Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 9 nº 18 (outubro/2009-março/2010) - pág.195-217
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

Das historisches Bild von Lazare Carnot (1753-1823): ungelöste Fragen

Fernando Raul Neto[1]
Universidade Federal de Pernambuco - Brasil

(aceito para publicação em dezembro de 2008)

Resumo

O presente artigo trata da obra do matemático e político francês Lazare Carnot (1753-1823), particularmente do „Géométrie de position” (1803), tido como a sua obra maior. O objetivo do artigo é mostrar como a geometria de Carnot é apresentada e discutida na literatura secundária do século XX. Verifica-se que dessa leitura surge uma imagem desfocada de Carnot e de sua obra, fruto de avaliações nitidamente antagônicas. Carnot seria assim, por um lado, um intransigente adversário da análise matemática, chegando mesmo a ser denominado de "adversário dos números negativos", e, pelo outro, o impulsionador de idéias matemáticas que apenas bem depois seriam desenvolvidas. O artigo conclui com uma série de questões que, embora sugeridas pela literatura secundária, não tem sido ainda devidamente respondidas.

Palavras-chave: Lazare Carnot. Géométrie de position. Número negativo

Zusammenfassung

Der vorliegende Aufsatz befasst sich mit dem mathematischen Werk des französischen Politikers Lazare Carnot (1753-1823), insbesondere mit seinem Hauptwerk, der "Géométrie de position" (1803). Das hier verfolgte Ziel ist, zu zeigen, wie im XX. Jahrhundert seine Geometrie in der Sekundärliteratur dargestellt und diskutiert wird. Man zeigt, dass bei diesen Darstellungen aufgrund antagonistischer Interpretationen ein unscharfes Bild von Carnot entsteht. Einerseits wird Carnot als ein intransigenter Gegner der mathematischen Analysis, sogar als „Gegner der negativen Zahlen“ genannt, und anderseits als der Antreiber wichtiger, mathematischer Ideen, die später von anderen weiterverfolgt wurden.

[1] Ich möchte mich bei der *Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes, Brasilien)* für das Stipendium und bei der *Universidade Federal de Pernambuco (Ufpe, Brasilien)* für die Genehmigung bedanken, die mein Forschungsprojekt in der Zeit von Okt. 2007 bis Sept. 2008 in Deutschland ermöglicht haben. Insbesondere möchte ich mich bei den Herren Professoren Wolfgang Carl, Michael Wolf, Michael Otte und Gert Schubring für die wissenschaftliche Unterstützung bedanken. Ich möchte mich auch bei Herrn Ralf Kaufeld für die sorgfältige Durchsicht des Originals bedanken. Dieser Aufsatz ist eine überbearbeitete Version eines Kapitels meiner Dissertation *Géométrie de position. Eine Studie zum Werk von Lazare Carnot (1753-1823)*, IDM-Universität Bielefeld.

Der Aufsatz schließt mit einer Reihe von der Sekundärliteratur suggerierter Fragen, die aber ungelöste bleiben.

Schlüsselwörter: Lazare Carnot. Géométrie de position. Negative Zahl.

Einleitung

Carnot ist einer der am häufigsten zitierten Mathematiker bei den Historikern, die sich mit der Mathematik des letzten Viertels des 18. Jahrhunderts und des ersten Quartals des 19. Jahrhunderts befasst haben. Man findet seinen Namen in der Geschichte der Mechanik, der Kinematik, des Infinitesimalkalküls, der Arithmetik und der Geometrie. Man erinnert sich vor allem an seine Beiträge zu den ersten Entwicklungen der modernen, projektiven Geometrie, zu den Grundlagen des Infinitesimalkalküls und zu der Entwicklung des Zahlbegriffs. Zuweilen wird er auch in der Geschichte der imaginären Zahlen, der nicht-euklidischen Geometrie, der Topologie, der analytischen Geometrie und des Vektorkalküls erwähnt.

Was an diesen historischen Darstellungen von Carnots Beiträgen zur Wissenschaft in erster Linie die Aufmerksamkeit erregt, sind einerseits die Breite und Wichtigkeit seiner wissenschaftlichen Themen und andererseits die Feststellung, dass Carnot in keinem dieser Bereiche etwas *Endgültiges* formuliert hat. Wir sprechen nicht von einem historischen Veralten seiner Begriffe, Theorien oder Ergebnisse, in dem Sinne, dass sie heute als ungebräuchlich erscheinen oder dass sie von vollkommeneren Theorien verdrängt worden sind, noch davon, dass er - in der Art wie er selbst seine mathematischen Ideen formuliert hat - keine Schule bei den Mathematikern entwickelt hat. Wir wollen aber doch betonen, dass Carnots Beiträge zur Wissenschaft, insbesondere der Mathematik, nicht allein durch seine konkreten und effektiven mathematischen Leistungen Gewicht haben, sondern hauptsächlich durch die mathematisch-philosophischen Gedanken, die in seinen Schriften den mathematischen Text begleiten. Der Einfluss Carnots hat sich also nicht nur durch den wissenschaftlichen Inhalt seiner Texte ausgewirkt, sondern auch durch die methodologischen Reflexionen, die alle diese Texte begleitet haben. Solche methodisch-philosophischen Überlegungen findet man hauptsächlich in seinen Texten zum Kalkül und zur Geometrie.[2]

Wir wollen uns in diesem Aufsatz mit der mathematischen Sekundärliteratur über Carnot beschäftigen, insbesondere mit der, die seine geometrische Leistung hervorhebt. Wie wir gleich sehen, handelt es sich nicht nur um den Forschungsstand zur Geometrie Carnots, sondern darum, dass diese in einigen Thesen über die Mathematik Carnots zusammengefasst werden kann, die untereinander widersprüchlich sind. Das Lesen dieser Texte über Carnot, soweit sie ein zweideutiges, ungenaues und kontradiktorisches Bild von ihm geben, verweist uns andererseits auf einige Fragen und heuristische Elemente darin.

[2] Diese Texte sind: Dissertation sur la théorie de l'infini mathématique, ouvrage destiné à concourir au prix qu'a proposé l'Academie royale des sciences, arts et belles-lettres de Berlin, pour l'année 1786. Arras, le 8 de septembre 1785 (1785), Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal (1797), Lettre du citoyen Carnot au citoyen Bossut contenant quelques vues nouvelles sur la trigonométrie (1800), De la corrélation des Figures de Géométrie (1801), Géométrie de position (1803) und Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace; suivi d'un essai sur la théorie des transversales (1806).

Daher teilen wir die Verfasser, mit denen wir uns jetzt näher beschäftigen, mehr oder weniger nach den auffallenden Merkmalen ein, die sie Carnot in ihren Interpretationen geben.

Von den wissenschaftlichen Texten ist die „Géométrie de position“[3] das wichtigste und bekannteste Werk Carnots, da es die Ideen und Ergebnisse der anderen zusammenfasst. Die GP behandelt das Negative in seiner Anwendung in der Geometrie als Hauptthema. Der Text wird durch eine *Dissertation préliminaire* angekündigt, in welcher Carnot die übliche Metaphysik des Negativen kritisiert und seine später im Buch selbst weiter entwickelten eigenen Überlegungen über das Negative in der Geometrie ankündigt.

Carnot als Gegner der Analyse und des Negativen

Fast durchweg wird Carnot in der Sekundärliteratur als Gegner der Analyse und des Negativen gesehen. Insbesondere in den umfassenden Texten zur Geschichte der Mathematik, welche folglich die verschiedenen Teile der Mathematik knapp und zusammenfassend behandeln, trifft man oft diese Verbindung zwischen Carnot und einer bestimmten Feindseligkeit gegen den Gebrauch der algebraischen Analyse und insbesondere des Negativen. Aber auch die Verfasser, die sich eingehend mit Carnots Mathematik beschäftigt haben, können nicht widerstehen, diese Einschätzung Carnots in Erinnerung zu bringen. Es ist unzweifelhaft, dass im XX. Jahrhundert die Hauptquelle aller derartigen Beurteilungen Carnots das Buch „Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert“ (1926) von Felix Klein war. Dieser hat in seiner Beschreibung der neuen Geometrie, die durch die Gründung der „École Polytechnique“ in Paris entstanden war, Carnots GP einige Paragraphen gewidmet, aus denen sich ein Bild von Carnot ergibt, das sich in vielen Büchern wiederholt. Für Klein ist Carnots GP

> ein sehr merkwürdiges Buch. Sie enthält einen an sich bedeutenden, ganz modernen Gedanken: man müsse in der Geometrie die verschiedenen Fälle, welche eine Figur je nach Anordnung ihrer Teile darbieten kann, nicht trennen, wie es seit Euklid immer geschah, sondern sie durch Einführung des Prinzips der Vorzeichen unter eine gemeinsame Betrachtung stellen. In dieser Form spricht aber Carnot den Gedanken nicht etwa aus. Im Gegenteil: er wehrt sich hartnäckig gegen die ganze in der Analysis übliche Lehre von den Vorzeichen, die er für schlecht begründet und widerspruchsvoll erklärt. Diese Behauptung glaubt er zu beweisen, indem er fortwährend rein formalistisch mit mehrdeutigen Funktionen herumrechnet, um dann schließlich zu „falschen“ Resultaten zu kommen, wie etwa $\sqrt{-a}\ .\ \sqrt{-a} = \sqrt{a^2} = a$ usw. Für sein geometrisches Bedürfnis will er die Zeichenregel lediglich durch Betrachtung der Figur und ihrer Änderungen selbst entstehen lassen, und auf diesem Grunde eine „théorie des figures corrélatives“ schaffen. So soll die Geometrie von der „Hieroglyphenschrift der Analysis“ befreit werden und wieder in rein synthetischer Form neu entstehen. Die Durchführung dieser Gedanken ist zuweilen ideenreich, vielfach aber elementar bis zur Trivialität. Vielleicht kann man das Buch auffassen als ein Gegenbild zu Carnots unbestechlicher, aber nicht genialer Persönlichkeit. (Klein 1926, S. 79-80)

[3] Von nun an als „GP“ abgekürzt.

