical or practical meanings. In this category are the perfect numbers, abundant numbers, amicable numbers, polygonal numbers, and formulae for prime numbers and special primes, like Mersenne's. All these

---

* Uma primeira versão deste trabalho foi apresentada no Encontro Brasileiro do Tricentenário de Leonhard Euler (1707–1783), promovido pela Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat), Escola de Artes, Ciências e Humanidades (EACH) e Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade de São Paulo, com o apoio científico da International Comission on the History of Mathematics (ICHM), realizado em São Paulo, em 5 de dezembro de 2007.

issues were also treated by Fermat. Many of these problems present challenges that remain open to this day; this was the feature that attracted Euler to their study. Although he did not solve most of the problems, Euler's work had a profound impact in all these matters. Prompted by them he developed the theory of congruences and of multiplicative functions. In this paper we will focus on the theory of amicable numbers. A pair of numbers is called amicable if each of the numbers is equal to the sum of the proper divisors of the other one, like, for instance, the pair {220, 284}, known since Antiquity. In the 9th century, Thabit ibn Qurra presented a formula that provided two additional pairs, later rediscovered by Fermat and Descartes. The genius of Euler transformed these three solutions into sixty. Nowadays we know in excess of 11 million pairs. Our goal is to comment on Euler's three works on the subject.

Key words: recreational mathematics, number theory, amicable numbers.

1. Euler e a teoria de números

Aqui vamos tratar de um aspecto do trabalho de Euler que não teve globalmente um grande impacto na matemática: a área de números amigos. Está área é hoje considerada de "baixa prioridade" por um veículo popular como a Wikipédia, mas na época de Euler o problema de apresentar números amigos era dificílimo. Isto se deve ao fato de que as técnicas das soluções apresentadas não tiveram impacto matemático. O que pretendemos mostrar aqui é a genialidade e perseverança de Euler. Apresentamos uma situação onde havia somente três exemplos, que Euler transformou numa teoria matemática.

Por volta de 1742 Goldbach chama a atenção de Euler aos trabalhos de Fermat, na época considerados como recreações matemáticas. A esta área pertencem tópicos como números convenientes, critérios de primalidade, reciprocidade, equação de Fermat-Pell, frações continuadas, números de Mersenne, números amigos, números sociáveis e números poligonais. Somente nesta época é que esta área foi chamada de "teoria de números". Sobre ela Euler escreveu cerca de 100 artigos, trabalhou isolado e só quase no final de sua vida teve contatos com Lagrange. Uma boa parte dos trabalhos de Euler nesta área constitui-se de tabelas, e através delas uma busca de padrões e formulação de conjecturas. Vamos nos limitar a comentários sobre o impacto do trabalho de Euler sobre pares de "números amigos". Se antes dele conheciam-se apenas três pares, ele apresentou 61, sendo apenas dois incorretos. Usando variações de suas técnicas hoje conhecemos mais de onze milhões de soluções. Euler escreveu três trabalhos nesta área (Euler 1747a, 1747b, 1747c), que estão catalogados no Índice de Eneström como E100, E152 e E798 (todos datam originalmente de 1747, mas foram publicados em locais e datas diferentes). Nosso objetivo é descrever rapidamente o conteúdo destes trabalhos com alguns comentários. Tentaremos ver as idéias envolvidas e seu desenvolvimento.

2. Problema e histórico

O problema de que vamos tratar é o seguinte: um par de números distintos $\{m, n\}$ chama-se *amigo* se a soma dos divisores próprios de cada um dos números do par é igual ao outro. O primeiro par de tais números, {220, 284}, já era conhecido desde a Antiguidade.

Este par de números é cercado de misticismo (Dickson 1971, 38-9). Eles eram símbolos de amizade e eram venerados como tal. Por volta de 1636, Fermat anuncia o par {17296, 18416} e, um pouco depois, em 1638, Descartes apresentou o par {9363584, 9437056}. Tanto Fermat quanto Descartes apresentam uma regra que no fundo é a chamada fórmula *(T)*, mencionada abaixo. Em 1657 Frans van Schooten escreveu uma coleção intitulada *Exercitaciones Matematicae* (Van Schooten 1657; Dickson 1971, 41), cujo livro V é um estudo de pares amigos e contém a seguinte fórmula (que Euler atribuiu a Descartes no trabalho E152):

(T) Seja $n > 1$. *Se* $p = 3.2^{n-1} - 1$, $q = 3.2^{n} - 1$ *e* $r = 9.2^{2n-1} - 1$ *são simultaneamente primos, então* $2^{n}pq$ e $2^{n}r$ *são números amigos.*

