

## **MINKOWSKI, GEOMETRIA E RELATIVIDADE**

José Carlos Santos  
*Universidade do Porto - Portugal*

(aceito para publicação em julho de 2009)

### **Resumo**

Einstein publicou o seu primeiro artigo sobre Teoria da Relatividade em 1905, mas este despertou, de início, pouco interesse por parte dos físicos. A Relatividade só começou a ser conhecida num âmbito mais vasto em 1908, quando Hermann Minkowski proferiu a sua famosa palestra «Espaço e Tempo». Além de Minkowski, outros notáveis matemáticos de Göttingen ocuparam-se de Relatividade: David Hilbert, Hermann Weyl e, em menor grau, Felix Klein e Emmy Noether. Vão-se ver as razões que levaram aqueles matemáticos a estarem numa posição particularmente adequada para abordarem esta área da Física.

**Palavras-chave:** Relatividade, Einstein, Minkowski

### **Abstract**

Einstein published his first article about the Theory of Relativity in 1905 but, at first, few physicists displayed interest in this subject. Relativity began to be known by a wider audience only in 1908, when Hermann Minkowski gave his lecture “Space and Time”. Besides Minkowski, other remarkable Göttingen mathematicians studied Relativity: David Hilbert, Hermann Weyl and, in a smaller measure, Felix Klein and Emmy Noether. We shall see why these mathematicians were particularly well adapted to the study of this area of Physics.

**Keywords:** Relativity, Einstein, Minkowski

### **Introdução**

Albert Einstein (1879–1955) publicou o seu primeiro artigo sobre Relatividade em 1905 ([Ein72], [Mil97, Apêndice]). Inicialmente, o artigo despertou pouca atenção entre os físicos. Só vários meses após a sua publicação é que Einstein teve a primeira reacção, sob a forma de uma carta de Max Planck (1858–1947), que já era então um físico reputado. As ideias de Einstein começaram a ser divulgadas, sobretudo graças aos esforços de Planck,

que as expôs num colóquio de Física que teve lugar no primeiro semestre do ano lectivo 1905–06 e orientou a primeira tese de doutoramento naquela área, publicada em 1907. Max von Laue (1879–1960), então assistente de Planck, trabalhou em Relatividade e viria a publicar a primeira monografia sobre o assunto [Lau11], para além de ser provavelmente o primeiro cientista a deslocar-se a Berna para conhecer e conversar com Einstein.<sup>1</sup>

No entanto, a Relatividade só começou a tornar-se conhecida por outros cientistas que não físicos quando Hermann Minkowski (1864–1909), que fora professor de Einstein no Instituto Politécnico de Zurique,<sup>2</sup> proferiu a sua famosa palestra «Espaço e Tempo» [Min72] a 21 de Setembro de 1908 numa conferência de cientistas alemães de diversas áreas. Minkowski era professor de Matemática na Universidade de Göttingen desde 1902 e não foi o único matemático daquela universidade a dedicar-se à Teoria da Relatividade, pois Felix Klein (1849–1925), David Hilbert (1862–1943), Emmy Noether (1885–1935) e Hermann Weyl (1885–1955) também o fizeram.<sup>3</sup> Neste texto vai-se estudar o que levou os matemáticos de Göttingen a interessarem-se tanto por aquele tópico, com ênfase na abordagem de Minkowski e na criação do conceito de espaço-tempo.

## 1 Os matemáticos de Göttingen antes da Relatividade

### 1.1 Felix Klein e o Programa de Erlangen

Felix Klein pensou em dedicar-se à Física enquanto era estudante universitário, mas acabou por mudar de ideias e tornou-se matemático [BS91]. Em 1872 foi nomeado *ordentlicher Professor* na Universidade de Erlangen, com apenas vinte e três anos. Foi para a sua dissertação inaugural como professor que Klein escreveu o famoso *Programa de Erlangen* [Kle73c].<sup>4</sup> Naquele programa, Klein examina a evolução do conceito de Geometria e propõe unificar as diferentes teorias geométricas recorrendo ao conceito de grupo de simetrias. Cada Geometria (projectiva, afim, etc.) estuda um espaço munido de um grupo de simetrias; mais precisamente, estuda as propriedades do espaço que são invariantes relativamente àquelas simetrias. Assim, por exemplo [Kle73c, §3], a Geometria Projectiva estuda as propriedades do espaço projectivo que são invariantes relativamente ao grupo das transformações projectivas.

Esta abordagem à Geometria pode parecer banal actualmente, mas foi revolucionária na altura, embora se possa argumentar [Haw84] que os trabalhos contemporâneos de Sophus Lie (1842–1899) e dos seus alunos fizeram mais pela divulgação deste tipo de ideias do que o Programa de Erlangen. Aliás, o próprio Klein reconheceu que o Programa pouca divulgação teve nos vinte primeiros anos após a sua publicação.

Klein também estudou, pela mesma época, as geometrias não-euclidianas, que eram um tópico que pouco interesse despertara até então. A partir de 1886, Klein tornou-se professor de Matemática na Universidade de Göttingen. Os cursos que aí leccionou foram

---

<sup>1</sup>Vejam-se [Mil97, cap. 1] e [Pai89, §7c] para mais detalhes sobre as reacções iniciais à Teoria da Relatividade.

<sup>2</sup>Foi o professor que Einstein teve em mais cadeiras: nove, no total [Pye77, §1].

<sup>3</sup>Vejam-se [Row99] para a contribuição de Emmy Noether. Quanto à de Hermann Weyl, basta pensar no livro [Wey18].

<sup>4</sup>Embora seja este o nome pelo qual é actualmente conhecido, o título do texto em questão é *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (*Considerações comparativas sobre as pesquisas geométricas modernas*). Vejam-se [BB88] e [Haw84] para mais detalhes sobre o seu impacto.

geralmente de áreas da Matemática próximas da Física, tais como Mecânica ou Teoria do Potencial.