In der Tat möchte Carnot die übliche Zeichenregel, wie sie sich aus der Einteilung des Raumes in (Koordinaten)-Richtungen ergibt, durch eine raumunabhängige auf die einzelnen Figuren und deren Relationen und Veränderungen bezogene Interpretation ersetzen, was nicht prinzipiell mit einer Feindseligkeit gegen die Analysis zu verbinden ist. Klein setzt seine Darstellung der Geschichte der projektiven Geometrie fort und stellt nun Monge und Carnot als die unmittelbaren Vorläufer von J.-V. Poncelet (1788-1867) dar, der die Prinzipien der projektiven Geometrie wirklich entdeckt und entwickelt hat.

> War in Carnot schon eine unklare Ahnung vorhanden, in welcher Richtung die Entwicklung der neuen Geometrie zu suchen sei, so tritt uns nun in Poncelet ihr großer Schöpfer entgegen, der die Ideen Monges und Carnots mit größter Genialität aufnimmt und ihnen unter Überwindung aller Schwierigkeiten zum Durchbruch verhilft. (Klein 1926, S. 80)

Das projektive Denken - die neue Art geometrischer Anschauung -, ist laut Klein der wesentliche Beitrag von Poncelet, der über die Zentralprojektion und die Lehre von Pol und Polare bei den Kurven und Flächen zweiten Grades in die Geometrie eingeführt wurde. Zu diesen beiden neuen Ideenbildungen tritt nun, laut Klein, von allen Unklarheiten befreit, der Carnotsche Gedanke von der *Correlativität der Figuren*, *das Prinzip der Kontinuität*. Trotz der richtigen und wichtigen Annäherung zwischen Carnots und Poncelets Gedanken schließt Klein, dass Carnot nur durch seine behauptete Feindseligkeit gegen die Analyse in die Geschichte der Mathematik eingegangen ist.

> Von geschichtlicher Bedeutung ist das Carnotsche Buch durch seine Ablehnung der Analysis. Hier ist die Quelle für den nun bald hervortretenden Gegensatz zwischen analytischer und synthetischer neuerer Geometrie, der sich schließlich zu einer Gegnerschaft von prinzipieller Bedeutung auswächst. (Klein 1926, S. 80)

Obwohl Klein Carnot eine Rolle in der Entstehung der projektiven Geometrie zugewiesen hat, wird Carnot also schließlich durch seine „Ablehnung der Analysis“ und durch das Streben, dass die Geometrie von der „Hieroglyphenschrift der Analysis befreit werden“ soll, charakterisiert. Dass Carnot als Gegner des Negativen und der Analysis überhaupt *bekannt* ist, scheint außer Zweifel zu sein, und die Darstellung von Klein hat selbst viel dazu beigetragen, diese Idee zu verbreiten. Seine oben dargestellte Charakterisierung wird in vielen Büchern der Mathematikgeschichte wiederholt. Tatsächlich hat Carnot in keiner seiner Publikationen über die „Befreiung der Geometrie von der Hieroglyphenschrift der Analysis“ geschrieben, was Klein auch nicht behauptet hat, obwohl er ihn dahingehend interpretiert. An verschiedenen Stellen seiner Werke hat Carnot das Wort *hiéroglyphe* in Zusammenhang mit seiner Erklärung der Rolle und der Gegenstände der Analysis benutzt, aber doch an keiner Stelle den Standpunkt vertreten, dass die Geometrie oder irgendeine andere mathematische Disziplin von diesen *hiéroglyphes* befreit werden sollte. Man findet aber diese Aussage in der weiteren Literatur so wiedergegeben, als stamme sie von Carnot. Bell schreibt zum Beispiel:

> Lazare Nicolas Margueritte Carnot hatte sein umstürzlerisches, wenn auch etwas reaktionäres Programm mit den Worten umrissen, er wolle „die Geometrie von den Hieroglyphen der Analysis befreien“. (Bell 1967, S. 209).

Morris Kline wiederholt im Abschnitt „The Revival of Projective Geometry“ seines dreibändigen Buches „Mathematical thought from ancient to the modern times” die Beurteilung Kleins:

> Other mathematicians attacked analytic methods in harsher language. Carnot wished “to free geometry from the hieroglyphics of analysis”. (Kline 1972, S. 835)

Und weiter betont er noch die Charakterisierung Carnots als synthetischen Geometer und Gegner des Negativen.

> The revival of projective geometry was initiated by Lazare N. M. Carnot (1753-1823), a pupil of Monge and father of the distinguished physicist Sadi Carnot. His major work was *Géométrie de position* (1803) and he also contributed the *Essai sur la théorie des transversales* (1806). Monge had espoused the joint use of analysis and pure geometry, but Carnot refused to use analytic methods and started the championship of pure geometry. Many of the ideas we shall shortly discuss more fully are at least suggested in Carnots work. Thus the principle that Monge called contingent relations and which became known also as the principle of correlativity and more commonly as the principle of continuity is to be found there. To avoid separate figures for various sizes of angles and directions of lines Carnot did not use negative numbers, which he regarded as contradictory, but introduced a complicated scheme called “correspondence des signes”. (Kline 1972, S. 841)

Kline trifft jedoch einen wesentlichen Punkt, und zwar die Erkenntnis, dass die GP mindestens als Quelle verschiedener mathematischer Ideen gesehen werden muss. Weiter im Abschnitt „Algebra in the Eighteenth Century“ vereinfacht Kline in so großem Maße den Text der GP, dass er Carnot sogar beurteilt, als hätte dieser die Negativen nicht wirklich verstanden.

> Certainly negative numbers were not really well understood until modern times [...] Carnot, the noted French Geometer, thought the use of negative numbers led to erroneous conclusions. (Kline 1972, S. 593)

Man könnte hier mehrere dieser Beispiele anführen. Auch in Wörterbüchern kommen ähnliche Aussagen vor. So schreiben Naas und Schmid im ersten Band des *Mathematischen Wörterbuches* zum Stichwort *Carnot*:

> Er mißtraut der Analysis und bereichert die elementare und projektive Geometrie um Methoden (Entwicklung umfassender Sätze aus Spezialfällen durch stetige Veränderung) und zahlreiche Einzelsätze. (Naas / Schmid 1967, Band I, S. 241)

Diese Beurteilungen Carnots in der Art von Felix Klein verbreiten sich in der Historiographie der Mathematik. Indem die Geometrie im 19. Jahrhundert sich tatsächlich in eine synthetische und eine analytische Richtung gespalten hat, und beides zu einer Gegnerschaft von prinzipieller Bedeutung gewachsen ist, weiten manche Verfasser die Darstellung Kleins aus, sogar um einen stilistischen Anfangspunkt ihrer Darstellung der zwei Strömungen in der Geometrie zu haben. Etwas Ähnliches scheint jedenfalls Marcel Guillaume in seinem Text über die Entstehung der axiomatischen Methode im neunzehnten

Jahrhundert zu dem Streit zwischen den Anhängern der analytischen und denen der synthetischen Methode gemeint zu haben. Er beginnt mit Carnot:

> Lazare Carnot (1753-1823), „der Organisator des Sieges“, hatte 1803 in seiner *Géométrie de position* […] das Problem einer Behandlung der von den „Hieroglyphen der Analysis“ befreiten Geometrie aufgeworfen. Zu diesem Zweck entwickelte er eine „Theorie der korrelativen Figuren“, mit deren Hilfe es gelingen sollte, für verschiedene spezielle Figuren eine gemeinsame Struktur zu finden, als deren „Spezialfälle“ sie anzusehen seien. (Dieudonnè 1978, S. 756)

Trotzdem kommt Guillaume einige Seiten später zu der Darstellung eines wichtigen Moments des mathematischen Denkens in Richtung einer über das kritisierbare Axiomensystem Euklids hinausgehenden Axiomatisierung der Geometrie, die sich sehr passend zu der Carnotschen Geometrie verhält, wie er selbst ganz nebenbei bemerkt:

> Die Übertragung einer vorher für eine einfache Figur bewiesene Eigenschaft auf eine kompliziertere Figur unter Zuhilfenahme einer passenden Transformation ihrer Elemente, wie sie schon Desargues verwendete, geht notwendigerweise von einfacheren Eigenschaften, die erhalten bleiben, zu komplizierteren invarianten Eigenschaften über. Dadurch gelangt man zu einer neuen, stärker analytischen Art des Verständnisses der Aussagen, die sich an die Methode der Logiker anlehnt. Das heißt aber auch - und dies fing schon mit den Versuchen zur Rationalisierung jenes Vorgehens an, wie sie seit Anfang des neunzehnten Jahrhunderts unternommen wurden (beispielweise in L. Carnots *Théorie des figures correlatives*) -, dass man mit „Eigenschaften“ und mit „Relationen der gegenseitigen Abhängigkeit“ zu operieren begann, d. h. mit Dingen, die weder Zahlen noch Figuren sind, und zwar in derselben Weise wie mit den Objekten, die damals als für die Mathematik spezifisch angesehen wurden. Die Einteilung der Eigenschaften in projektive und metrische bildete dabei ein auslösendes Moment für die mathematische Behandlung des Begriffs „Eigenschaft“. (Dieudonnè 1978, S. 759)

Neben der globalen Charakterisierung Carnots als Verteidiger einer von der Hieroglyphenschriften der Analysis befreiten Geometrie, gibt es eine andere, die ihn unmittelbar als *Gegner des Negativen* sieht. In der Tat findet man in der *Dissertation préliminaire* der GP einige Stellen, die getrennt von dem gesamten Aufbau des Werkes gelesen, zu dieser Charakterisierung beitragen können. Die Verfasser, die die Carnotsche Kritik als einen Beitrag zur Arithmetik sehen, sind die, die ihn dadurch bereitwilliger, mit verschiedenen Ausdrücken, entweder unmittelbar oder stillschweigend, als *Gegner des Negativen* beurteilen. Dies ist der Fall bei Glaeser, der in seinem Aufsatz „Epistemologie des nombres relatifs“ (1981), sich in die Zeichenregel der Arithmetik vertiefend, die 1500 jährige Geschichte der epistemologischen Schwierigkeiten des Begriffs der negativen Zahl untersucht. In den sechs *epistemologique obstacles*, die er der Terminologie von Bachelard folgend auflistet, ist es symptomatisch, dass Carnot, wie Glaeser meint, nur das erste überschritten hatte, und zwar das Unvermögen mit isolierten negativen Quantitäten umzugehen. (Glaeser 1981, S. 308) Auf diese Weise hatte Carnot Schwierigkeiten isolierten negativen Quantitäten einen Sinn zu geben. (Glaeser 1981, S. 308) Schon in Descartes Geometrie findet man die Ablehnung der isolierten negativen Größen, d.h. das

Minuszeichen wird als Operationszeichen aufgefasst. Carnot scheint diese Auffassung dadurch erweitern zu wollen, dass er das System geometrischer Transformationen betrachtet. Glaeser aber scheint am Ende anzuerkennen, dass es hinter dem Carnotschen Beitrag mehr Absichten als epistemologische Schwierigkeiten geben könnte. Auch wenn für ihn bei Carnot die Vorstellung negativer Zahlen unverständlich zu sein schien, so war Lazare Carnot doch einer der Handwerker des, wie er schreibt, Enderfolgs.