Van Schooten se propôs a divulgar o trabalho de Descartes sobre geometria analítica, inclusive sugerindo coordenadas no espaço. Também se atribui a ele o termo "números amigos". Os três pares acima enumerados correspondem aos valores de n = 2, 4 e 7 na fórmula *(T)*. Van Schooten deduz estas soluções usando o que era chamado de "análise indeterminada", hoje solução de equação diofantina. Só recentemente W. Borho (Garcia, Pederson e Riele 2003, 2; Dickson 1971, 39) descobriu que o segundo par já era conhecido pelos matemáticos árabes por volta de 1600. Ainda mais, a própria regra *(T)* já tinha sido apresentada por Thabit ibn Qurra (836-901), excelente algebrista, astrônomo e linguista, que viveu no século IX e é também um dos principais responsáveis pela tradução correta dos livros de Euclides (Van der Waerden 1985, 10). Em 1747, no trabalho E100, Euler generaliza a fórmula *(T)* e publica uma lista de 30 pares novos. Em outro trabalho, E152, Euler exibe os métodos que tornariam viável a busca de pares amigos, e cujas variações permitiriam calcular muitos pares. Hoje são mais de 11 milhões. As fórmulas conhecidas são condições necessárias mas não suficientes. Convém mencionar que, em 1866, um rapaz italiano de 16 anos, N. Paganini, descobriu o par {1184, 1210}, que é o segundo menor par e não constava na lista dos pares conhecidos até então. Hoje conhecemos todos os pares onde o menor elemento é menor que 10^{14} (Garcia, Pederson e Riele 2003).

3. Trabalho de Descartes e Van Schooten

Van Schooten (Dickson 1971, 41), discípulo de Descartes, mostra como obter os três pares conhecidos como soluções de Fermat-Descartes: seja o par que buscamos da forma $\{4p, 4qr\}$, onde p, q, r são primos ímpares distintos. Neste caso, se chamarmos de $\text{div}(m)$ a soma dos divisores próprios de m, ou partes alíquotas de m, teremos o sistema de equações diofantinas $\{\text{div}(4p) = 4qr, \text{div}(4qr) = 4p\}$. Os fatos conhecidos na época eram que, para p primo, $\text{div}(p) = p + 1$ e $\text{div}(pA) = A + (p + 1)\text{div}(A)$, e $\text{div}(4) = 3$. Daí teremos que $7 + 3p = 4qr$ e $7 + 7q + 7r + 3qr = 4p$. Eliminando p e resolvendo o sistema para r teremos $r = 3 + 16/(q - 3)$. Dando valores primos a q, de modo que r e p sejam primos, encontramos somente $q = 5$, $r = 11$ e $r = 5$, $q = 11$, que nos fornecem $p = 71$, de maneira que o par é {220, 284}. Se, em vez de 4, usamos 2, 8, 32 ou 64 para multiplicar p e qr, é fácil verificar, por eliminação, que não existe par amigo. O próximo caso é então $\{16p, 16qr\}$, e um procedimento análogo nos fornece $r = 15 + 256/(q - 15)$, cuja solução é $q = 47$, fornecendo o segundo par. O terceiro é obtido a partir de $\{128p, 128qr\}$, fornecendo $r =$

127 + 16384/(q – 127). Aqui temos duas soluções, q = 191, r = 383 e q = 383, r = 191. O problema não é tão difícil quanto parece, pois 16384 = 2^{14}, que só tem 13 divisores próprios, dando somente quatro valores de q: 131, 191, 383, 1151, que resultam, para r, nos valores respectivos 143 (= 11.13), 383, 191 e 4223 (= 41.103). Este argumento nos mostra que o par correspondente a q = 191 é o único da forma {128p, 128qr}. Se Van Schooten fosse um pouco mais à frente teria encontrado para q = 257 um novo par, o qual foi descoberto mais tarde por Legendre: {2172649216, 2181168896}.

4. A função div(n)

Dizer que m é elemento de um par de números amigos é equivalente a dizer que o par é {m, div(m)}, com a restrição de que div(div(m)) = m. Assim, a geração de muitos pares amigos pode ser feita usando-se a fórmula m = div(div(m)). Matematicamente falando, esta função não tem boas propriedades e aparentemente é difícil de calcular. Além disso, faltava na época de Euler uma boa tabela de primos. Hoje o problema é facilmente resolvido com os computadores rápidos e de muita memória, que já contêm procedimentos de cálculo para div(m). Em cerca de 36 horas de trabalho num computador com processador Pentium IV testamos esta equação para $m < 10^{10}$ e obtivemos os 387 pares que satisfazem $m < n$, $m < 10^{10}$, dos quais os 13 primeiros são :

{220, 284}, {1184, 1210}, {2620, 2924}, {5020, 5564}, {6232, 6368}, {10744, 10856}, {12285, 14595}, {12285, 14595}, {17296, 18416}, {63020, 76084}, {66928, 66992}, {67095, 71145}, {67095, 71145}.