### 1.2 David Hilbert e a Teoria dos Invariantes

A primeira área de pesquisa a que Hilbert se dedicou foi a Teoria dos Invariantes. Quando Hilbert nela trabalhou, aquela teoria estudava a seguinte situação: considere-se um subgrupo  $G$  do grupo  $GL(n, X)$  de todos os automorfismos lineares de  $X^n$ , para algum  $n \in \mathbb{N}$ . Considere-se ainda uma acção linear de  $G$  num espaço vectorial complexo de dimensão finita  $V$ . Queria-se então estudar a álgebra  $S(V)^G$  das funções polinomiais de  $V$  em  $X$  que fossem invariantes relativamente à acção de  $G$ , ou seja, as funções polinomiais  $P: V \rightarrow X$  tais que

$$(\forall g \in X)(\forall v \in X^n): P(g \cdot v) = P(v).$$

Mais precisamente, queria-se saber se aquela álgebra era ou não finitamente gerada. Em particular, Hilbert provou que a resposta é afirmativa quando  $G = SL(n, X)$ , que é o subgrupo de  $GL(n, X)$  formado pelos elementos de determinante 1.

Hilbert era professor de Matemática na universidade de Königsberg (onde se licenciara juntamente com Minkowski) quando publicou estes trabalhos. Tentou mudar-se para Göttingen em 1892, mas o lugar que ele pretendia foi ocupado por Heinrich Martin Weber<sup>5</sup> (1843–1912). Quando este se transferiu para a Universidade de Estrasburgo, em 1895, Hilbert substituiu-o. Em 1902 Klein conseguiu fazer com que fosse criada mais uma cátedra de Matemática em Göttingen, para a qual Hilbert convidou Minkowski. Este, que estava então no Instituto Politécnico de Zurique, aceitou o lugar.

## 2 O nascimento da Relatividade

No fim do século XIX, as teorias físicas relativas ao electromagnetismo eram dominadas pelas ideias de James Clerk Maxwell (1831–1879), que foram confirmadas experimentalmente por Heinrich Hertz (1857–1894). Julgava-se na altura que a luz era formada por ondas de uma substância designada por éter. No entanto, experiências destinadas a detectar o movimento da Terra através do éter, nomeadamente a célebre experiência de Michelson-Morley de 1887 [MM87], não o conseguiram fazer. Isto parecia indicar que a velocidade da luz relativamente à Terra não era afectada pelo movimento desta em torno do Sol.<sup>6</sup>

### 2.1 Larmor e Lorentz

Não se vai fazer aqui uma análise detalhada do contexto no qual Joseph Larmor (1857–1942) e Hendrik Lorentz (1853–1928) chegaram às transformadas de Lorentz, que

<sup>5</sup>Não confundir com o físico Heinrich Friedrich Weber (1842–1913), que foi professor de Einstein no Instituto Politécnico de Zurique. Curiosamente, Heinrich Martin Weber também foi professor naquele Instituto.

<sup>6</sup>Mais precisamente: visto que a Terra se move em torno do Sol, seria de esperar que a velocidade de Terra relativamente ao éter fosse mudando ao longo do ano.

relacionam as coordenadas espaço-temporais de um ponto relativamente a dois referenciais, um dos quais está imóvel relativamente ao éter e o outro está em movimento uniforme relativamente um ao primeiro; veja-se [Mac86], [McC70] ou [Mil97, cap. 1], por exemplo. Vejamos somente a teoria que propuseram. Para tal, considere-se um referencial  $R$  imóvel relativamente ao éter. As coordenadas espaço-temporais de um ponto  $P$  relativamente a esse referencial são dadas por três coordenadas espaciais,  $x$ ,  $y$  e  $z$ , e uma coordenada temporal,  $t$ . Considere-se agora um segundo referencial inercial  $R'$  que se move a uma velocidade uniforme  $v$  relativamente ao éter. As coordenadas de  $P$  neste segundo referencial são  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  e  $t'$ . Suponha-se que:

1. as origens são as mesmas para ambos os referenciais, ou seja, se  $P$  tiver coordenadas  $(0,0,0,0)$  relativamente a  $R$  então também tem coordenadas  $(0,0,0,0)$  relativamente a  $R'$  e vice-versa;
2. a origem do referencial  $R'$  move-se ao longo do eixo dos  $xx$  do referencial  $R$  a uma velocidade constante  $v$ , ou seja (tendo em conta a hipótese anterior), o ponto cujas coordenadas relativamente ao referencial  $R$  são  $(vt,0,0,t)$  tem as três primeiras coordenadas nulas relativamente ao referencial  $R'$ .

Nestas condições, a Mecânica clássica afirma que:

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

O que Larmor [Lar97, §16] e Lorentz [Lor72, §4] propuseram (em 1897 e em 1904 respectivamente) foi que se deveria de facto usar:

$$\begin{cases} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases} \quad (1)$$

onde  $c$  representa a velocidade a que a luz se propaga no éter.

Convém esclarecer vários pontos.

- Larmor e Lorentz estavam a formular teorias relativas às partículas elementares.
- Nem Larmor nem Lorentz propuseram uma teoria relativista. Para ambos, as «verdadeiras» coordenadas eram  $x$ ,  $y$ ,  $z$  e  $t$ ; as coordenadas  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  e  $t'$  eram um artefacto matemático que permitia simplificar os cálculos.<sup>7</sup>

<sup>7</sup>Isto é admitido explicitamente por Lorentz em [Lor56].

- Lorentz já propusera anteriormente ([Lor92], [Lor95, §23]) outras conjecturas sobre como passar do referencial  $R$  para o referencial  $R'$ , o que é referido por Larmor. As sugestões avançadas por Lorentz em [Lor95, §23] e em [Lor72, §4] tinham em comum o facto de serem compatíveis com a ausência de detecção do movimento da Terra através do éter da experiência de Michelson-Morley.
- Nem Larmor nem Lorentz escreveram as transformações de coordenadas sob a forma (1). Ambos usaram ainda um terceiro sistema de coordenadas e o que fizeram foi explicar como passar do referencial  $R$  para esse sistema e como passar desse sistema para  $R'$ .
- Larmor e Lorentz observaram que as transformadas de Lorentz não alteram a forma das equações de Maxwell.