Für Glaeser erscheint Carnot als jemand, dessen Verständnisprobleme zu den Grundlagen der Mathematik aufgrund seiner hervorragenden Stellung eine Erweiterung dieser Grundlagen „provoziert" hat, an welcher Carnot selbst nicht aktiv gestaltend teilgenommen hat. Er schreibt:

> Seine géométrie de position (Carnot 1803) genoss lange Zeit ein sehr großes Ansehen, das man sich heutzutage nur schlecht erklären kann. Die Beiträge des Werkes sind ziemlich schwach. Carnots Lehrsätze sind nicht viel mehr als Aufgaben, die mit Hilfe veralteter Methoden gelöst wurden. Das Verdienst des Buches besteht in seinem andauernden *Verlangen nach Klarheit*. Der Autor verstrickt sich systematisch in die Widersprüchlichkeiten vorgefasster Begriffe und bekundet unablässig: „Ich verstehe nicht! Ich verstehe nicht!" […] Alles in allem hat Carnot einen entscheidenden Beitrag zum Fortschritt der Mathematik geleistet, ohne zwar, was die relativen Zahlen anbelangt, endgültige Antworten auf die aufgeworfenen Fragen anbieten zu können, wohl aber indem er sie in *provokativer* Weise gestellt hat. Unter dem Einfluss dieser drängenden Fragestellungen werden Leute wie Möbius und Chasles bald die „géométrie orientée" ausarbeiten. (Glaeser 1981, S. 325/327)

Andere Kommentatoren versuchen die Frage des Negativen bei Carnot direkt mit seiner Geometrie in Verbindung zu bringen, obwohl manche im Hintergrund noch die Geschichte der Ablehnung erinnern. Guérindon und Dieudonnè, beispielsweise, verweisen auf Carnot in ihrer „Geschichte der Algebra und Geometrie bis zum Jahre 1840". Sie beginnen ihre Darstellung der Entwicklung der komplexen, projektiven Geometrie mit der Betonung der Wichtigkeit der Frage des Negativen in der Geometrie als Mittel, die Allgemeinheiten der analytischen Geometrie in die synthetische Geometrie zu bringen.

> Eine erste Richtung, die bei diesen Untersuchungen eingeschlagen wurde, bestand darin, den klassischen euklidischen Größen, Längen und Winkeln, *Vorzeichen* beizulegen und auf diese Weise sogenannte *orientierte* Größen zu definieren. Nach einem steckengebliebenen Versuch L. Carnots im Jahre 1803 (der kaum Erfolg haben konnte, weil sein Autor sich systematisch weigerte, negative Zahlen zu verwenden) war es Möbius (und unabhängig von ihm Chasles), der um 1844 auf einer Geraden D, auf der ein Richtungssinn festgelegt ist, die orientierte Strecke $\overline{AB}$ als $\pm AB$ definierte, je nachdem, ob man im festgelegten oder im entgegengesetzten Sinne von A nach B gelangt; die Relation zwischen drei Punkten A, B, C von D lautet dann in jedem Fall $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$. (Guérindon 1978, S. 84)

Diese Verbindung zwischen Carnot und Möbius über die Einführung des Prinzips der Zeichen in die Geometrie wird von vielen Verfassern festgestellt. Mainzer schreibt nach einer kurzen Darstellung von Monges darstellender Geometrie über Carnot.

> Während Monge noch den analytischen und synthetischen Standpunkt in der Geometrie gleichberechtigt vertritt, scheiden sich die Geister bereits in der Generation von Monge's Schülern: L. N. M. Carnot (1753-1823), als Militär und Mathematiker typischer Repräsentant der École, will die Geometrie von der „Hieroglyphenschrift der Analysis" befreien. In seiner *Géométrie de position* von 1803 führt *Carnot* systematisch Richtungen von Geraden und Strecken ein. Ist z. B. AB eine positive Strecke, dann ist BA eine entgegengesetzte negative Strecke, d. h. AB = - BA und AB + BA = 0. Für kollineare Punkte A, B, C gilt z.B. AB + BC + CA = 0, da AB + BC = AC und AC + CA = 0. (Mainzer 1980, S. 117-18)

Diese Technik erlaubt eine Reihe interessanter Verallgemeinerungen der synthetischen Geometrie. Mainzer exemplifiziert diese seine These der Einführung von gerichteter Strecke in die Geometrie durch Carnot mit einem aus dem *Essai sur la Théorie der Transversalen* entnommenen Beispiel. An diesem Beispiel wird deutlich, dass Carnot nicht einfach als Außenseiter im allgemeinen analytischen Trend der Geometrie abgetan werden kann. Seine Verallgemeinerungen für beliebige Polygone verweisen bereits auf die Topologie, deren Entwicklung im 19. Jahrhundert einsetzen sollte. (Vgl. Mainzer 1980, S. 118) Anders als Mainzer sieht Fink die Bemühungen Carnots in die Richtung der Einführung des Prinzips der Zeichen nur als einen unvollständigen Versuch. Für ihn war Carnot nahe daran, Möbius mit der Annahme AB + BC = AC zuvorzukommen. (Fink 1894, S. 122) Fink hat einen sehr wichtigen Punkt der Theorie des Negativen bei Carnot hervorgehoben, und zwar, dass Carnot in der GP versucht hat, „eine neue Technik der Bezeichnung für die Geometrie zu gewinnen". Für Fink hat Carnot doch die „absurden" Größen zugelassen, „weil man zeigen kann, wie sie andere, wirkliche Quantitäten vertreten, und wie die ihnen anhaftenden Zeichen Relationen und Lagen der nur angezeigten Größen erkennen lassen." (Fink 1894, S. 122)

Die Annäherung zwischen Carnot und Möbius war schon im letzten Jahrhundert von Richard Baltzer, dem Herausgeber der Gesammelten Werke von Möbius, festgestellt worden. Er schreibt in der Einleitung des ersten Bandes über den *Barycentrischen Calcul*:

> Der barycentrische Calcul ward 1827 herausgegeben, ein in mehrfacher Hinsicht ganz neues Werk, enthaltend eine neue Art analytischer Geometrie, ferner die darauf gegründete Lehre von den Verwandtschaften der Figuren nebst den daraus entspringenden Classen geometrischer Aufgaben, zuletzt Anwendung des neuen Calculs auf die Entwicklung mehrerer Eigenschaften der Kegelschnitte. Neu und fast befremdend erschien darin zuerst die Bestimmung des Zeichens einer Strecke nach der vorausbestimmten positiven Richtung ihrer Geraden. Ebenso die Bestimmung des Zeichens einer Dreiecksfläche nach dem vorausbestimmten positiven Sinn ihrer Ebene, und die Bestimmung des Zeichens eines Tetraederinhaltes. Man lernte erst später durch Möbius in diesen Bestimmungen die feste Grundlage für den metrischen Theil der Geometrie erkennen, nach welcher Carnot in seiner *géométrie de position* gesucht hatte. (Möbius 1885, S. viii)

Selbst Möbius hat Carnot (und l'Huilier) in der Vorrede des „Barycentrischen Calculs“ erwähnt, als er die geschichtlichen Motivationen seiner barycentrischen Koordinaten darstellt.

> Es ist bekannt, dass die der Mechanik zugehörige Lehre vom Schwerpuncte schon oftmals als Hülfsmittel zur Erfindung rein geometrischer Wahrheiten benutzt worden ist. Die frühesten Versuche sind unstreitig die mechanische Quadratur der Parabel von Archimedes und der schon in des Pappus mathematischen Sammlungen sich vorfindende, jetzt unter dem Namen der centrobaryschen oder Guldin's Regel bekannte Satz. Mit Uebergehung späterer Bemühungen dieser Art, die, wie die eben gedachten, hauptsächlich die Quadratur und Cubatur von Flächen und Körper zu ihrem Zwecke haben, erwähne ich nur aus den letzten Zeiten die Mathematiker Carnot und L'Huilier. Beide suchen den Schwerpunct in das Gebiet der niedern Geometrie zu ziehen, indem sie nicht sowohl von Körpern, Flächen und Linien, als vielmehr bloss von einem Systeme gewichtiger Puncte den Schwerpunct betrachten, ihn selbst aber, um alle Vorstellungen des Mechanischen zu beseitigen, den Punct der mittlern Entfernungen nennen, weil nähmlich sein Abstand von irgend einer Ebene gleich der mittlern Entfernung aller Puncte des Systems von derselben Ebene ist. Die Bereicherungen, welche sie dadurch der Geometrie verschafft haben, sind allgemein anerkannt. (Möbius 1885, S. 5)

Viele andere Verfasser bestätigen das Streben Carnots nach der Einführung des Prinzips der Zeichen in die Geometrie, doch immer mit der Betonung der Unvollkommenheit des Versuches. So schreibt Darboux:

> Die Einführung des Prinzips der Zeichen war wiederum nicht so neu wie Chasles es glaubte, als er seinen *Traité de Géométrie supérieur* schrieb. Bereits Möbius hatte in seinem *Barycentrischen Kalkül* dem Desideratum von Carnot entsprochen und zum ersten Mal ein Zeichen für ein Strecke und selbst eines für eine Fläche benutzt. (Darboux 1904, S. 241)