5. A função sigma de Euler

A dificuldade do problema atraiu a atenção de vários matemáticos da época, e Euler decidiu atacá-lo. Para tanto, ele desenvolveu técnicas de divisibilidade e primalidade. A primeira contribuição de Euler foi perceber que a chamada função sigma, σ, era a ferramenta perfeita para reformular o problema. O passo seguinte era dispor de uma tabela de primos; Euler tinha uma tabela de todos os primos menores que 100000. A tabela de primos e a multiplicatividade da função σ permitem escrever uma tabela com os valores dessa função para primos e suas potências.

No trabalho E152 (p. 25) Euler introduz a função $\sigma(m)$ como a soma de todos os divisores de m, incluindo 1 e m. Assim, $\sigma(m)$ = div(m) + m. Esta função já era nebulosamente conhecida na época de Fermat-Descartes. Euler demonstra suas propriedades fundamentais: primeiro, $\sigma(1) = 1$; segundo, a função é multiplicativa, ou seja, se m e n são relativamente primos, então $\sigma(mn)=\sigma(m)\sigma(n)$; terceiro, se p é primo, então $\sigma(p) = p + 1$; quarto, para todo $k > 1$, $\sigma(p^k) = (p^{k+1} - 1)/(p - 1)$; finalmente, se $a = 2^n$, $\sigma(a) = 2a - 1$. Esta função é a chave do sucesso de Euler. Trabalhar com primos facilita os cálculos, pois, quando p é primo, $\sigma(p) = p + 1$. Também é importante ter uma boa tabela de primos e uma tabela de decomposição em primos de $\sigma(m)$. Em E152 (pp. 26-33) e E798 (pp. 627-32) Euler escreve uma tabela de decomposição em fatores primos de $\sigma(m)$, com $m = p^k$, p primo, $p < 1000$ e k = 1, 2, 3. Também por volta de 1747 ele apresenta uma fórmula de recorrência para o cálculo de $\sigma(n)$ sem usar a fatorização de n, pois a fatorização de números grandes é um problema muito difícil.

Agora nosso problema se reduz ao seguinte sistema diofantino: encontrar dois números m e n tais que $n = \text{div}(m)$ e $m = \text{div}(n)$, ou, em termos de σ,

(ET) Encontrar m e n tais que $\sigma(m) = \sigma(n) = m + n$ *(Equação de Euler-Thabit).*

Este é o problema que Euler chama de "problema geral" em E152 (p. 34).

6. A equação $\sigma(x)/x = a/b$

A primeira idéia de Euler foi buscar dentre os pares $\{m, n\}$ aqueles que satisfazem $\sigma(m) = \sigma(n)$ e que têm entre seus múltiplos algum par amigo, i.e., pares da forma $\{am, an\}$, com $\text{mdc}(a, mn) = 1$. Um par $\{m, n\}$ com $\sigma(m) = \sigma(n)$ é chamado de par gerador. Nosso sistema fica, assim,

$$(E)\ \sigma(a)/a = (m + n)/\sigma(m),\ \sigma(m) = \sigma(n),\ \text{mdc}(a, mn) = 1,$$

ou seja, para as possíveis soluções para a a fração reduzida $(m + n)/\sigma(m)$ tem que ser da forma $\sigma(a)/a$, para algum a. Este é o que ele chama de "problema particular". Assim ele esbarra no seguinte problema: determinar z tal que $\sigma(z)/z = B/A$, $\text{mdc}(A, B) = 1$. Aqui B tem que ser maior que A. A solução é feita por um processo recursivo: se $A = p^kC$, $\text{mdc}(A, C) = 1$, então p^h divide z, $k \geq h$. Daí pomos $z = p^ky$ e tentamos resolver $\sigma(y)/y = (Bp^k)/(A\sigma(p^k))$. Este método somente tem resultado se conseguirmos, por recursão, aumentar o denominador. Este método é chamado de "método do fator comum desconhecido". Euler descreve este processo em E152 (pp. 86-7), e dá exemplos de seu uso em E798 (§15 a §17).