Lorentz expôs muito claramente quais eram as hipóteses com que estava a trabalhar<sup>8</sup>, uma das quais era a de que uma partícula elementar em movimento relativamente ao éter sofreria uma contracção no sentido do movimento, contracção essa que seria exactamente do valor necessário para explicar o resultado da experiência de Michelson-Morley.<sup>9</sup>

## 2.2 Einstein

Em [Ein72], Einstein chegou também à transformação (1), independentemente de Lorentz<sup>10</sup>, mas atribuindo-lhe um significado distinto e partindo de menos hipóteses. Supondo somente:

1. o Princípio da Relatividade: relativamente a dois referenciais inerciais, as leis da natureza são as mesmas;
2. a velocidade da luz no vazio é constante e é a mesma para todos os observadores,

Einstein provou que, dados quaisquer dois referenciais inerciais  $R$  e  $R'$ , se a origem for a mesma para ambos e se, tal como atrás,

1. as origens são os mesmas para ambos os referenciais, ou seja, se  $P$  tiver coordenadas  $(0,0,0,0)$  relativamente a  $R$  então também tem coordenadas  $(0,0,0,0)$  relativamente a  $R'$  e vice-versa;
2. a origem do referencial  $R'$  move-se ao longo do eixo dos  $xx$  do referencial  $R$  (no sentido acima referido),

então (1) descreve como passar das coordenadas de um ponto relativamente a  $R$  para as coordenadas do mesmo ponto relativamente a  $R'$ .

Contrariamente a Larmor e a Lorentz, Einstein não encarou as coordenadas relativas ao referencial  $R'$  como uma mera construção matemática destinada a facilitar os cálculos. De facto, Lorentz, que chamara a  $t'$  «tempo local» viria a afirmar em 1909 [Lor09, cap. V] que, de facto, dados dois observadores em movimento relativo uniforme não há nenhum motivo para afirmar que os tempos ou os comprimentos que um deles determina são mais «verdadeiros» que os do outro.

<sup>8</sup>A lista das hipóteses de Lorentz é sucintamente descrita em [Hol60].

<sup>9</sup>Esta hipótese também tinha sido proposta por George Francis FitzGerald (1851–1901); veja-se [Bru67].

<sup>10</sup>Note-se que quando Einstein escreveu [Ein72] ainda não conhecia nem o artigo [Lor72] (veja-se [Dar04, p. 620]) nem o artigo de Larmor.

Einstein também deduziu das transformadas de Lorentz que se  $R''$  for um outro referencial inercial a mover-se a uma velocidade uniforme  $w$  relativamente a  $R'$ , então move-se a uma velocidade constante  $u$  relativamente a  $R$ , com

$$u = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{c^2}} \quad (2)$$

Esta é a fórmula relativística para a adição de velocidades. Einstein observou que (2) define uma lei de grupo em  $]c, c[$ .

### 2.3 Poincaré

Já desde o fim do século XIX que Poincaré reflectia sobre o Princípio da Relatividade e foi mesmo a primeira pessoa a enunciar, em 1895, que aquele princípio era válido para qualquer tipo de fenómeno e não somente para fenómenos mecânicos [Poi56c, §11].<sup>11</sup>

Mas o principal artigo de Poincaré relacionado com a Teoria da Relatividade [Poi24c] foi enviado para publicação somente semanas após o de Einstein, embora só tenha sido publicado bastantes meses depois, em Janeiro do seguinte.<sup>12</sup> Como é óbvio, Einstein não é aí mencionado. Em contrapartida, o texto de Poincaré contém uma profunda análise do artigo de Lorentz de 1904 [Lor72].

Antes de se passar à análise que Poincaré fez do artigo de Lorentz, convém referir que já antes, em *La Science et l'hypothèse* [Poi68] (originalmente publicado em 1902), Poincaré criticara as ideias de Lorentz expostas em [Lor95]. Em particular, no capítulo *L'électrodynamique* Poincaré afirma que a teoria de Lorentz «fornece uma explicação muito simples de certos fenómenos os quais as antigas teorias, mesmo a de Maxwell sob a sua forma primitiva, não podiam abarcar». Logo em seguida, Poincaré observa que uma crítica que se poderia levantar contra a teoria de Lorentz era que esta não era compatível com o Princípio da Relatividade, mas explica imediatamente que não é esse o caso. O mesmo livro contém um capítulo, chamado *Le mouvement relatif et le mouvement absolu*, inteiramente dedicado ao Princípio da Relatividade (ou, como Poincaré lhe chama aí, o «princípio do movimento relativo»). Finalmente, no capítulo *Les théories de la physique moderne*, Poincaré pergunta «E o nosso éter, existe realmente? », explicando porque foi necessário supor que a resposta é afirmativa. Nesso mesmo capítulo, Poincaré explica que não acredita que alguma vez se venha a detectar o movimento da Terra relativamente ao éter. Este livro foi lido por Einstein em 1904 [Ein56].<sup>13</sup>

<sup>11</sup>O Princípio da Relatividade foi proposto por Galileu nos *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*. Mais tarde, nos *Principia*, Newton observou que as leis da Mecânica bem como a lei da gravitação universal não sofrem qualquer alteração se se substituir um referencial por outro que esteja em movimento uniforme relativamente ao primeiro.

<sup>12</sup>Veja-se [Mil73] para uma análise detalhada do artigo de Poincaré. Convém também saber que, ainda em 1905 surgiu o artigo [Poi24d], que é um curto resumo de [Poi24c].

<sup>13</sup>Convém observar que, embora *La Science et l'hypothèse* tenha sido efectivamente publicado em 1902, é em grande parte uma compilação de textos anteriores. Por outro lado, o último texto do livro (*La fin de la matière*), que contém observações relevantes para a Teoria da Relatividade, foi escrito originalmente em 1906 e só foi acrescentado ao livro em edições posteriores.

Em [Poi24c], Poincaré obtém as transformadas de Lorentz<sup>14</sup> sob a forma (1).<sup>15</sup> Observa também que as transformadas de Lorentz formam um grupo, no seguinte sentido: se, para alguma velocidade  $w$  se tiver

$$\begin{cases} x'' = \frac{x' - wt'}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} \\ y'' = y' \\ z'' = z' \\ t'' = \frac{t' - wx'/c^2}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} \end{cases}$$

então

$$\begin{cases} x'' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ y'' = y \\ z'' = z \\ t'' = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \end{cases}$$

onde  $u$  é dado por (2). Em seguida, Poincaré define o grupo de Lorentz como sendo o grupo das transformações lineares de  $\mathfrak{R}^4$  gerado pelas transformadas de Lorentz (relativamente aos três eixos) e pelas rotações do espaço, isto é, as transformações lineares do tipo  $(x, y, z, t) \mapsto (x', y', z', t')$  onde  $\|(x', y', z')\| = \|(x, y, z)\|$ . Observa também que, alternativamente, o grupo de Lorentz pode ser definido como o grupo dos automorfismos lineares de  $\mathfrak{R}^4$  que preservam a forma quadrática

$$\begin{aligned} q: \mathfrak{R}^4 &\rightarrow \mathfrak{R}^4 \\ (x, y, z, t) &\mapsto c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \end{aligned} \quad (3)$$

<sup>14</sup>Aliás, é no resumo [Poi24d] de [Poi24c] que a expressão «transformadas de Lorentz» surge pela primeira vez.