Carnot als Vertreter der synthetischen Geometrie

Es ist nahe liegend, dass die Charakterisierung Carnots als Gegner des Negativen und als Befreier der Geometrie von der Hieroglyphenschrift der Analysis auch von einer Charakterisierung als synthetischer Geometer begleitet wird. Wir haben eben in der letzten Überschrift dieses Merkmal der Geometrie Carnots schon gespürt. Klein z. B. hat Carnots GP als die Quelle für den im 19. Jahrhundert laufenden Gegensatz zwischen analytischer und synthetischer Geometrie gesehen. Nikolaus N. Stuloff untersucht den Wechsel in dem Wissenschaftsbegriff der Mathematik in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts und vertritt die These, dass die neue Entwicklung der Mathematik durch ein Streben nach Methodenreinheit sowohl in der Analysis als auch in der Geometrie charakterisiert werden kann. Er unterstützt zunächst seine These am Beispiel der „Méchanique analytique“ von Lagrange, die er als „Anzeichen einer neuen mathematischen Arbeitsweise“ sieht, d.h., die „Ansätze eines anderen Wissenschaftsbegriffs, der im 19. Jahrhundert innerhalb der Mathematik voll zum Durchbruch kam“. Für Stuloff wollte Lagrange fast die gesamte Mechanik der festen Körper und der Flüssigkeiten als ein Ganzes zusammen mit der

Analysis bzw. der Variationsrechnung darstellen, dabei bereits „eine Methodenreinheit anstrebend“. Lagrange hätte sogar, laut Stuloff, stolz in der Einleitung geschrieben: *Man wird keine Figuren in diesem Werk vorfinden, vielmehr nur algebraische Operationen.* (Vgl. Stuloff 1971, S. 72)

Warum dies allerdings ein Beleg für Methodenreinheit ist, ist zunächst unverständlich. Man muss sogar sagen, dass das Problem der Methodenreinheit in der Mathematik gerade im Gegensatz zur Vorstellung einer universellen Methode steht und durch den Ansatz eines *begrifflichen Denkens* im Sinne der neueren Philosophie entstanden ist. Bolzano unterscheidet bei den mathematischen Beweisen zwischen „Gewißmachungen“ und wirklichen Begründungen. Begründungen in der Geometrie dürfen nur mit geometrischen Methoden geführt werden nicht mit arithmetischen Mitteln, weil sie den „objektiven Zusammenhang“ zeigen sollen. Dies ist mit Methodenreinheit gemeint und ihre Betonung führt zur Ablehnung der Geometrie mit analytischen Methoden.[4] Stuloff selbst hebt hervor, dass diese Methodenreinheit keineswegs ausschließlich in der Situation einer Arithmetisierung blieb, sondern dass sie sich innerhalb der Mathematik auch auf andere Weise äußerte, nämlich umgekehrt auch in Form der Ablehnung der analytischen Methoden in deren Anwendung in der Geometrie. (Vgl. Stuloff 1971, S. 79) In diesem Zusammenhang nennt er zunächst Monge, der als Mitbegründer und Leiter der École Polytechnique, der durch seine geometrische Schule und seine Werke, insbesondere „L'application de l'analyse à la géométrie“ (1795), als Vorbild für die nächste Generation galt. Laut Stuloff bleibt die Analysis stets auf die Anwendung beschränkt, weil der tatsächliche Raum primär ist. Für Stuloff werden alle möglichen Hilfsmittel herangezogen, um den Raum zu erforschen. (Stuloff 1971, S. 79) Interessant für unsere Zwecke ist, dass er sich, nach der Beschäftigung mit Monges Geometrie, Carnot zuwendet:

> Aus dieser systematisch durchgebildeten Gesamtheit der geometrischen Gedanken wollte nun ein Schüler von Monge namens L. N. M. Carnot [...] einen gewissen Teil, nämlich eine synthetische Darstellung der Geometrie, herauspräparieren [...] Der genannte Carnot [...] wollte die Geometrie unabhängig von der Analysis nach einem einheitlichen Prinzip darstellen. In seiner *Géométrie de position* [...] lehnte er die Analysis radikal ab und versuchte die innerhalb einer sonstigen geometrischen Untersuchung üblichen Fallunterscheidungen bezüglich der Beschaffenheit einer Figur durch ganz eigene Vorzeichenregeln zu allgemeingültigen Aussagen zusammenzufassen. Diese Vorzeichenregeln sollten aber nicht etwa den bekannten arithmetischen Gesetzen entnommen werden, sondern rein geometrischen Gesichtspunkten. Die aus der Analysis kommenden üblichen Vorzeichenregeln wurden für falsch erklärt; sie seien der Geometrie nicht adäquat, die letztgenannte müsste davon gänzlich unabhängig sein. Gewiss kam er damit nicht durch, aber die geschichtliche Bedeutung von Carnot liegt im Streben nach einer Methodenreinheit innerhalb der Geometrie. (Stuloff 1971, S. 79)

In diese Richtung geht auch Kropp, der in seiner Darstellung der projektiven Geometrie den Gegensatz zwischen Analytikern und Synthetikern genau als einen Streit um die Reinheit der Methode sieht. Carnot, ein „radikaler Anhänger synthetischer Methoden in der Geometrie“, soll, laut Kropp, besonders diese Forderung nach Reinheit der Methode

[4] Vgl Bolzano 1830/48, S. 83 und auch Jahnke, Otte 1981, S. 86.

gestellt haben, die nur das Projizieren und Schneiden zulasse. (Vgl. Kropp 1969, S. 72,75, 77)

Es war aber offensichtlich, dass man nicht zur traditionellen Euklidischen Geometrie mit ihren komplizierten Einzelfallbetrachtungen zurückkehren konnte. Worin also die Methode zu sehen war, mit deren Hilfe man zu neuen geometrischen Verallgemeinerungen gelangen konnte, war nicht klar. Leibniz Projekt einer spezifischen „geometrischen Charakteristik" war ein erster, nicht durchgeführter Versuch in dieser Richtung und für Bourbaki geht die Richtung der Geschichte des Projektes des Leibnizschen geometrischen Kalküls auf Carnot zurück, das während des ganzen 19. Jahrhunderts die „synthetische Geometrie der analytischen Geometrie gegenüberstellt." Laut ihm kommt er bei dem Versuch, die synthetische Geometrie so weit wie möglich unabhängig zu entwickeln dazu, zur Vermeidung der „Figurenfälle der antiken Geometer", systematisch orientierte Größen, Längen und Winkel, einzuführen. Unglücklicherweise, schreibt Bourbaki, „wird sein Werk beträchtlich durch seine Einstellung verkompliziert, keine negativen Zahlen (die er für widersprüchliches hielt!) zu verwenden und sie durch ein schlecht handzuhabendes System von Vorzeichenübereinstimmung zwischen verschiedenen Figuren zu ersetzen." (Bourbaki 1971, S. 149)

Carnot als Analytiker

In unmittelbarem Gegensatz zu den vorhergehenden Auffassungen von Carnots Geometrie findet man nicht selten in der Sekundärliteratur Verfasser, die Carnot als Analytiker sehen und seine GP auch als einen Beitrag zu der analytischen Geometrie verstehen. In der Tat wird in dem letzten Kapitel der GP nur das Thema des Gebrauches von verschiedenen Koordinatensystemen behandelt. Boyer, der die Werke Carnots gut kennt, schreibt:

> In fact, the point of view toward coordinates here presented is the broadest of any mathematician since Newton, another who traditionally is placed among the synthesists. Carnot may well have been unaware to the suggestion of polar, bipolar, and other coordinate systems in Newton's *Methodus fluxionum*, for this has been overlooked by other mathematicians and historians just as has a similar contribution in the *Géométrie de position*. (Boyer 1954, S. 459)

Boyer bemerkt in einem anderen Aufsatz mit dem Titel *The Great Carnot* einen Punkt, den viele übersehen haben, und zwar, dass sich Carnot in seinem Leben mehr um „depth of understanding" als um „immediate applicability" gekümmert hat. Im Vorwort zum „Essai sur les machines en general" warnt Carnot davor, dass man in seinem Buch keine Hinweise zu besonderen Maschinen findet, sondern zu Allgemeinen Gesetzen. (Vgl. Boyer 1956, S. 7) Boyer weist noch auf ein Merkmal des Buches hin, das für sich selbst für die analytische Seite Carnots spricht:

> Dealing exclusively as the book did with basic concepts, it contained not a single diagram, a characteristic usually associate with the more celebrated *Mécanique analytique* of Lagrange, which appeared five years later. (Boyer 1956, S. 8)

Boyer hebt in seiner Analyse des Infinitesimalkalküls von Carnot wieder dessen „concern for fundamental concepts" hervor:

> If the works of Carnot and Lagrange failed to convince their contemporaries that a solid foundation for the calculus had been found, at least they paved the way for the definitive work of their successor, Cauchy. The *Réflexions* [...] did much to make analysts dissatisfied with the *abominable little zeros* of the eighteenth century. And Carnot's statement that *all mathematics is, properly speaking, merely a course of similar expressions*, comes close to the twentieth-century recognitions of the tautological nature of the subject. (Boyer 1956, S. 9)

Wie Boyer, berichtet Gino Loria in einem Beitrag zur Geschichte der analytischen Geometrie über die Formel für Koordinatentransformation, die Carnot in der letzten Sektion der GP bewiesen hat. „Die Formeln, die er erarbeitet und bei denen ein fester Ursprung angenommen wird, sind jedoch so kompliziert, dass sie nicht einmal erlauben, die wesentlichen Bedingungen zu erkennen, der zufolge die neuen Koordinaten sich in vollständigen und linearen Funktionen der alten Koordinaten ausdrücken. Die Frage war also angeschnitten aber noch nicht erschöpfend beantwortet“. (Loria 1948, S. 220)

Weiter berichtet er über die verschiedenen Koordinatensysteme, die Carnot - einer Idee von Lacroix folgend, der die Gleichung einer Kurve nur durch auf die Kurve selbst bezogene Quantitäten darstellen wollte - eingeführt hat.