Descartes resolveu a equação $\sigma(z)/z = 13/5$ (Dickson 1971, 53), bem como afirmou que sabia resolver a equação $\sigma(z)/z = B/A$, dando como exemplo $\sigma(z)/z = 13/5$, obtendo $z = 90$. O procedimento de Descartes funciona se procuramos somente soluções com $n = m$. Euler dá exemplos em que é útil procurar por soluções onde $n < m$. No caso onde $B/A = 2$, qualquer número perfeito satisfaz esta equação. Euler usa este procedimento para achar um novo par {2620, 2924} (E152, p. 34). Daqui em diante ele passa a trabalhar sobre a equação $\sigma(a)/a = (m + n)/\sigma(m)$, observando que a fração $(m + n)/\sigma(m)$, em sua forma reduzida, pode não ser da forma $\sigma(a)/a$, mas uma fração equivalente a $(m + n)/\sigma(m)$ pode ser desta forma. Outra observação é que $a < \sigma(a)$, logo podemos eliminar os pares onde $(m + n)/\sigma(m) > 1$. Uma maneira aparentemente trivial de se trabalhar seria partir dos pares $\{m, n\}$ com $\sigma(m) = \sigma(n)$, calcular $V = (m + n)/\sigma(m)$, fazer uma lista das frações reduzidas $\sigma(a)/a$ e depois verificar se V está nesta lista. Usando 30000 pares geradores e comparando com valores de $\sigma(a)/a$, encontramos somente 17 pares. Isto nos mostra a dificuldade deste processo.

7. Generalização da fórmula de Thabit: método da redução do sistema tipo [2, 1]

A fim de simplificar um pouco vamos supor sempre que $m < n$. Euler classifica os pares por *tipo*: o tipo de m é o número de fatores primos de m, contando repetição. Aí o estudo passa a ser sobre pares de tipo $[i, j]$ onde i é o tipo de m/g e j é o tipo de n/g, com $g =$

mdc(m, n). Um par chama-se regular se mn é livre de quadrados. A fórmula de Thabit nos fornece três pares regulares do tipo [2, 1]. O par de Paganini é $\{2^5.37, 2.5.11^2\}$, e ele é do tipo [5, 3] e é irregular.

O procedimento de Euler é o seguinte: ele propõe cinco problemas, começando com pares da forma $\{apq, ar\}$, $a = 2^k$, e aí generaliza a fórmula de Thabit. Em seguida ele trata o caso onde $a = 2^k f$, com f primo, depois $a = 2^k fg$ com f e g primos, e daí o caso onde a é produto de três primos ímpares. Em todos estes casos partimos de a dado, buscando $p, q,$ e r. Na parte final de E152 Euler começa a olhar para pares de tipo [2, 2], i.e., pares $\{apq, afr\}$ onde a é dado e os quatro primos são função de dois outros parâmetros dados, e trata dos casos a = 2, 4, 8 e 16. Finalmente ele passa ao estudo de pares da forma $\{zaq, zbp\}$, onde a e b são dados, p e q primos a determinar, com z e $pqab$ relativamente primos.

O método usado nos quatro primeiros problemas é o que chamamos de método da redução; este método consiste em transformar o sistema *(E)* numa equação diofantina quadrática do tipo

$$(R)\ (cx - b)(cy - b) = W,$$

de modo que, dados b, c e W inteiros, o problema é achar x e y também inteiros e tais que $(ax + b)(cy + d) = W$. As possíveis soluções são obtidas decompondo-se $W = uv$, u e v inteiros e tomando-se $ax + b = u$ e $cy + d = v$. O número de possíveis escolhas de $\{u, v\}$ é o numero de divisores de W (E152, Problema 1, p. 38). Nos primeiros problemas seu procedimento é o seguinte: partimos de a, e, como $\{m, n\}$ é do tipo [2, 1], podemos escrever $m = apq$, $n = ar$, com p, q e r primos. Daí a equação *(ET)* se escreve $\sigma(m) = \sigma(n) = m + n$ e $\sigma(a)\sigma(pq) = \sigma(a)\sigma(r) = a(pq + r)$, e, se $p = x - 1$, $q = y - 1$, e $\sigma(r) = r + 1$, com $b/c = a/(2a - \sigma(a))$, obtemos $y = bx/(cx - b)$, de modo que nosso sistema diofantino fica: dados a, b e c, achar x e y tais que $x - 1$, $y - 1$, e $xy - 1$ sejam primos, com $\{x, y\}$ solução de

$$(I)\ (cx - b)(cy - b) = b^2,\ b/c = a/d\ ,\ d = 2a - \sigma(a).$$

A condição de que a fração a/d seja reduzida determina univocamente b e c e também exige que b divida a. Como esta fração deve ser positiva, temos que $d > 0$, e, consequentemente, a não é qualquer, devendo satisfazer $a > \text{div}(a)$ (o que, na terminologia antiga, equivale a dizer que a é deficiente). Também $b^2 = uv$, com $cx - b = u$, e $cy - b = v$, e assim $x = (u + b)/c$ e $y = (v + b)/c$. Agora buscamos as possíveis decomposições uv de b^2 com $x - 1$, $y - 1$ e $xy - 1$ primos. O par será $\{a(x - 1)(y - 1), a(xy - 1)\}$. Está é a idéia central de Euler, que tornou viável o cálculo de muitos pares. Usando as expressões dadas e a equação *(ET)* isto reduz drasticamente o problema da busca de soluções de uma equação diofantina quadrática do tipo *(I)*: a é dado, e a partir de a tentamos calcular x e y.