<sup>15</sup>De facto, há duas diferenças formais entre (1) e a expressão obtida por Poincaré, que resultam de ele ter escolhido as unidades de comprimento e de tempo de modo a ter-se  $c = 1$  e de considerar, não a velocidade de  $R'$  relativamente a  $R$ , mas sim a de  $R$  relativamente a  $R'$ , o que leva a uma troca de sinais.

Na última secção de [Poi24c] Poincaré estuda o seguinte problema: encontrar invariantes para a acção do grupo de Lorentz em  $\mathfrak{R}^4$ ; mais precisamente, Poincaré estuda o problema de encontrar funções  $f$  de  $\mathfrak{R}^4$  (respectivamente  $\mathfrak{R}^4 \times \mathfrak{R}^4$ ) em  $\mathfrak{R}$  tais que, para cada elemento  $g$  do grupo de Lorentz, se tenha

$$(\forall v \in \mathfrak{R}^4) : f(g \cdot v) = f(v) \quad (\text{resp. } f(g \cdot v, g \cdot w) = f(v, w))$$

Outra maneira de enunciar esta propriedade é: se  $(x, y, z, t)$  e  $(x', y', z', t')$  forem elementos de  $\mathfrak{R}^4$  tais que se tenha (1) para algum parâmetro  $v$ , então  $f(x', y', z', t') = f(x, y, z, t)$ . Observe-se que, se se estivesse a supor que  $f$  é uma função polinomial, então este seria precisamente o problema estudado por Hilbert que foi mencionado na subsecção «David Hilbert e a Teoria dos Invariantes». Naturalmente, dada a segunda das definições que Lorentz apresenta para o grupo de Lorentz, uma das funções que satisfazem esta propriedade é a forma quadrática  $q$ . Todos os exemplos dados por Poincaré são ou funções polinomiais ou raízes quadradas de tais funções.

Poincaré faz também a seguinte observação: se encararmos a transformada de Lorentz não como uma função de  $\mathfrak{R}^4$  em  $\mathfrak{R}^4$  mas sim como uma função de  $\mathfrak{R}^3 \times (i\mathfrak{R})$  em  $\mathfrak{R}^3 \times (i\mathfrak{R})$ , isto é, se considerarmos as funções do tipo

$$(x, y, z, ict) \mapsto (x', y', z', ict')$$

com  $x', y', z'$  e  $ct'$  a serem obtidos de  $x, y, z$  e  $ct$  por (1), para algum parâmetro  $v$ , então estamos perante uma rotação de  $\mathfrak{R}^3 \times (i\mathfrak{R})$ , pois trata-se de uma função que preserva a forma quadrática

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \mapsto \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2.$$

Naturalmente, o facto de ter escolhido fazer com que  $c = 1$  ajudou a simplificar o aspecto das expressões obtidas por Poincaré.

Em [Poi24c, §9], Poincaré observou que as leis da Física devem ser invariantes relativamente à acção do grupo de Lorentz e é por isso que se dedicou a fazer uma busca sistemática de quantidades de  $\mathfrak{R}^4$  que se mantêm invariantes relativamente à acção do grupo de Lorentz e encontrou mais um exemplo, para além do vector que dá a posição de um evento no espaço-tempo<sup>16</sup>, de uma quantidade física que se exprime com um vector com quatro coordenadas e que se transforma, de um observador inercial para outro, da mesma maneira que as coordenadas espaço-temporais.

Note-se que, ao contrário de Lorentz, Poincaré nunca abandonou o conceito de «tempo local». Leia-se, por exemplo, o que ele escreveu em 1908 [Poi56b, §VII].

### 3 Minkowski

À primeira vista, o facto de Minkowski se ter dedicado, no fim da sua carreira, à Teoria da Relatividade parece bastante surpreendente. Afinal, a maioria dos seus trabalhos científicos publicados antes dessa inflexão eram sobre Teoria dos Números. Mas convém mencionar

<sup>16</sup>Observe-se que nem em [Poi24c] nem posteriormente Poincaré alguma vez usou a expressão «espaço-tempo».



que em 1888 ele publicara um artigo sobre Hidrodinâmica e que afirmou certa vez que possivelmente se teria tornado físico se não fosse a morte prematura de Hertz.<sup>17</sup> Quanto aos trabalhos publicados em Teoria dos Números, estes foram relativos a formas quadráticas e à Geometria dos Números, criada por ele. O estudo das formas quadráticas preparou-o para o estudo da forma quadrática (3). A Geometria dos Números não teve relevância para a Teoria da Relatividade, mas a sua criação revelou uma faceta de Minkowski que, essa sim, teve relevância: a capacidade de introduzir conceitos geométricos em áreas onde, até aí, estes pareciam não serem aplicáveis.

Minkowski deu aulas de Mecânica e de Electrodinâmica em Göttingen. Além disso, ele e Hilbert foram dois dos responsáveis por um seminário sobre partículas elementares que decorreu em Göttingen no segundo semestre do ano escolar 1904–1905, onde se estudaram artigos de Hertz, Fitzgerald, Larmor, Lorentz e Poincaré, entre outros. Após este seminário, o interesse de Minkowski em Física focou-se na escrita de um artigo sobre capilaridade para a *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*.<sup>18</sup> Mas em 1907 dirigiu um seminário, juntamente com Hilbert, sobre as equações da electrodinâmica e em Outubro desse ano escreveu a Einstein [Min93] a pedir-lhe uma separata do seu artigo [Ein72]. A partir daí dedicou-se à Electrodinâmica até à sua morte inesperada, a 12 de Janeiro de 1909. Quando esta teve lugar, Minkowski publicara somente um artigo sobre Relatividade [Min08]. Dois outros textos dele apareceram postumamente ([Min15] e [Min72]) e o seu último assistente, Max Born (1882–1970), publicou um artigo [Bor10] que pretendia ser uma reconstituição das ideias de Minkowski baseada em conversas que tinham tido entre eles e em manuscritos não publicados.