> Möglicherweise ließ sich L. N. M. Carnot in seiner *Géometrie de position* (Paris, 1803) von dieser Bemerkung inspirieren, als er *50* von dem cartesischen Systemen verschiedene Koordinatensysteme vorschlug, um analytisch eine ebene Kurve darzustellen. Unter allen Systemen empfahl er, dasjenige auszuwählen, nach welchem eine ebene Kurve durch die Relation definiert ist, die besteht zwischen dem Krümmungsradius in einem beliebigen Punkt und dem grenzwert des Winkels, den die entsprechende Tangente mit der Geraden bildet, die diesem Punkt mit der Achse einer zur Tangente parallelen Sehne verbindet, wenn die Sehne sich zu dergleichen Tangente nähert. (Loria 1948, S. 263)

Maximilien Marie hat in seiner „Histoire des Sciences Mathématiques et Physiques“ die *Théorie des transversales* und die *Géométrie de position* von Carnot als „Ausgangspunkt einer neuen wissenschaftlichen Epoche“ betrachtet. Er bringt Carnot in Zusammenhang mit einer analytischen Tradition, die der Erfindung der analytischen Geometrie und des infinitesimalen Kalküls folgen sollte. Für Marie findet dieser Geist seinen Ansatz bereits in den Werken von Descartes, Fermat, Roberval und Pascal. Damit hätte die Entdeckung der ersten Grundsätze der Dynamik des Punktes und der festen Körper der Geometrie im eigentlichen Sinne jeden Reiz genommen. Für Marie sind alle Mathematiker von Descartes bis Lagrange nicht nur Analytiker gewesen, ihre Bemühungen richteten sich viel mehr „auf die Klärung dieses unlösbaren Problems: es schaffen, bei der Suche nach der Wahrheit auf alle direkten Kombinationen zwischen den konkreten Objekten untereinander zu verzichten. Der Einfluss des Zeitgeistes war dergestalt, dass man es beinahe als äquivalent betrachtete, eine Aufgabe in eine Gleichung zu bringen und sie zu lösen“. (Marie 1886, S. 165)

Marie sieht also Carnots Verdienst in seinem Beitrag zur Aufhebung dieser Schwierigkeit der Koordination von Algebra und Geometrie.

> Carnot hatte das Glück, die Revolution, die sich in der Wissenschaft ereignen sollte, vorauszusehen und ihr Initiator zu sein. Seine *Théorie des transversales*,

> die den Ausgangspunkt der Arbeiten so vieler berühmter Geometer darstellte, wird das Vorwort für die moderne Geometrie bilden.
> Aber der schönste Titel, der zum wissenschaftlichen Ruhms Carnots beitrug, findet sich in seiner *Géométrie de position*, wo zum ersten Mal die Grundlage der analytischen Geometrie erörtert wurde: Die notwendige Konkordanz der Lageveränderungen geometrischen Figur und der Zeichenwechsel, welche in den dieser Figur entsprechenden Gleichungen erfolgen. Dieser Konkordanz gemäß beziehen sich dieselben Gleichungen wohlverstanden immer auf die gleiche Figur, wie auch immer diese sich verändert. (Marie 1886, S. 166)

Von verschiedenen Seiten her wird Carnot in einer positiven Verbindung mit der algebraischen Analyse gesehen. Grattan-Guinness, beispielsweise, kommt in seinen Studien über die mathematische Physik in Frankreich in den Jahren 1800-1835 zu einer Unterscheidung der Art und Weise, wie die Mathematiker arbeiten oder denken.

> The mathematical issue of philosophical character which I wish to raise concerns whether one basically works or thinks in geometrical, algebraic or analytical terms. The difference manifests itself, for example, in thinking of the integral as an area, as the value of a converse differential operator, or as the limiting value of a sequence of partitions-sums. It is a rather subtle distinction, for it is not that between geometry, algebra and analysis themselves; for example, one may do geometry rather algebraically, or express oneself geometrically without necessarily drawing diagrams. (Grattan-Guinness 1981, S. 358)

Für Grattan-Guinness gab es zur Zeit der Wende zum XIX Jahrhundert vorwiegend einen algebraischen Stil, der unter anderen in Lazare Carnot zu finden war.

Carnot in der Geschichte der Geometrie

In der Sekundärliteratur findet man auch Verfasser, die sich darum kümmern, einen umfassenden geschichtlichen Überblick von der Rolle der Carnotschen Geometrie zu gewinnen. Auch in diesem Punkt sind sie nicht einig. Versuchen wir im Folgenden einige dieser Positionen darzustellen.

Fangen wir mit Gert Schubring an, einem deutschen Historiker der viel über die Geschichte der negativen Zahlen geschrieben hat. Er bringt in einer historischen Untersuchung über den mathematischen Status der negativen Zahlen Carnot in Zusammenhang mit dieser Geschichte. Er weist zuerst auf eine gewisse Ambiguität in der Anerkennung des Negativen in Frankreich hin und stützt sich auf Erklärungen zu zwei Stichwörtern aus der *Encyclopédie* von Diderot, *Négatif* und *Quantité*, wo in dem ersten, von d'Alembert geschrieben, der Status der Gleichheit des Negativen gegenüber dem Positiven abgelehnt wird, während in dem zweiten der Abbé de la Chapelle diese Gleichberechtigung anerkennt. Weiter untersucht Schubring „La Langue des Calcul“ von Condillac, wo man das Bemühen findet, eine Theorie der negativen Zahlen zu entwickeln. Nach Schubring entwirft Condillac, für den die Algebra die Grundlage der Mathematik bildet, in „La Langue des Calculs“ eine Theorie sukzessiver Abstraktionen, ausgehend von empirischen Begriffen und eine Hierachie der Etappen mit Hilfe seines Analogiekonzepts. Für ihn wäre das die erste Formulierung des „Prinzips der Permanenz“ von Hermann Hankel und der von Condillac geleistete Fortschritt bestehe darin, dass er den Übergang von Quantitäten/Größen zu den Zahlen als entscheidenden Punkt entdeckt. Man finde bei Condillac zum ersten Mal, schreibt er weiter, eine genetische Theorie der Entstehung des Zahlenbegriffs. (Schubring 1986, S. 10)

Dieses Werk, schreibt Schubring, wurde lebhaft in Frankreich diskutiert vor allem von den Ideologen. Obwohl die meisten dieser Philosophen Schüler von Condillac waren, hätten sie diese Abhandlung nur wenig gewürdigt. Sie würden Condillac die Idee unterstellen, schreibt Schubring, dass die Algebra die Sprache, also das Modell und die Zielsetzung, aller Wissenschaften bilde und sie würden mit großer Emphase eine so allgemeine methodologische Rolle der Algebra abstreiten. (Vgl. Schubring 1986, S. 12)

Um das Jahr 1800, setzt Schubring fort, gab es bei den französischen Philosophen einen Wechsel in der Vorstellung der Mathematik. Man hätte sich von der Algebra distanziert und die Geometrie als Grundlage gewählt, welche den mathematischen Zeichen ihre unmittelbare Bedeutung verleihen müsse, da die Mathematik in den Begriffen der Sinneserfahrung interpretiert würde. Diese Veränderung, betont Schubring, würde besonders deutlich in dem Werk von Destutt de Tracy, einem der wichtigsten Repräsentanten der Ideologen. (Schubring 1986, S. 13)

Schubring betrachtet Carnot als Übermittler dieser neuen empiristischen Ideen in die Mathematik hinein, als der erste, der diese neue epistemologische Sichtweise auf die Mathematik übertragen hat.

Laut Schubring wäre Carnot von der Überlegenheit der Geometrie über die Algebra überzeugt, und deshalb hätte er nur den absoluten Zahlen den Status mathematischer Größen zugebilligt. Das heißt, nur denjenigen Zahlen, die mit Substanzen verbunden werden können. Somit reserviert Carnot die Subtraktion nur für die Arithmetik und betrachtet sie niemals als algebraische Operation. Nach Schubring hätte Carnot versucht, die Algebra durch die Geometrie zu ersetzen. Diese wäre eine neue Art von Geometrie, die Geometrie der Korrelation. Er beschränkt die algebraischen Operationen auf „durchführbare Fälle, z. B. die Gleichung (a - b).c = ac - bc ist beschränkt auf den Fall wo a > b. Er umgeht einen Teil dieser Einschränkungen, indem er die Algebra in einen Kalkül auf der Basis von orientierten Strecken überführt". (Schubring 1986, S. 13) Wir glauben, dass anders, als es in dem letztem Satz dieser Darstellung behauptet wird, Carnot nicht wie Möbius oder Grassmann einen Kalkül gerichteter Strecken sucht.

In einem anderen Aufsatz wendet sich Schubring wieder der Rolle von Carnot zu Anfang des 19. Jahrhundert zu. Für ihn hatten Condillacs Vorstellungen über die Algebra wenig Einfluss in dieser Zeit gehabt, weil gleich nach dem Erscheinen seines hinterlassenen Werkes (1798) auch die Werke Carnots gegen die negativen Zahlen erschienen sind.

> Diese Schriften entfalteten eine sehr große Wirkung, aufgrund einer gleichzeitigen empiristischen Wende in der Philosophie und struktureller Veränderungen im Bildungswesen, die die Aufklärungsphilosophie zurückdrängten. Carnot hatte der Algebra jegliche selbständige Funktion abgesprochen und ihr nur die Möglichkeit einer Übersetzung geometrischer Begriffe und Aussagen, aber keine darüber hinausgehende Verallgemeinerung zugelassen. Diese empirisch-geometrische Bindung mathematischer Begrifflichkeit hat sich in Frankreich ab 1810 allgemein durchgesetzt und einen Bruch mit der bisherigen relativen Akzeptanz negativer Zahlen bewirkt. (Schubring 1988, S. 191)

Eine relativ lange Analyse von Carnots Rolle in der französischen Geometrie Anfang des 19. Jahrhunderts wird von Lorraine Daston in ihrer Untersuchung der „physicalist tradition“ bei der französischen Geometrie am Beginn des 19. Jahrhunderts unternommen[5]. Die These der Verfasserin ist, dass synthetische Geometer wie Poncelet und Chasles sowohl ein philosophisches als auch ein mathematisches Programm vom Carnot und Monge geerbt haben, das ein enges Verhältnis zwischen Mathematik und physischen Wissenschaften als Grund der Überlegenheit der synthetischen Geometrie gegenüber der Analysis machte. So spricht sie von einer „physicalist tradition“ in der französischen Geometrie, die sie in drei Richtungen untersucht: die Krise der Grundlagen des Kalküls Ende des 18. Jahrhunderts, und das ihm folgende Misstrauen gegenüber der Analysis; das anfängliche Curriculum der unter der Leitung Monges stehenden École Polytechnique hatte die Neigung, den Unterschied zwischen Mathematik und Mechanik aufzulösen; die zeitgenössische Emphase im Ausbildungswert der Mathematik, insbesondere in der Ausbildung der Arbeiter. Für Daston hätte die analytische Revolution von Descartes, Fermat und Roberval Frankreich das ganze 18. Jahrhundert hindurch beherrscht und ihren Höhepunkt um 1789 erreicht. Sie zitiert Condorcet, der die klassische Geometrie als etwas intellektuell Veraltetes beurteilte, als etwas „abandoned by almost all mathematicians in favor of modern analytic methods“. (Daston 1986, S. 270) Diese Begeisterung, setzt Daston fort, habe in den folgenden Jahren abgenommen, und Frankreich erlebte ein Wiedererstehen des Interesses an der Geometrie, „stimulated by the studies of Carnot, Monge and Monge's students at the Ecole Polytechnique“. (Daston 1986, S. 270)