No caso chamado por Euler de regra 1, tomamos $a = 2^k$, $b = 2^m$ e $c = 1$. Aqui obtemos a fórmula *(EG)*, que é uma generalização da fórmula *(T)* e que nos fornece um procedimento para a obtenção de todos os pares amigos da forma $\{2^k pq, 2^k r\}$, com p, q e r primos ímpares distintos:

(EG) $x - 1 = p = 2^{(k-m)}f - 1$, $y - 1 = q = 2^k f - 1$, $xy - 1 = r = 2^{(2k-m)}f^2 - 1$, *onde p, q e r são primos para* $k > m > 0$, e $f = 2^m + 1$.

Na próxima etapa ele estuda o que chama de regra 2: a fórmula *(EG)* com $f = (2^{(k+1)} + 2^m - 1)$ primo. Para $m = 1$ obtemos a fórmula de Thabit, que o próprio Euler verificou não resultar em nenhum outro par com primos $p, q, r < 10000$. Para $m > 2$ mais tarde foram obtidas duas novas soluções: $m = 7$, $k = 8$ (Legendre, Tchebychev) e $m = 11$, $k = 40$ (Riele). No caso 3 ele estuda $a = 2^k f$, $f = (2^{(k+1)} + 2^m - 1)$ primo, $k > m$, tomando $b = (2^{(k+1)} + 2^m - 1)$ e $c = 2^{k-m}$, e não consegue nenhum novo par. Modificando um pouco a fórmula ele obtém para possíveis pares $a = 2^k f$, $p = 3.2^{(k-1)} - 1$, $q = 3.2^{(k-1)}f - 1$, $r = pq - 1$, $f = 3.2^{(k+1)} - 1$, resultando para $k = 2$, $f = 23$, $p = 5$, $q = 137$ e $r = 827$ o par {4.23.5.137, 4.23.827} = {63020, 76084}. Este é o primeiro novo par exibido em E152.

A partir desse ponto ele passa a estudar os casos em que a é divisível por pelo menos três primos, dando ênfase aos casos onde ou $c = 1$ ou c é produto de dois primos. O procedimento é o seguinte: seja $a = 2^n(g - 1)(h - 1)$, com $g - 1$ e $h - 1$ primos. No caso de a composto como em *(I)*, Euler apresenta o seguinte exemplo: $a = 4.13.17$, $b = 13.17 = 221$, $d = 221$, de maneira que nossa equação fica $(x - 221)(y - 221) = 13^2.17^2$. As decomposições relevantes de b^2 são $u = x - 221 = 13$, 17 e 13^2 e, respectivamente, $v = y - 221 = 13.17^2$, $13^2.17$ e 17^2. Euler deve escolher o par de valores que faz $x - 1$, $y - 1$ e $xy - 1$ primos. A Tabela 1 representa as diversas possibilidades:

$x - 221$	13	17	169
$y - 221$	3757	----	289
$x - 1$	233	237*	389
$y - 1$	3977*	----	509
$xy - 1$	----	----	198899

Tabela 1

Os itens marcados com asterisco por Euler não são primos, de maneira que as condições não são satisfeitas nesses casos. Resta o caso $x - 1 = 389$ (primo), $y - 1 = 509$ (primo) e $xy - 1 = 198899$. Este último não está na lista de primos dele e ele usa a regra apresentada em outro trabalho (E699): um número primo admite uma só decomposição $r^2 + 2s^2$, como é o caso de 198899. Este é o critério de Euler sobre números idôneos (E152, p. 55). Euler faz uso de uma tabela de lista dos fatores em cada caso.

Na regra 5 ele dá oito exemplos da situação anterior, que são fáceis de serem reconhecidos, e apresenta uma lista de 12 pares de tipo [2, 1], a maioria tendo vários divisores pequenos com três fatores de a.