### 3.1 A influência de Hilbert

Antes de se entrar nas contribuições de Minkowski para a Teoria da Relatividade, convém recordar que Hilbert, na sua célebre palestra proferida no Congresso Internacional de Matemáticos de 1900, propusera uma lista de 23 problemas, dos quais o sexto era o seguinte:

As investigações relativas aos fundamentos da Geometria sugerem este problema: Tratar do mesmo modo, através de axiomas, os ramos das Ciências Naturais nos quais a Matemática tem um papel importante; na primeira linha estão a Teoria das Probabilidades e a Mecânica.

As contribuições de Minkowski para a Relatividade enquadram-se perfeitamente neste programa. Com efeito, em [Min08, §8], Minkowski apresenta precisamente um conjunto de três axiomas, a partir dos quais deduz as equações para a matéria em movimento num contexto relativístico, tendo o cuidado de fazer notar que cada passo do seu argumento é permitido por algum dos axiomas.

---

<sup>17</sup>Vejam-se [Bor56], [Cor99], [Rei70, cap. VI] e [Wal99a, §1] para estas e outras informações biográficas relativas a Minkowski.

<sup>18</sup>Curiosamente, capilaridade foi o tópico abordado por Einstein no primeiro artigo que publicou, em 1901 [Pai89, §4a].

### 3.2 Tempo próprio

Minkowski, seguindo Poincaré, tomou como ponto de partida das suas investigações sobre Teoria da Relatividade o estudo das transformações do espaço-tempo que preservam a forma quadrática  $q$  (ver (3)), mas encarou-o do ponto de vista da Geometria Diferencial. Mais precisamente, em [Min08, §4] Minkowski pôs ênfase na preservação do elemento de linha

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Esta definição é natural para quem está habituado a trabalhar em geometrias não-euclidianas; já em 1854 Riemann (na sua dissertação inaugural como docente da Universidade de Göttingen, que só seria publicada em 1867) observara que trabalhar em geometria euclidiana é trabalhar com o elemento de linha  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$  mas que muitos outros se podiam usar no lugar deste [Rie53, §II.1].

Em [Min08, Apêndice], Minkowski introduziu o conceito de *tempo próprio*, que representou por  $\tau$  e definiu pela relação

$$d\tau = \int \sqrt{dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$$

Posto de outro modo, se  $x, y, z$  e  $t$  dependerem de um parâmetro  $\lambda$ , então

$$\tau = \int \sqrt{\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^2\right)},$$

embora  $c$  não apareça no texto de Minkowski visto que este optou por escolher as suas unidades de modo a ter-se  $c = 1$ , tal como Poincaré antes dele.<sup>19</sup>

Do ponto de vista da Física, o tempo próprio é o tempo que vai de um evento  $E_1$  a outro evento  $E_2$  medido pelo relógio de um observador que segue uma determinada trajectória de  $E_1$  até  $E_2$ . O valor obtido depende não só dos dois eventos como também da trajectória seguida, como Minkowski observou.<sup>20</sup> De facto, o tempo próprio entre dois eventos toma o maior valor possível quando é medido por um observador que se desloca a uma velocidade uniforme e este facto não é mais do que uma maneira de enunciar o «paradoxo dos gémeos».

<sup>19</sup>Mais precisamente, não aparece *neste* texto. Em [Min72], talvez por achar que tomar  $c = 1$  pudesse tornar estas ideias mais difíceis de compreender por parte de pessoas não ligadas à Matemática ou à Física teórica, Minkowski não optou por esta convenção.

<sup>20</sup>Esta observação consta de uma conversa entre Minkowski e Arnold Sommerfeld descrita por este último nas notas de [Min72].

### 3.3 Covariância

Minkowski foi fortemente influenciado pelo artigo [Poi24c] de Poincaré e, em particular, pelas observação de que as transformadas de Lorentz formam um grupo  $G_c$  de

transformações lineares de  $\mathfrak{R}^4$  em  $\mathfrak{R}^4$  e que

1. este grupo preserva a forma quadrática (3);
2. as leis da Física devem ser invariantes relativamente à acção deste grupo.

Esta invariância tornou-se num elemento central da abordagem de Minkowski à Relatividade, pois ele pôs ênfase no uso de quantidades invariantes na formulação da teoria. O tempo próprio é uma delas: o tempo próprio de um objecto material é o mesmo calculado por todos os observadores. Outra quantidade invariante é a posição de uma partícula  $P$  no espaço-tempo: se, para um observador inercial, a sua posição é dada pelo vector  $(t, x, y, z)$  e se, para outro observador inercial, a mover-se a uma velocidade  $v$  relativamente ao primeiro ao longo do eixo dos  $xx$  deste último, a posição é  $(t', x', y', z')$ , então a relação entre os dois vectores é dada por (1) (supondo, como é habitual fazer, que para ambos os observadores o ponto  $(0,0,0,0)$  é o mesmo). Mas, seguindo a ideia lançada por Poincaré em [Poi24c] (que nem o próprio Poincaré nem mais ninguém desenvolveu antes de Minkowski), Minkowski procurou definir sistematicamente qualquer quantidade física (o momento, por exemplo) de maneira covariante, ou seja de modo que quando essa quantidade é medida por dois observadores distintos, é possível obter o valor  $v$  obtido por um a partir do valor  $v'$  obtido pelo outro por  $v = g \cdot v'$ , onde  $g$  é o elemento do grupo de Lorentz que corresponde ao movimento relativo entre os dois observadores. A influência de [Poi24c] no trabalho de Minkowski é patente no facto de aquele artigo ser citado quatro vezes em [Min08].