Für Daston erklärt sich dieses Wiederaufleben der Geometrie teilweise durch eine gewisse Skepsis der Mathematiker gegenüber der Algebra und des Kalküls, die durch die „recent re-examinations of the foundations of algebra and the calculus prompted by the growing popularity of a Lockean theory of knowledge, including mathematical knowledge, among French *philosophes“* hervorgerufen wurde. (Daston 1986, S. 270) Die Lockesche Psychologie betonte die Empirie und die Erfahrung als Quelle der mathematischen Begriffe und sah sie letztendlich als verantwortlich für die Klarheit dieser Begriffe. Diese Psychologie hatte die laufende Vorstellung über die Metaphysik des Infinitesimalen und des Negativen in die Defensive gebracht. Einhundert Jahre Erfolg der Analysis, schreibt Daston, schienen nicht mehr das Verständnis des Kalküls, das auf „formal manipulations and the consistency of analytical symbols rather than physical analogies“ (Daston 1986, S. 270) beruhte, zu rechtfertigen. Auf diese Weise schafften die sensualistischen Ideen, durch Lockes Philosophie hervorgerufen und in den Aufsätzen d'Alembert's in der Encyclopédie konkretisiert, ein Klima von „empiricist discomfort with both infinite and finite analysis that precipitated the earliest stirrings of the synthetic revival in the works of Lazare Carnot and that remained a prominent theme in the geometry of Poncelet, Dupin and Chasles“. (Daston 1986, S. 272)

Vor diesem Hintergrund entwickelt Daston ihre Interpretation der Werke Carnots. Für sie war der Hauptpunkt, der die Werke Carnots mit den anderen Mathematikern verbindet, die Carnotsche Formulierung der geometrischen Korrelate für die problematischen, analytischen Begriffe. Die *Réflexions sur la métaphysique du calcul*

[5] Vgl. Daston 1986, S. 269ff.

infinitésimal beziehungsweise die *Géométrie de position* brächten also Interpretationen für die infinitesimalen und negativen Zahlen. Daston kommt dann zu ihrer „physicalist" Interpretation Carnots.

> Carnot's background as a practicing military engineer, a training shared by Polytechnicians Poncelet, Chasles, Dupin and Brianchon, informed his staunchly physicalist interpretation of mathematical entities. Although d'Alembert's *Encyclopédie* articles were often the departure points for Carnot's treatises, Carnot usually faulted d'Alembert's accounts as insufficiently empirical. The paradoxes and contradictions that vexed analysis arose, according to Carnot, from such blurred ideas as infinitesimals and negative quantities that were far removed from experience: only clear and distinct ideas that bore the impress of perception assured the certainty of mathematical reasoning. Quoting Locke, Carnot asserted that all knowledge originates in experience, „even for the most abstract sciences, for pure mathematics in particular. The geometric-*cum*-empirical spirit that pervades all of Carnot's works, reinforced by his philosophical arguments against analysis, proved a seminal influence on the synthetic geometers of the 1820's and 1830's. In particular, Carnot's refusal to separate geometry from mechanics, a union strengthened by Monge's curriculum at the Ecole Polytechnique, lent credence to the geometric use of the concepts of motion and transformation so central to the modern geometry of Poncelet and Chasles. (Daston 1986, S. 273)

Claude Paul Bruter verweist auf die „Intuitionen von Carnot" im Abschnitt II seines Buches „De L'Intuition a la Controverse. Essai sur quelques controverses entre mathematiciens".[6] Er fasst diese Intuitionen in drei Punkten zusammen. Erstens verweist er auf die Einführung eines kinematischen Bewegungsbegriffs in die Geometrie, mit dessen Hilfe das Problem der Koordinierung von Algebra und Geometrie gelöst werden sollte. Er bemerkt, dass die GP bemerkenswerte Ansichten von der Entwicklung der Mathematik enthalte. So würde in der Einleitung zu Carnots GP deutlich, dass Carnot die Existenz der sehr umfassenden und wesentlichen Theorie erkannt hat, welche heute dynamische Topologie genannt wird. Für Bruter wäre diese Geometrie der Situation oder der Transposition selbst nur der geringsten Teil einer sehr breit und sehr bedeutsamen Wissenschaft, ohne jemals behandelt worden zu sein. Im Allgemeinen ist diese Wissenschaft die Theorie der Bewegung, unter Vernachlässigung der Kräfte, die diese Bewegung erzeugen oder übertragen. In seinem Traktat hätte sich Carnot auf Newton bezogen, welcher die Kurve als Erzeugnis einer Bewegung verstand, und beginne die Konstruktion „du groupe local à un paramètre de difféomorphismes" Carnot würde nämlich infinitesimale Transformationen und ebenso ihre inversen betrachten. (Bruter 1987, S. 38)

Zweitens schreibt er Carnot den Kern einer Idee zu, die mathematische Objekte als Äquivalenzklassen auffasst. Er schreibt:

> Selbstverständlich kann Carnot noch keine algebraische Regeln liefern, die die Äquivalenzklassen charakterisieren. Für ihn hat die Geometrie der Position die Aufgabe, insbesondere die Verbindung, die zwischen den entsprechenden Lage der verschiedenen Teile einer beliebigen Figur und ihren komparativen Werten besteht, zu untersuchen. Ausgehend von einem ursprünglichen System betrachtet

[6] Vgl. Bruter 1987, S. 38 ff.

> er die korrelativen Systeme [...]; d.h. alle Systeme, die man auffassen kann, als die verschiedenen Zustände eines gleichen Variablen Systems, das sich in nicht wahrnehmbaren Schritten verformt. Er berücksichtigt lediglich Veränderungen [...], die man unendlich oder undefiniert klein nennt. Indem er den Rahmen der klassischen Geometrie, der Gegenstand seines Traktats ist, sprengt und da er die ungeheure Bedeutung seiner Methode erahnt, schreibt er am Ende seines Werkes, dass es in der Theorie der Kurven nicht Bedeutenderes gibt als die Koordinatentransformation in ihrem allgemeinsten Sinn; eine infinitesimale Transformation, die es ermöglichen müßte, alle lokalen Kurvenformen zu erhalten. Aufgrund dieser bedeutenden und grundlegenden Vision, die die Arbeiten von Lie, von Cartan und von den zeitgenössischen Mechanikern vorwegnimmt, verdient Carnot sicherlich auch im Reich der Mathematiker den Titel eines „géneral en chef", den ihm die „Convention" als Belohnung für seinen Erfolg als „Organisateur de la Victoire" verliehen hat. (Bruter 1987, S. 39)

Drittens betont er, dass Carnot nicht nur eine synthetische Auffassung von Geometrie vertreten hat, sondern dass mit seinem Werk auch die moderne Axiomatik in Sinne Hilberts ihren Ursprung nimmt, da Carnot verteidigt hat, dass die Synthese sich vollzieht, ausgehend von den Axiomen und gelangt schrittweise zu den komplexen Wahrheiten. Für Bruter deuten die Begriffe von Winkelorientierung und Vektoren, die von Carnot eingeführt worden waren, und die Erforschung der minimalen Relationen, auf deren Grundlage die anderen Größen definiert und berechnet werden können, die Basismethoden der linearen Algebra an. (Vgl. Bruter 1987, S. 39)

Im folgenden Paragraph, „Les débuts de la notion de métrique", spricht Bruter, unter anderen Punkten, über den Einfluss Carnots auf Poncelet. In seiner Untersuchung der Topologie, bemerkt er, dass sich bei Carnot viel deutlicher als bei Euler die Unterscheidung zwischen verschiedenen Eigenschaften eines Gegenstandes bestätigt und er stützt sich hier auf den ersten Paragraph des zweiten Abschnitts der GP, wo Carnot schreibt, dass zwischen den verschiedenen Teilen einer jeden geometrischen Figur zwei Arten von Verhältnissen, Größen- und Positionsverhältnissen, bestehen. Bruter bemerkt auch, da es Poncelet wie seinem Vorgänger Carnot darum geht, Eigenschaften oder permanente Relationen zu geometrisieren, die die analytische Sprache der damaligen Zeit, in der nur stetige Funktionen von kontinuierlichen Variablen vorkommen, in kaschierter Form ausdrückt. Für Bruter kommt Poncelet zu seinen Ergebnissen, weil er topologische, restriktive Hypothesen benutzt, indem er sie dem Unendlichen hinzufügt, weil er eine Kompaktifikation der Räume, an denen er arbeitet, vornimmt und eine Art von „analytischen Fortsetzung" verwendet. Die kontinuierlichen Konzeptionen hätten sich am Ende des 18. Jahrhunderts entwickelt, nicht allein mit den geometrischen Arbeiten von Carnot und Poncelet, sondern auch in England, möglicherweise unter dem Einfluss Carnots, mit den Arbeiten Peacocks, der in der Algebra „the principle of permanent forms" übernommen hat. (Vgl. Bruter 1987, S. 58)

Fragen zu Carnot und seiner Geometrie

Nachdem wir in den vorhergehenden Absätzen einige Beschreibungen und Interpretationen von Carnots Geometrieauffassung und ihre Rolle in der Geschichte der Mathematik dargestellt haben, versuchen wir nun, zusammenfassend die wichtigen Punkte wieder aufzunehmen. Zuerst springt die Vielfalt der verschiedenen mathematischen Theorien ins Auge, die unmittelbar mit der GP in Zusammenhang gebracht werden. So soll Carnot sich in der GP mit folgenden Disziplinen beschäftigt haben: euklidische Geometrie, projektive Geometrie, geometrischer Kalkül, analytische Geometrie, Topologie, Theorie der Parallelen, Trigonometrie, Arithmetik, Äquipollenztheorie und mit einer Theorie des Zentrums der mittleren Entfernungen. Der Umfang dieses Buches ist so groß, dass es nicht erstaunlich ist, dass in seinen verschiedenen Interpretationen so viele gegensätzliche Behauptungen gefunden werden, die sowohl den enzyklopädischen Charakter des Werkes ausdrücken, als auch die Schwierigkeit der Einschätzung der historischen Rolle und des Wertes der Geometrie Carnots. Weil feststeht, dass die „Géométrie de position" selbst die Quelle aller ihrer Missverständnisse ist, erscheint es schwierig, den im verborgenen liegenden Zusammenhang aufzuspüren.