8. Caso [2, 2]: método da redução

Os problemas 2 a 4 são extensões do método da redução para busca de pares $(2, f)$ com $f > 1$: pesquisar números amigos da forma {*apq, arf*}, onde p, q, r e s são números primos distintos, a serem determinados por a. No problema 3 (chamado por erro de impressão de problema 2), ele modifica um pouco o problema inicial relaxando a condição de f ser primo. Já no problema 4, a busca é por números amigos da forma {*agpq, ahr*} onde

p e q são primos, g e h são números dados, primos ou não, e a o fator comum a ser determinado, i.e., pares do tipo $[s, t]$ com $s > 2$ e $t > 2$. Nestes dois últimos problemas ele introduz novas variáveis. Como estes problemas são pequenas variações do mesmo tema, vamos discutir o problema 3. De *(E)* segue-se que $(p + 1)(q + 1) = (r + 1)gh$ onde $\sigma(f) = gh$. Nossa equação fica:

$$(III)\ (ex - bg)(ey - bh) = w,\ w = b^2gh + be(f - 1) = PQ,\ \ e = bf - bgh + cgh,\ x = (P + bg)/e,$$
$$y = (Q + bh)/e,\ \ r = xy - 1,\ \{a(hx - 1)(gy - 1),\ af(xy - 1)\}.$$

Aqui se fixa $a = 2^k$ e varia-se f. O desenvolvimento destes problemas vai da página 68 à 80 de E152, e obtêm-se quatro casos e exemplos.

O problema 4 (E152, p. 81) busca números amigos da forma $\{agpq, ahr\}$ onde p e q são primos, g e h são números dados, primos ou não, e a é o fator comum a ser determinado. Aqui se introduz $\sigma(a)/\sigma(b) = m/n$, e, tomando $e = b(mh + ng) - (2b - c)m\sigma(h)$ chega-se à equação

$$(IV)\ (ex - nbg)(ey - nbg) = w,\ w = n^2b^2g^2 + (nb)(h - g)e = MN,\ x = (M + nbg)/e,\ y = (N + nbg)/e,\ e = b(mh + ng) - (2b - c)m\sigma(h).$$

Em cada caso ele apresenta uma tabela como a de cima, que auxilia os cálculos.

9. Caso [2, 2]: método do fator desconhecido

O primeiro método está no problema 5 (E152, p. 85, Caso 1), onde o objetivo é achar números amigos da forma $\{zap, zbq\}$ com a e b prefixados, p, q primos, e fator comum z, a ser determinado; observe-se que podemos ter $b = 1$, e então este caso olha de outra maneira todos os anteriores. Euler procede da seguinte maneira: Como $\sigma(zap)=\sigma(zbq)$ e seja $\sigma(a)/\sigma(b) = m/n$, o que por *(ET)* será igual a $\sigma(q)/\sigma(p)$, logo podemos escrever $p + 1 = nx$, $q + 1 = mx$. Os números amigos serão da forma $za(nx - 1)$ e $zb(my - 1)$, com $nx - 1$ e $my - 1$ primos. Segue-se de *(ET)* que

$$(V)\ z/\sigma(z) = nx\sigma(a)/((na + mb)x - a - b) = r/s,\ \mathrm{mdc}(r, s) = 1.$$

Aqui ele usa o seguinte resultado muito útil: se $z/\sigma(z) = r'/s'$ com $\sigma(r') > s'$, então r' e s' têm fator comum.

Em todos os casos Euler faz uma mudança de variáveis e uma análise de divisibilidade para reduzir o número de etapas de verificação. No exemplo apresentado nas páginas 90-92 de E152, toma-se para $\{a, b\}$ o par $\{5, 1\}$ e daí $\{m = 6, n = 1\}$, assim obteremos $z/\sigma(z) = 6x/(11x - 6)$ e o par será $\{z(6x - 1), 5z(x - 1)\}$. Tomando x par elimina-se um fator 2 do numerador e depois ele consegue um único par de números amigos: neste caso $z = 4.23$, $p = 137$ e $q = 827$, e o par é $\{63020, 76084\}$. Examinemos outra situação deste mesmo grupo de números. A eliminação de 2 no numerador de $z/\sigma(z)$ nos dá $p = (4w + 1)$, $q = 24w + 11$, $z/\sigma(z) = 3(2w + 1)/(11w + 4)$ e o mais importante é que com esta mudança conseguimos evitar os pares de primos onde $w = 2t + 1$, $4t + 1$ e $24t + 11$ e z é divisível por 5. Assim estão excluídos os casos $w = 5t + 2$ e $5t + 1$. Apresentamos, no apêndice, uma tabela com 18 pares de primos, sendo que somente 6 dão números amigos contendo os pares onde $x - 1$ é menor que 1000. Ela é extraída das paginas 91 e 92 de E152. A seguir, Euler passa para o estudo dos casos {7, 1}, {11, 1}, {17, 5}, {37, 127}, {79, 11.19} e {17.19, 11.59}; na maioria destes casos $n = 1$. O artigo E152 termina com a lista dos 61 pares obtidos por Euler.