No entanto, Minkowski não se limitou a considerar a acção natural do grupo de Lorentz em elementos de  $\mathfrak{R}^4$ , que designou por vectores de tipo I. Também introduziu tensores anti-simétricos de ordem 2, que designou por vectores de tipo II, nos quais o grupo de Lorentz também actua. Isto marcou o início do uso de tensores em Relatividade.<sup>21</sup>

### 3.4 Geometria não-euclidiana

Outro aspecto importante do trabalho de Minkowski reside no uso de geometria não-euclidiana. De facto, Minkowski declarou numa palestra proferida em 1907 (mas publicada somente em 1915) que «o Mundo no Espaço e no Tempo é, em certo sentido, uma variedade não-euclidiana de dimensão 4» [Min15]. No entanto, Minkowski não voltou a referir-se explicitamente a este aspecto do tratamento matemático da Relatividade e Felix Klein viria a lamentar essa omissão [Kle79, vol. 2, p. 74]. Isto não impediu outros matemáticos de explorarem essa abordagem [Wal99b], ou de se aperceberem de que, implicitamente, Minkowski estava a aplicar Geometria não-euclidiana à Física.<sup>22</sup>

<sup>21</sup>Mais precisamente, o uso de tensores de ordem superior a 1.

<sup>22</sup>Por exemplo, em 1909 Paul Mansion escreveu, relativamente à palestra «Espaço e Tempo», que Minkowski «consciente ou inconscientemente aplica Geometria não-euclidiana à Física». [Man09]

### 3.5 Diagramas de Minkowski

Quando Minkowski fez a sua palestra «Espaço e tempo» no primeiro dia de trabalhos da 80ª Assembleia Alemã de Cientistas e Médicos<sup>23</sup>, viu-se perante o seguinte problema: como explicar aos presentes, muitos dos quais não eram físicos nem matemáticos, uma nova teoria do espaço e do tempo cujo tratamento matemático envolvia conceitos matemáticos (tensores, geometria não-euclidiana) muito pouco difundidos fora da Matemática? Minkowski fê-lo falando somente da alteração que a Teoria da Relatividade introduzia nos conceitos de espaço e de tempo mas sem falar recorrer a Matemática sofisticada.

Minkowski iniciou a sua palestra com palavras que ficaram famosas:

Cavalheiros! Os conceitos de espaço e tempo que gostaria de desenvolver perante vós erguem-se do solo da Física experimental. Aí reside a sua força. As suas tendências são radicais. Doravante, o espaço só por si e o tempo só por si irão mergulhar totalmente na sombra e somente uma espécie de união entre os dois continuará a ser real.

A fim de explicar o significado da Relatividade e do espaço-tempo, Minkowski teve a ideia de representar o movimento de objectos ao longo deste último através daquilo que agora se designa por *diagramas de Minkowski*, como o da figura 1.

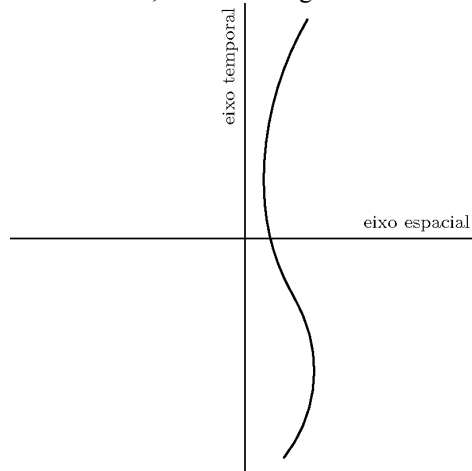


Figura 1: Diagrama de Minkowski

Minkowski também aproveitou os seus diagramas para representar, para cada observador, dois cones: o cone dos eventos futuros relativos a esse observador e o cone dos eventos passados; veja-se a figura 2. Também introduziu a distinção, agora clássica, entre vectores  $v \in \mathfrak{R}^4$  do tipo temporal e vectores do tipo espacial: se  $v = (t, x, y, z)$ , então

---

<sup>23</sup>Einstein pensou em estar presente [Ein93], mas acabou por não ir.

diz-se que  $v$  é um vector de tipo temporal (respectivamente espacial) caso  $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 > 0$  (resp.  $< 0$ ).

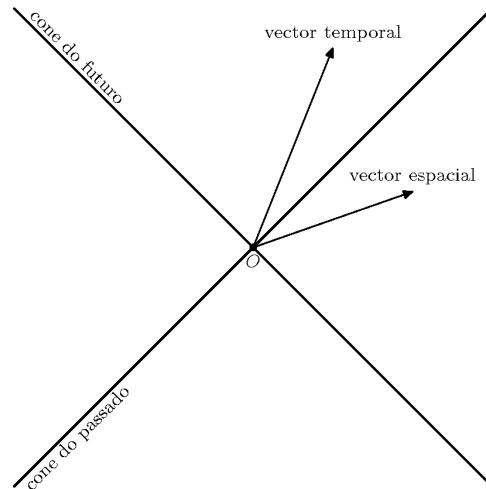


Figura 2: Cone do passado e cone do futuro

Minkowski observou que se um evento se situa no cone dos eventos futuros (relativamente passados) de  $O$ , então, para qualquer observador, esse evento tem lugar depois (resp. antes) de  $O$ . Em contrapartida, se um evento está fora dos dois cones então ter lugar antes, depois ou ao mesmo tempo que  $O$  depende do observador.

A difusão da palestra de Minkowski foi extraordinariamente rápida. No fim de 1909 já tinha sido publicada em três revistas distintas, bem como num opúsculo autónomo. Também já tinha sido traduzida para francês e para italiano [Wal99a, §3].

#### 4 Reacções

Nem Poincaré nem Einstein se mostraram interessados pela abordagem de Minkowski à Relatividade. Poincaré foi da opinião de que fundir o espaço e o tempo numa só entidade era uma convenção que podia até ser cómoda, mas que não passava disso [Poi24b].

Einstein começou por considerar a contribuição de Minkowski para a Teoria da Relatividade uma «erudição supérflua» [Pai89, §7c] e escreveu dois artigos ([EL08a] e [EL08b]), juntamente com outro ex-aluno de Minkowski, Jakob Laub (1884–1962), destinados a explicar aos físicos como é que os resultados de [Min08] podiam ser obtidos recorrendo a matemática bastante mais elementar. Mas viria a escrever em 1916 que «[a] generalização da Teoria da Relatividade foi consideravelmente facilitada por Minkowski, um matemático que foi o primeiro a aperceber-se da equivalência formal entre as coordenadas espaciais e a coordenada temporal e que empregou isto na construção da teoria» [Ein97]<sup>24</sup> e que, sem ela, «a Teoria Geral da Relatividade [...] talvez não tivesse passado da infância» [Ein95, cap. 17].

<sup>24</sup>A tradução deste artigo contida em [LEMW72] não contém esta passagem.