Carnot selbst hat seine umfangreiche Thematik auf einen Nenner gebracht: „Die Géométrie de position ist also genau genommen die Lehre von den sogenannten positiven und negativen Quantitäten, oder vielmehr ein Mittel sie zu ersetzen, denn diese Lehre wird gänzlich darin verworfen". (Carnot 1803, S. ii) Hier beginnen also alle Polaritäten, die wir oben beschrieben haben. Was für eine Rolle hat das Negative in der Carnotschen Geometrie eigentlich gespielt? Das Zitat scheint zunächst den Kritikern Recht zu geben, die ihm eine Abscheu vor den Hieroglyphen der Analyse unterstellen. Oder ist *gänzlich verworfen* vielleicht nur eine sprachliche Übertreibung Carnots? Er selbst schreibt schließlich an vielen Stellen, dass durch seine Theorie des Negativen nichts an den üblichen Verfahren geändert wird. Und worin bestand eigentlich Anfang des 19. Jahrhunderts die Problematik des Negativen, so dass ein Mathematiker die übliche Theorie verwerfen wollte? Es steht außer Zweifel, dass die Betrachtung des Negativen in der Geometrie ein diffiziles Thema in der Mathematik der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts war und bei Carnot in der GP Gegenstand einer ersten eingehenden und umfangreichen Untersuchung war. Bellavitis, Gauß, Möbius und Grassmann sind die wichtigsten Beispiele einer erfolgreichen, konsequenten und operativen Betrachtung des Negativen in der Geometrie. Wir haben an vielen Stellen unserer Beschreibung der Sekundärliteratur gesehen, dass bei Carnot gewissermaßen diese erfolgreichen Versuche mindestens im Keim zu finden waren. Einige haben von einem „stecken gebliebenen Versuch der Einführung orientierter Größen in die Geometrie" gesprochen (Dieudonnè), der gerade durch Carnots Ablehnung des Gebrauchs des Negativen beträchtlich verkompliziert worden sei.

Allein schon die Frage des Negativen bei Carnot verweist also auf eine Pluralität von Absichten in der GP. Natürlich hilft es nicht viel das Werk als merkwürdiges Buch zu bewerten. Wie kann man aber sonst ein Werk betrachten, das eine solche Menge von widersprüchlichen Einschätzungen ausgelöst hat? Es handelt sich hier nicht, wie normalerweise in den philosophisch-historischen Einstellungen gegenüber der Mathematik, um verschiedene durch verschiedene Standpunkte ausgelöste Interpretationen des Werkes, sondern um Behauptungen, die kaum gleichzeitig gelten können. Wie kann man die GP letztlich verstehen, wenn einerseits Carnot durch seine „vision, puissance et profonde" die Arbeiten von Lie und Cartan antizipiert haben soll (Bruter) und gleichzeitig seine Überlegungen als „trivial" beurteilt werden (Klein). Einerseits ist der große Einfluss Carnots bei den Mathematikern seiner Zeit schwer zu verstehen, indem „les apports de l'ouvrage [...] assez faibles“ sind und „les théorèmes de Carnot ne sont guère que des exercises résolus à l'aide de méthodes désuètes“ (Glaeser) und andererseits gerade diese methodischen Überlegungen Carnots den Hauptverdienst seines Werkes ausmachen.

Das Bild von Carnot, das die Sekundärliteratur anbietet, ist also überall durch Gegensätze gekennzeichnet. Das spitzt sich zu in der Charakterisierung Carnots, sowohl als Synthetiker wie als Analytiker. Carnot soll sich hartnäckig gegen die ganze in der Analysis übliche Lehre von den Vorzeichen (Klein) gewehrt haben und gleichzeitig ist sein „point of view toward coordinates...the broadest since Newton“. (Boyer) Mehr noch gerade in der GP ist der Ort wo „pour la première fois, a été discutée la base de la Géométrie analytique“ (Marie) Wenn unter einem bestimmten Standpunkt das Buch als die Quelle für den zukünftigen Gegensatz zwischen analytischer und synthetischer Geometrie (Klein) gesehen werden kann, ist aus der Sekundärliteratur schwer nachzuvollziehen, wie Carnot selbst letztlich zu sehen ist. Die Fülle von Audrücken wie „Mißtrauen der Analyse“, „Befreiung der Geometrie von den Hieroglyphenschriften der Analyse“, „Ablehnung der Negativen“, usw. tragen wesentlich dazu bei, Carnot als Synthetiker zu sehen. Selbst wenn wir zugestehen, dass die GP heute sehr wenig gelesen wird, wie Bruter bemerkt hat, und dass viele dieser Aussagen auf Klein zurückverfolgt werden können, bleibt eine gewisse Schwierigkeit bei der Einschätzung der GP.

Diese Schwierigkeit drückt sich auch in den Darstellungen von Schubring und Daston aus. Wie wir gesehen haben, stellen sowohl Schubring wie Daston einen Zusammenhang zwischen dem Werk Carnots und Condillac bzw. Locke her. Daston sieht eine Verwandtschaft zwischen Carnot und Locke während Schubring einen Gegensatz zwischen Carnot und Condillac festzustellen glaubt. Beide gemeinsam unterstellen Carnot auf der anderen Seite einen gewissen Empirismus. Man sollte an dieser Stelle darauf hinweisen, dass Condillac einerseits die Philosophie und Erkenntnistheorie Lockes nach Frankreich und auf den Kontinent vermittelt hat, sie aber andererseits um ein eigenständiges Element, welches in der genetischen Rolle der Zeichen zu sehen ist, bereichert hat. Wesentlich für Condillacs Philosophie sind die folgenden beiden Elemente:
[...] the emphasis on and the development of the explorative function of signs, and the concurrent recognition of the dominance and independence of the empirically-objectively given. (Jahnke/Otte 1981, S. 83)

Nehmen wir nun die Aussagen von Schubring und Daston zusammen, so ergäbe sich das Bild, dass Carnot Locke näher steht als Condillac und somit insbesondere diese Rolle der Zeichen in der Mathematik nicht gesehen hat. Eine solche Einschätzung ist aber merkwürdig angesichts der Tatsache, dass, wie die gesamte Sekundärliteratur übereinstimmend feststellt, schwer zu entscheiden ist, ob die GP vornehmlich ein Werk zur algebraischen Theorie des Negativen sei oder eher ein elementar-geometrisches Werk darstellt. Aus dieser allgemeinen Einschätzung müsste man eher schließen, dass es Condillac vor allem um dieses Verhältnis von Algebra und Geometrie und damit gerade um die Wechselwirkung zwischen den beiden Aspekten der Condillaschen Epistemologie gegangen ist. Die Betonung des Empirismus durch Daston und Schubring würde dann darauf hinweisen, dass Carnot diese Weiterentwicklung auch mit einer Überwindung des abstrakt-analytischen Standpunkts der Mathematiker des 18. Jahrhunderts verbinden wollte.

Endgültigen Aufschluss könnte nur eine sehr gründlich Analyse des Werkes von Condillac geben.

Ein anderer Punkt ist die Einschätzung der Auswirkung der GP. Zunächst soll die GP, wie wir gerade dargestellt haben, durch verschiedene im Keim dargestellte Überlegungen auf verschiedene Mathematiker und auf verschiedene mathematische Gebiete eingewirkt haben. Viele Verfasser haben den Einfluss Carnots auf die damalige Mathematik von einem jeweils anderen Standpunkt bestätigt. Seine Einwirkung in der Arithmetik, insbesondere in der Frage der Metaphysik des Negativen, zum Beispiel, wird von Glaeser im Sinne einer gewissen „provokativen Rolle“ erklärt. Er sieht also einen positiven Einfluss Carnots in der damaligen Diskussion, aber nicht gerade durch eine konkrete Leistung Carnots. Schubring denkt hier ganz anders. Er interpretiert die Schriften Carnots als gegen die negativen Zahlen gerichtet und infolge ihrer empirisch-geometrischen Bindung mathematischer Begrifflichkeit als verantwortlich für einen Bruch mit der bisherigen relativen Akzeptanz negativer Zahlen in Frankreich. Spielte Carnot also wirklich eine „reaktionäre Rolle“ in der Mathematik seiner Zeit, wie Bell suggeriert hat? Oder muss diese seine Kritik des Negativen, wie viele andere Verfasser glauben, im Gegenteil als etwas Positives beurteilt werden? Schon im 19. Jahrhundert entsteht diese Charakterisierung Carnots als Gegner des Negativen, die heute bei den Mathematikern und Historikern verbreitet ist. In diesem Zusammenhang steht auch die Frage, ob die Mathematik Carnots als konkretes wissenschaftliches Ergebnis in die Hände der Mathematiker übergegangen ist, oder, wie Bruter sagt: „Ist das Verdienst Carnots nur in seinen Intuitionen zu sehen?“

Es geht ganz klar aus unserer Beschreibung der Sekundärliteratur hervor, dass Monge, Carnot und Poncelet direkt verantwortlich für die zu Anfang des 19. Jahrhunderts stattgefundene Erneuerung der Geometrie sind, die der synthetischen Geometrie einen gewissen Grad von Verallgemeinerung garantierte, die bis dahin charakteristisch für die analytische Geometrie war und dieser eine augenscheinliche Überlegenheit gegenüber der synthetischen gab. Dieses Programm gewinnt erst mit Poncelet und der Publikation seiner „Théorie des propriétés projectives des figures“ (1826) die Gestalt einer mathematischen Disziplin. Poncelet soll in diesem Werk „mit größter Genialität und von allen Unklarheiten befreit Ideen entwickelt haben, die schon bei Carnot in der GP zu finden waren und welche als die wichtigste und einflussreichste Leistung Carnots in der GP gesehen wird. An erster Stelle wäre hier sicherlich das berühmte „Prinzip der Kontinuität“ zu nennen. Dieses Prinzip steht ganz im Dienste einer Koordinierung von algebraischer und geometrischer Denkweise. Poncelet vertritt eindeutig einen analytischen Denkstil, die Objekte der Geometrie sind für ihn ideale, durch die Permanenz der Relationen konstituierte Entitäten. Es handelt sich aber nicht um einen formal-analytischen Denkstil im Sinne einer deontologisierten Axiomatik, wie das verschiedentlich unterstellt wird. Gerade weil Poncelet der geometrischen Anschauung eine große Rolle für die mathematische Verallgemeinerung zubilligt, spielt das Prinzip der Kontinuität, welches er aus den Gedanken Carnots entnommen und weiterentwickelt hat, eine solch überragend Rolle in seinem Werk.