10. Números Amigos III

O último trabalho nesta linha é o E798, que só foi publicado depois da morte de Euler. Aqui ele descreve explicitamente suas técnicas de atacar o problema 5 e trata diretamente do caso do problema 4, mas não exibe nenhum novo par. Nos parágrafos anteriores ao §8 ele apresenta uma introdução e histórico. No §8 Euler observa que um número perfeito é um caso especial de um par amigo onde $m = n$. Daí ele aplica sua discussão a esta situação, mostrando que todo número perfeito par é um número de Euclides, i.e., um número da forma $2^n(2^{n+1} - 1)$, desde que $n + 1$ seja um primo de Mersenne. Ele conjectura que não existe número perfeito ímpar, mas, caso exista, ele deve ter uma fórmula do tipo $(4n + 1)^{(4n+1)}x^2$, onde $4n + 1$ é primo e x é impar (Dickson 1971, 19). No §9 ele exibe oito pares amigos, sendo dois consistindo de números ímpares. Estes pares são obtidos pelas técnicas apresentadas a seguir para pares do tipo [2, 2]. O §10 trata de pares do tipo [2, 2], isto é, pares $\{px, qy\}$ com x e y primos. Ele passa a denotar $\sigma(n)$ por N; vamos manter esta notação de Euler. Usamos a equação *(ET),* que ficará $P(x + 1) = Q(y + 1) = px + qy$, onde impomos que isto seja Pqz, e, se n é o mdc de (p, q), $p = na$, $q = nb$, nossa fórmula fica

$$(Va)\ \{x = nB(a + b)/((aB + bA)n - ABN) - 1\ ,\ \ y = nA(a + b)/((aB + Ab)n - ABN) - 1\}.$$

Em particular para a e b primos temos

$$(Vb)\ (x + 1)/(b + 1) = (y + 1)/(a + 1) = n(a + b)/((2n - N)ab - (N - n)(a + b) - N).$$

Para $a = 1$ e $n = 2^k$ obtemos os números de Thabit, com $n = 2, 4, 8$. A seguir ele apresenta vários exemplos da aplicação desta fórmula. Vamos mencionar somente quatro: exemplo 1: $a = 1$, $n = 92$, $b = 5$ e daí segue que $y = 127$ e $x = 827$; exemplo 2: a e b primos: $n = 4$, $b = 5$, $a = 13$, $x = 107$, $y = 251$; exemplo 3: $a = 17$, $b = 5$, $x = 43$, $y = 131$; exemplo 4: $a = 43$, $b = 17$, $n = 44$, $x = 17$, $y = 43$. Nos parágrafos 14 a 17 Euler apresenta seis exemplos do método da variável indeterminada, como foi apresentado acima. Finalmente, no parágrafo 18 ele apresenta a lista de $\sigma(p^k)$, p primo, $p < 1000$ e $k = 1, 2, 3$.

11. Considerações finais

Em resumo, dividimos o trabalho de Euler sobre números amigos em três partes, sendo que as duas últimas contêm as idéias centrais destes trabalhos. A primeira é um estudo minucioso sobre a função σ da divisibilidade e de primalidade. Explora-se sua relação com div e fornecem-se exemplos simples de solução de *(ET)*. Não vimos traços do uso de $\mathrm{div}(\mathrm{div}(n)) = n$ para membros de pares amigos tratados por Euler. Possivelmente

Paganini deve ter usado esta equação. A segunda contém o cerne da busca de Euler; é o que chamamos de método da redução. Aqui Euler só trabalha até o tipo [2, 2], pois com mais variáveis as fórmulas são muito complicadas. Suas fórmulas *(III)* e *(IV)*, porém, permitem buscar pares de tipo superior. A terceira é o método do fator desconhecido para a resolução da equação $\sigma(z)/z = B/A$, mdc$(A, B) = 1$.

Pode-se dizer que os métodos de Euler conseguiram reduzir uma busca quase que impossível a uma situação acessível. Ele não conseguiu critérios para amicabilidade de pares, porém tornou a busca viável e hoje, trabalhando com os métodos de Euler e com possantes computadores, é possível listar mais de 11 milhões destes pares. Sabemos que vários matemáticos tinham uma vaga idéia das propriedades da função sigma e da fórmula de Thabit. Possivelmente tanto Descartes como Thabit partiram da equação *(ET)*, usando o fato que $\sigma(2^n) = 2^{(n+1)} - 1$, $\sigma(p) = p + 1$, para p primo e $\text{div}(pn) = (p + 1)\text{div}(n) + n$ (Dickson 1971, 53), na equação *(ET)*. Certamente Euler tinha em suas mãos o livro de Van Schooten, e onde está discutida a solução de Descartes via algo parecido com nossa fórmula acima. O livro de Van Schooten é raro, porém uma descrição de seu conteúdo sobre números amigos se encontra no livro de Dickson (1971, 41), bem como seu excelente resumo do artigo E152 (Dickson 1971, 40-6). Euler não somente teve a idéia de generalizar a fórmula *(T)* bem como teve uma excelente intuição de onde procurar os exemplos e onde parar com sua busca. A seu favor ele tinha uma excelente tabela de primos menores que 100000, bem como uma tabela de valores de σ até 1000.