Os matemáticos de Göttingen foram particularmente receptivos à abordagem de Minkowski. Einstein tinha-se instalado em Berlim em 1914, como director do Instituto Kaiser Wilhelm, mas sentia-se bastante isolado aí. No entanto, após ter feito uma série de palestras sobre gravitação em Göttingen, no Verão de 1915, escreveu a Arnold Sommerfeld:

Em Göttingen tive o grande prazer de ver tudo compreendido, até aos menores detalhes. Estou muito entusiasmado em relação a Hilbert. Um homem importante. Tenho grande curiosidade quanto à opinião dele. [Ein98]

Nesta altura, já David Hilbert dedicava todo o seu esforço de pesquisa à Física e, em 1915, esteve perto de formular as equações da Relatividade Geral antes de Einstein. Anos mais tarde, Hermann Weyl (cuja primeira edição do livro sobre Relatividade [Wey18] foi publicada em 1918) diria, a respeito desta época, que a Teoria da Relatividade era vista como revolucionária pelos físicos mas que as suas ideias básicas se conjugavam bem com as dos matemáticos de então [Wey49]. Isto é visível no facto de, por exemplo, os últimos trabalhos científicos de Felix Klein, publicados em 1918, serem sobre esta área da Física. Aliás, o seu último trabalho [Kle73b] continha a primeira demonstração da relação  $E = mc^2$  válida para qualquer sistema fechado que evolui ao longo do tempo.

Como deve ser claro do que foi visto atrás, a descrição feita por Einstein da contribuição de Minkowski para a Relatividade é injusta relativamente a Poincaré. É possível que Einstein se tenha apercebido disto mais tarde, pois em 1953, dois anos antes de morrer, escreveu o seguinte às pessoas que estavam a organizar a conferência comemorativa dos 50 anos da Teoria da Relatividade: «Espero que nessa ocasião também haja a oportunidade de honrar adequadamente os méritos de H. A. Lorentz e de H. Poincaré» [Pai89, cap. 8]. Pelo menos um dos participantes, Max Born, fez precisamente isso, pois declarou nessa ocasião:

[A] Teoria da Relatividade restrita não foi, afinal, uma descoberta de um só homem. A contribuição de Einstein foi a pedra angular de um arco que Lorentz, Poincaré e outros construíram e que viria a suportar a estrutura erigida por Minkowski. [Bor56]

### **Bibliografia**

- [BB88] G. Birkhoff and M. K. Bennet. Felix Klein and his “Erlanger Programm”. In W. Aspray and P. Kitcher (eds.): *History and Philosophy of Modern Mathematics*, volume XI of *Minnesota Studies in the Philosophy of Science*, pp. 145–176. University of Minnesota Press, 1988.
- [Bor10] M. Born. Eine ableitung der grundgleichungen für die elektromagnetischen vorgänge in bewegten körpern vom standpunkte der elektronentheorie. aus dem nachlaß von hermann minkowski bearbeitet von max born in göttingen. *Math. Ann.*, 68(4):526–551, 1910.
- [Bor56] M. Born. Physics and Relativity. In A. Mercer and M. Kervaire, editors, *Jubilee of Relativity Theory*, pp. 244–260. Birkhäuser, 1956.

- [Bru67] S.G. Brush. Note on the history of the Fitzgerald-Lorentz contraction. *Isis*, 58(2):230–232, 1967.
- [BS91] W. Burau and B. Schoeneberg. Klein, Christian Felix. In *Biographical dictionary of mathematicians*, pp. 1256–1259. Charles Scribner’s Sons, 1991.
- [Cor99] L. Corry. Hilbert and physics (1900–1915). In Gray [Gra99], pp. 145–188.
- [Dar04] O. Darrigol. The mystery of the Einstein-Poincaré connection. *Isis*, 95(4):614–626, 2004.
- [Ein56] A. Einstein. *Lettres à Maurice Solovine*. Gauthier-Villars, 1956.
- [Ein72] A. Einstein. Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento. In *O Princípio da Relatividade* [LEMW72], págs. 47–86.
- [Ein93] A. Einstein. Carta a Johannes Stark. In Klein, M. J. et al. [KKS93], pp. 104–105. Doc. 88.
- [Ein95] A. Einstein. *Relativity: The Special and the General Theory*. Three Rivers Press, 1995.
- [Ein97] A. Einstein. The foundation of the General Theory of Relativity. In *The Berlin Years: Writings, 1914–1917*, volume 6 of *Collected Papers of Albert Einstein*, pp. 146–200. Princeton University Press and Hebrew University of Jerusalem, 1997.
- [Ein98] A. Einstein. Carta a Arnold Sommerfeld. In Robert Schulmann, A. J. Kox, M. Janssen, et al., editors, *The Berlin Years: Correspondence, 1914–1918*, volume 8 of *Collected Papers of Albert Einstein*, p. 147. Princeton University Press and Hebrew University of Jerusalem, 1998. Doc. 96.
- [EL08a] A. Einstein and J. Laub. Über die elektromagnetischen grundgleichungen für bewegte körpern. *Ann. Phys.*, 26:532–540, 1908. [= [SCKR89, Doc. 51]].
- [EL08b] A. Einstein and J. Laub. Über die in elektromagnetischen felde auf ruhende körper ausgetibten ponderomotorischen kräfte. *Ann. Phys.*, 26:541–550, 1908. [= [SCKR89, Doc. 52]].
- [Gra99] J. Gray (ed.): *The symbolic universe*. Oxford University Press, 1999.
- [Haw84] T. Hawkins. The Erlanger Programm of Felix Klein: Reflections on its place in the history of mathematics. *Historia Mathematica*, 11(4):442–470, 1984.
- [Hol60] G. Holton. On the origins of the special theory of relativity. *American Journal of Physics*, 28(7):627–636, 1960.
- [KKS93] M.J. Klein, A.J. Kox, and R. Schulmann (eds.): *The Swiss Years: Correspondence, 1902–1914*, volume 5 of *Collected Papers of Albert Einstein*. Princeton University Press and Hebrew University of Jerusalem, 1993.
- [Kle73a] F. Klein. *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Bd. I. Springer-Verlag, 1973.
- [Kle73b] F. Klein. Über die integralform der erhaltungssätze und die theorie der räumlich geschlossenen Welt. In: *Gesammelte mathematische Abhandlungen* [Kle73a], S. 586–612.
- [Kle73c] F. Klein. Vergleichende betrachtungen über neuere geometrische forschungen. In: *Gesammelte mathematische Abhandlungen* [Kle73a], S. 460–497.
- [Kle79] F. Klein. *Vorlesungen über die entwicklung der mathematik im 19. jahrhundert*, Bd. 24 d. Reihe *Grundlehren der mathematischen wissenschaften*. Springer-Verlag, 1979.