Indem wir akzeptieren, dass Carnot eine große Rolle in der Entstehung der projektiven Geometrie gespielt hat, ist es erstaunlich, dass es bis heute kaum eine ausführliche Beschreibung seiner Geometrie gibt. Das einzige Werk, unserer Kenntnis nach, das die Geometrie Carnots relativ ausführlich untersucht, ist ein Buch aus dem letzten Jahrhundert: *Carnot: Sein Leben und seine Werke* von Karl Fink 1894 in Tübingen erschienen. Obwohl dieses Buch ein wichtiger Beitrag zur Kenntnis der Carnotschen Geometrie ist, bleiben bei Fink bestimmte wesentliche Fragen außer Betracht. Was bedeutet eigentlich der Begriff „Korrelation" bei Carnot? Trotz der Feststellung einer bestimmten Verwandtschaft zwischen ihm und dem Ponceletschen Begriff des Kontinuitätsprinzips, die bereits Klein gesehen hat, oder zwischen ihm und dem Möbiusschen Begriff der Collineation, ist seine mathematische Bedeutung nicht vollständig aufgeklärt worden. Warum hat Carnot den Begriff der Korrelation nicht wie Möbius eindeutig als Abbildung, d.h. durch Input-Output-Angaben definiert? Warum spielt der Bewegungsbegriff wie bei Poncelet eine so große Rolle in der GP, ohne dass die Analogie zwischen algebraischer und geometrischer Argumentation so weit entwickelt worden wäre, wie dies bei Poncelet geschehen ist? Sind das bloße Versäumnisse Carnots oder steckt darin ein tiefes philosophisches Element? Carnot hat immer darauf hingewiesen, dass die Grundlagen und die Anwendungen der Mathematik nicht auseinander gerissen werden dürfen, und er hat in diesem Sinne die Arbeit von Monge als vorbildlich angesehen. Vielleicht wollte er Möbius und Poncelet, die eindeutig auf dem Weg zur reinen Mathematik im Sinne des 19. und 20. Jahrhunderts sind, in dieser Richtung nicht voranschreiten. Vielleicht wollte er Mathematik und Philosophie ebenso wenig vollständig trennen wie Mathematik und ihre Anwendungen. In diesem Sinne hat er Poncelet beeinflusst und hat Poncelet in einen Gegensatz zu Cauchy gebracht. Bemerkenswert ist und bleibt die Vielzahl der Ideen und Entwicklungsrichtungen, die von seinem Werk ausgehen. Carnot nimmt zweifellos eine Schlüsselstellung in dem Transformationsprozess der Mathematik vom 18. Jahrhundert zur Moderne ein.

Bibliographie

Bell, E.T. (1967): Die Großen Mathematiker. Düsseldorf, Wien: Econ.

Bolzano, B. (1830-1835): Grössenlehre II. Reine Zahlenlehre. Ausgabe 1976. Stuttgart: Friedrich Fromann.

Bolzano, B. (1830-1848): Grössenlehre. Ausgabe 1975. Stuttgart: Friedrich Fromann.

Bourbaki, N. (1971): Elemente der Mathematikgeschichte. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Boyer, C.B. (1954): "Carnot and the concept of deviation." American Mathematical Monthly 61: 459-463.

Boyer, C.B. (1956): "The Great Carnot." The Mathematics Teacher 49: 7-14.

Bruter, C.P. (1987): De L'Intuition a la Controverse. Essai sur quelques controverses entre mathématiciens. Paris: A. Blanchard.

Carnot, L.N.M. (1785): Dissertation sur la théorie de l'infini mathématique, ouvrage destiné à concourir au prix qu'a proposé l'Academie royale des sciences, arts et belles-lettres de Berlin, pour l'année 1786. Arras, le 8 de septembre 1785.

Carnot, L.N.M. (1797): Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal. Ausgabe 1970. Paris: Albert Blanchard.

Carnot, L.N.M. (1800): Letre du citoyen Carnot au citoyen Bossut contenant quelques vues nouvelles sur la trigonométrie. In Cours de Mathematiqués, géometrie et application de l'algébre à la géometrie, Hrsg. Bossut, A.C. Paris: Nouvelle Édition.
Carnot, L.N.M. (1801): De la corrélation des figures de géométrie. Paris: Duprat.
Carnot, L.N.M. (1803): Géométrie de position. Paris: Duprat.
Carnot, L.N.M. (1806): Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace; suivi d'un essai sur la théorie des transversales. Paris: Courcier.
Chasles, M. (1837): Aperçu Historique sur l'Origine et le Développement des Méthodes en Géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent a la Géométrie Moderne, suivi d'un Mémoire de Géométrie sur deux Principes Généraux de la Science, la Dualité et l'Homographie. Ausgabe 1989. Paris: Éditions Jacques Gabay.
d'Alembert, J.l.R. (1780): Sur les quantités négatives. In Opuscules mathématiques, ou Mémoires sur différens Sujets de Géométrie, de Méchanique, d'Optique, d'Astronomie, &C, Paris: Chez Claude-Antoine Jombert. 270-279.
Darboux, M.G. (1904): "Étude sur le Développement des Méthodes Géométriques." Bulletin des Sciences Mathématiques 2. Serie, Tome XXVIII: 234 - 263.
Daston, L.J. (1986): "The Physicalist Tradition in Early Century French Geometry". Studies in History and Philosophy of Science17(3): 269-295.
Diemer, A. (Hrsg.) (1970): Der Wissenschaftsbegriff. Historische und systematische Untersuchungen. Vorträge und Diskussionen im April 1968 in Düsseldorf und im Oktober 1968 in Fulda. Meisenheim an der Glan: Hain.
Dieudonné, J. (1978): Geschichte der Mathematik 1700 - 1900. Ausgabe 1985. Braunschweig: Friedrich Vieweg & Sohn.
Fink, K. (1894): Lazare Nicolas Marguerita Carnot. Seine Leben und seine Werke. Tübingen: Verlag der H. Lauppschen Buchhandlung.
Glaeser, G. (1981): Epistemologie des Nombres Relatifs. Recherches en Didactique des Mathématiques 2.3: 303-346.
Grassmann, H. (1844): Die Ausdehnungslehre von 1844. Leipzig, Verlag von Otto Wigand. Zweite Auflage.
Grattan-Guinness, I. (1990): Convolutions in French Mathematics, 1800-1840. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser Verlag. Band I (1-576), Band II (577-1312), Band III (313-1602).
Guérindon, J.; Dieudonnè, J. (1978): „Geschichte der Algebra und Geometrie bis zum Jahre 1840" *in* Dieudonné, J. (1978): Geschichte der Mathematik 1700 - 1900. Ausgabe 1985. Braunschweig: Friedrich Vieweg & Sohn.
Jahnke, H. N. (1981): Zahlen und Größen - Historische und Didaktische Bemerkungen. Mathematische Semesterberichte XXVIII: 202-229.
Jahnke, H.N.; Otte, M. (1981): "On Science as a Language". In Epistemological and Social Problems of the Sciences in the Early Nineteenth Century, Dordrecht, Boston, London: D. Reidel Publishing Company. 75-89.
Klein, F. (1926): Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. Ausgabe 1979. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag.

Kline, M. (1972): Mathematical thought from ancient to the modern times (3 Bände). New York: Oxford University Press.
Kropp, G. (1969): Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Mannheim, Zürich: Bibliographisches Institut.
Loria, G. (1948): "Perfectionnements, Évolution, Métamorphoses du concept de "coordonnés". Contribution a L'Histoire de la Géométrie Analytique." Osiris: A Research Journal devoted to the History of Science and its Cultural Influences 8: 218-288.
Mainzer, K. (1980): Geschichte der Geometrie. BI Wissenschaftsverlag. Mannheim, Wien, Zürich.
Marie, M. (1887): Histoire des Sciences Mathématiques et Physiques. Tome X (De Laplace a Fourier). Paris: Gauthier-Villars.
Möbius, A.F. (1885): Der barycentrische Calcul 1827. In Möbius GW I, Wiesbaden: Dr. Martin Sändig OHG.
Naas, J.; Schmid, H.L. (1967): Mathematisches Wörterbuch. Berlin, Stuttgart: Akademie Verlag, B. G. Teubner.
Neto, F. R. (1992): "Géométrie de position" - Eine Studie zum Werk von Lazare Carnot (1753-1823). Promotionsarbeit. IDM-Universität Bielefeld. Deutschland.
Otte, M. (1977): „Zum Verhältnis von Wissenschafts- und Bildungsprozeß - Dargestellt am Beispiel der Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert (Beschreibung eines Projekts)."ZDM, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, v. 4/1977, 205-209.
Poncelet, J.-V. (1822): Traité des propriétés projectives des figures. Ausgabe 1865. Paris: Gauthier-Villars.
Schubring, G. (1986): „Ruptures dans le statut mathématique des nombres negatifs." Petit x 12: 5-32.
Schubring, G. (1988): „Epistemologische Debatten über den Status negativer Zahlen und die Darstellung negativer Zahlen in deutschen und französischen Lehrbüchern 1795 – 1845". Mathematische Semesterberichte xxxv, Heft 2: 183-196.
Stuloff, N. (1970): „Über den Wissenschaftsbegriff der Mathematik in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts". In Diemer, A. (Hrsg.): Der Wissenschaftsbegriff. Historische und systematische Untersuchungen. Vorträge und Diskussionen im April 1968 in Düsseldorf und im Oktober 1968 in Fulda. S. 71-89.

Fernando Raul Neto
Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Filosofia

E-mail: feraneto@uol.com.br