Nosso objetivo foi fazer um estudo histórico técnico e usar os métodos específicos de Euler para obter pares amigos, vendo onde esbarramos nas novas dificuldades; não temos a pretensão de obter novos pares, pois este tópico já foi muito estudado e por experiência própria qualquer número novo estará acima de 10^{10} ou, como mostrado recentemente, acima de 10^{14}. Um estudo deste tipo encontra justificativa em Sandifer (2005), que menciona a dificuldade da leitura de E152. Buscamos as idéias e as formas pelas quais Euler procede na busca de pares amigos. Usamos as relações *(III)*, *(V)* e *(Vb)* para termos idéia da dificuldade enfrentada por ele. Com estas fórmulas testamos milhares de casos. Podemos afirmar que certamente ele parava no ponto certo da busca. É de se admirar o poder de cálculo deste matemático, bem como sua perseverança em fazer milhares de contas sem resultados positivos.

Apêndice

Apresentamos, a seguir, parte da tabela de geração de pares amigos contida em E152, pp. 91 e 92.

w	$x - 1$	$6x - 1$	$z/\sigma(z) = 3(2w + 1)/(11w + 4)$
3	13	83	21/37, equação sem solução porque $\sigma(21) = 4.8 = 32 < 37$
4	17	107	3.9/48 = (9/13)(13/14)(7/8), z = 7.9.13 Ou = (27/40)(5/6), z = 27.5 (valor que não serve). Logo, z = 9.7.13, par amigo: {9.7.13.5.17, 9.7.13.107}
9	37	227	3.19/103, equação sem solução

10	41	251	$3.21/114 = (7^2/57)(3^2/13)(13/14)$ $z = 3^2.7^2.13$, par amigo: $\{3^2.7^2.13.41,\ 3^2.7^2.13.251\}$
18	73	443	3.37/202, equação sem solução
24	97	587	3.49/268, equação sem solução
28	113	683	3.57/312, equação sem solução
34	137	827	$3.69/378 = 23/42 = (23/24)(4/7)$, $z = 4.23$ já obtido
39	157	947	3.79/433, equação sem solução
45	181	1091	3.91/499, equação sem solução
48	193	1163	$3.97/532 = 3.97/(4.7.19) = (97/98)(7^2/57)(3^2.13)(13/14)$ $z = 3^2.7^2.13.97$, par amigo $\{3^2.7^2.13.97.5.193,$ $3^2.7^2.13.97.1163\}$
49	197	1187	$3.99/543 = 9.11/181$
60	241	1451	$3.121/664 = 3.11.11/(8.83)$
69	277	1667	3.139/793, equação sem solução
79	317	1907	3.157/873, equação sem solução
84	337	2027	3.169/928, equação sem solução
93	373	2243	3.187/1027, equação sem solução
100	401	2411	3.201/1104, equação sem solução
244	977	5867	$3.489/2688 = 3.163/(128.7) =$ $(163.164)(41/42)(9/13)(13/14)(7/8)$, $z = 9.7.13.41.163$, par amigo: $\{3^2.7.13.41.163.5.977,$ $3^2.7.13.41.163.5867\}$

Referências

Euler, Leonhard. 1747a. "De numeris amicabilibus", *Nova acta eruditorum*, 1747, 267-269. Também em *Opera Omnia*, Series I, vol. 2, pp. 59-61 (Índice de Eneström E100).

—–. 1747b. "De numeris amicabilibus". *Opuscula varii argumenti,* vol. 2, pp. 23-107 (Berlim, 1750). Também em *Opera Omnia*, Series I, Vol. 2, 86-162 (Índice de Eneström E152).

—–. 1747c. "De numeris amicabilibus". *Commentationes arithmeticae,* vol. 2, 627-636. Também em *Opera Omnia*, Series I, vol. 5, 353-365 (Índice de Eneström E798).

Garcia, M., Pederson, J. T. e Riele, H. 2003. *Amicable Pairs*. Amsterdam,NI: MAS.

Sandifer, E. 2005. *How Euler Did It*, MAA Online.

Dickson, L. 1971. *History of Number Theory*, vol. I. Nova York: Chelsea.

Van Schooten, Frans. 1657. *Exercitaciones mathematicae*, vol V. Leiden.

Van der Waerden, B.L. 1985. *History of Algebra*. Nova York: Springer.

Nelo D. Allan
Universidade do Estado de Mato Grosso, Campus de Cáceres

E-mail: neloallan@gmail.com