- [Lar97] J. Larmor. A dynamical theory of the electric and luminiferous medium — Part III: Relations with material media. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 190:205–300, 1897.
- [Lau11] M. von Laue. *Das Relativitätsprinzip*. Vieweg, 1911.
- [LEMW72] H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, e H. Weyl. *O Princípio da Relatividade*, volume I de *Textos Fundamentais da Física Moderna*. Fundação Calouste Gulbenkian, 1972.
- [Lor92] H. A. Lorentz. La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants. *Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles*, 25:363–552, 1892.
- [Lor95] H. A. Lorentz. *Versuch einer theorie der electrischen und optischen erscheinungen bewegten körpern*. Brill, 1895.
- [Lor09] H.A. Lorentz. *The theory of electrons*. Brill, 1909.
- [Lor56] H. A. Lorentz. Deux mémoires de Henri Poincaré sur la physique mathématique. Dans *Œuvres de Henri Poincaré* [Poi56a], p. 683–695.
- [Lor72] H. A. Lorentz. Fenómenos electromagnéticos num sistema que se move com qualquer velocidade inferior à da luz. In *O Princípio da Relatividade* [LEMW72], págs. 13–43.
- [Mac86] M.N. Macrossan. A note on relativity before Einstein. *The British Journal for the Philosophy of Science*, 37(2):232–234, 1986.
- [Man09] P. Mansion. ‘Raum und Zeit’ par H. Minkowski. *Mathesis*, 29, 1909.
- [McC70] R. McCormach. H. A. Lorentz and the electromagnetic view of nature. *Isis*, 61(4):459–497, 1970.
- [Mil73] A.I. Miller. A study of Henri Poincaré’s “Sur la dynamique de l’électron”. *Arch. Hist. Exact Sci.*, 10(3–5):207–328, 1973.
- [Mil97] A.I. Miller. *Albert Einstein’s Special Theory of Relativity: Emergence (1905) and early interpretation (1905–1911)*. Springer-Verlag, 1997.
- [Min08] H. Minkowski. Die grundgleichungen für die elektromagnetischen vorgänge in bewegten körpern. *Gött. Nach.*, pp. 53–111, 1908.
- [Min15] H. Minkowski. Das relativitätsprinzip. *Ann. Phys.*, 47:927–938, 1915.
- [Min72] H. Minkowski. Espaço e tempo. In *O Princípio da Relatividade* [LEMW72], pp. 93–114.
- [Min93] H. Minkowski. Carta a Albert Einstein. In: Klein, M. J. et al. [KKS93], p. 77. Doc. 62.
- [MM87] A.A. Michelson and E.W. Morley. On the relative motion of the Earth and the luminiferous ether. *American Journal of Science*, 34:333–345, 1887.
- [Pai89] A. Pais. *Subtil é o Senhor: Vida e pensamento de Albert Einstein*. Gradiva, 1989.
- [Poi24a] H. Poincaré. *La Mécanique nouvelle: Conférence, mémoire et note sur la Théorie de la Relativité*. Gauthier-Villars, 1924.
- [Poi24b] H. Poincaré. L’espace et le temps. Dans *Dernières pensées*, p. 35–54. Flammarion, 1924.
- [Poi24c] H. Poincaré. Sur la dynamique de l’électron. Dans *La Mécanique nouvelle: Conférence, mémoire et note sur la Théorie de la Relativité* [Poi24a], p. 18–76.



- [Poi24d] H. Poincaré. Sur la dynamique de l'électron. Dans *La Mécanique nouvelle: Conférence, mémoire et note sur la Théorie de la Relativité* [Poi24a], p. 77–81.
- [Poi56a] H. Poincaré. *Œuvres de Henri Poincaré*, t. XI. Gauthier-Villars, 1956.
- [Poi56b] H. Poincaré. La dynamique de l'électron. Dans *Œuvres de Henri Poincaré* [Poi56a], p. 551–586.
- [Poi56c] H. Poincaré. A propos de la théorie de M. Larmor. Dans *Œuvres de Henri Poincaré*, volume IX, p. 369–426. Gauthier-Villars, 1956.
- [Poi68] H. Poincaré. *La Science et l'hypothèse*. Flammarion, 1968.
- [Pye77] L. Pyenson. Hermann Minkowski and Einstein's special theory of relativity. *Arch. Hist. Exact Sci.*, 17:71–95, 1977.
- [Rei70] C. Reid. *Hilbert*. Springer-Verlag, 1970.
- [Rie53] B. Riemann. Ueber die hypothesen, welche der geometrie zu grunde liegen. In: H. Weber (Hrsg.) *Gesammelte Mathematische Werke*, S. 272–287. Dover, Zweite Aufl., 1953.
- [Row99] D. Rowe. The Göttingen response to general relativity and Noether's theorems. In Gray, J. [Gra99], pp. 189–233.
- [SCKR89] J. Stachel, D.C. Cassidy, A.J. Kox, and J. Renn (eds.): *The Swiss Years: Writings, 1900–1909*, vol. 2 of *Collected Papers of Albert Einstein*. Princeton University Press and Hebrew University of Jerusalem, 1989.
- [Wal99a] S. Walter. Minkowski, mathematicians, and the mathematical theory of relativity. In H. Goenner, J. Renn, J. Ritter, and T. Sauer (eds.): *The expanding worlds of General Relativity*, volume 7 of *Einstein Studies*, pp. 45–86. Birkhäuser, 1999.
- [Wal99b] S. Walter. The non-euclidean style of minkowskian relativity. In Gray, J. [Gra99], pp. 91–127.
- [Wey18] H. Weyl. *Raum-Zeit-Materie*. Julius Springer, 1918.
- [Wey49] H. Weyl. Relativity theory as a stimulus in mathematical research. *Proc. Amer. Philos. Soc.*, 93:535–541, 1949.

**José Carlos Santos**

Departamento de Matemática Pura  
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

**E-mail:** jcsantos@fc.up.pt