Anais do IX Seminário Nacional de História da Matemática
Edição Especial da Revista Brasileira de História da Matemática. Vol. 11, nº23 – páginas 139-154
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

BEPPO LEVI E OS *ELEMENTOS* DE EUCLIDES

Irineu Bicudo
IGCE – UNESP – Brasil

Resumo

Beppo Levi (1875-1961) nasceu em Turim, Itália, e morreu em Rosário, Argentina. Estudou na Universidade daquela cidade, onde se doutorou em 1896, sob a orientação de Corrado Segre, um dos membros da famosa escola italiana de geometria algébrica. Ensinou matemática, respectivamente, nas Universidades de Turim, Cagliari, Parma e Bolonha. Em função das leis raciais de 1938, na Itália, imigrou para a Argentina, para ser o primeiro diretor do recém fundado Instituto de Matemática (da Facultad de Ciencias Matemáticas, Físico-químicas y Naturales Aplicadas a la Industrias), em Rosário. Publicou muito, principalmente na área de geometria algébrica. Em 1947, deu a conhecer o livro "Leyendo a Euclides" – um comentário aos Elementos do alexandrino. O presente trabalho trata do homem, do matemático e da sua leitura dos Elementos.

Palavras-chave: Definições, Postulados, Noções Comuns, Idéias Primitivas, Estrutura Lógica.

[BEPPO LEVI AND EUCLID'S ELEMENTS]

Abstract

Beppo Levi (1875-1961) was born in Turin, Italy and died in Rosario, Argentina. He studied mathematics at Turin University, where from he got his Ph. D. degree in 1896, under Corrado Segre, important member of the well-known Italian school of algebraic geometry. Levi taught at several universities (Turin, Cagliari, Parma and Bologna). Because of the Italian racial laws (1938), he immigrated to Argentina in 1939, where he lived until his death. He was appointed the first Director of the Institute of Mathematics (Facultad de Ciencias Matemáticas, Físico-Químicas y Naturales Aplicadas a la Industria), just created at that time. That Institute bears now his name as homage to his relevant work. He was a prolific writer, mainly in algebraic geometry. In 1947, he published a book entitled

"Leyendo a Euclides"- a commentary on the Elements of Euclid. This paper is concerned with the man, the mathematician and his interpretation of Euclid's Elements.

Keywords: Definitions, Postulates, Common notions, Primitive Ideas, Logical Structure.

Beppo Levi e os *Elementos* de Euclides

Começo com um famoso autor atual, Nicolas Bourbaki. Todos sabemos ser Bourbaki um nome fictício, criado no final da década de 1920, por um grupo de brilhantes matemáticos franceses, como André Weil e Jean Dieudonné. Nesse grupo, ao atingir 50 anos de idade, o matemático deixava de ser um membro ativo, passando a conselheiro, o que ensejava o ingresso de novos brilhantes matemáticos.

O que quero é ressaltar a monumental obra de Bourbaki que, não por mera coincidência, leva o título geral de *"Éléments de Mathématiques".*

Como nos dá conta o autor

> *Le traité prend les mathématiques à leur début, et donne des demonstrations complètes. Sa lecture ne suppose donc, en principe, aucune connaissance mathématique particulière, mais seulement une certaine habitude du raisonnement mathématique et un certain pouvoir d'abstraction. Néanmoins, le traité est destiné plus particulièrement à des lecteurs possédant au moins une bonne connaissance des matières enseignées dans la première ou les deux premières années de l'Université.* [*O tratado pega a matemática no seu começo, e dá demonstrações completas. A sua leitura não supõe então, em princípio, nenhum conhecimento matemático particular, mas somente certo hábito do raciocínio matemático e certo poder de abstração. No entanto, o tratado é destinado mais particularmente a leitores que possuam ao menos um bom conhecimento das disciplinas ensinadas no primeiro ou nos dois primeiros anos da universidade.*]

Esclarece ainda:

> *Le mode d'exposition suivi est axiomatique et procède le plus souvent du général au particulier. Les necéssités de la démonstration exigent que les chapitres se suivent, en principe, dans un ordre logique rigoureusement fixé.* [...] *Le traité est divisé en Livres et chaque Livre en chapitres.* [...] *Dans les <u>six premiers</u> Livres* [...], *chaque énoncé ne fait appel qu'aux définitions et résultats exposés précédemment dans ce Livre ou dans les Livres <u>antérieurs.</u>* [*O modo de exposição seguido é axiomático e procede, frequentemente, do geral ao particular. As necessidades da demonstração exigem que os capítulos sigam, em princípio, em uma ordem lógica*

> *rigorosamente fixada.* [...] *O tratado está dividido em Livros, e cada Livro, em capítulos.* [...] *Nos* <u>*seis primeiros*</u> *Livros* [...], *cada enunciado faz apelo somente às definições e resultados expostos precisamente nesse Livro ou nos Livros* <u>*anteriores*</u>.]

Dado o altíssimo nível de excelência do grupo Bourbaki, podemos inferir das passagens mencionadas: O tratado *Éléments des Mathématiques* não se destina a ensinar àqueles que não sabem, mas a mostrar, a quem já possua sólido conhecimento matemático, como a matemática pode ser desenvolvida, com base em uma lógica de regras bem estabelecidas, a partir de um pequeno núcleo de noções e proposições aceitas de início. De fato, Paul Halmos, em um artigo ("Nicolas Bourbaki", Scientific American, vol.196 (1957), nº 5, pp 88-97), após descrever o imenso empenho associado à produção de um volume da grandiosa obra de Bourbaki, conclui:

> *O resultado desse esforço penoso não é um livro de texto que se possa pôr sensatamente nas mãos de um principiante (inclusive Bourbaki assim o admite), mas é um livro de referência, quase uma enciclopédia, sem o qual a matemática do século XX seria, para melhor ou para pior, completamente diferente do que é* [*without which 20th-century mathematics would be, for better or for worse, quite different from what it is*]

Cabe lembrar neste ponto o poeta maior do nosso vernáculo:

Mudam-se os tempos, mudam-se as vontades
Muda-se o ser, muda-se a confiança;
Todo o Mundo é composto de mudança,
Tomando sempre novas qualidades.
[...]
E afora este mudar-se cada dia,
Outra mudança faz de mor espanto:
Que não se muda já como soía.

Apesar dos tempos e das vontades, apesar do ser, da confiança, e dentro de um mundo repleto de mudança, vê-se claro, à luz do dia, que outra mudança faz de mor espanto: a matemática não muda já como soía.

Os *Elementos* de Euclides, a primeira obra a nos chegar inteira dos albores da sabedoria grega, também toma a matemática no seu começo (prend les mathématiques à leur début). Consequentemente, a sua leitura não supõe, em princípio, nenhum conhecimento matemático particular (sa lecture ne suppose donc, en principe, aucune connaissance mathématique particulière), mas somente certo hábito de raciocínio matemático e certo poder de abstração (mais seulement une certaine habitude du raisonnement mathématique et un certain pouvoir d'abstraction). O modo de exposição seguido é axiomático e procede, frequentemente, do geral ao particular e os Livros /

Capítulos seguem, em princípio, em uma ordem lógica rigorosamente fixada (le mode d'exposition suivi est axiomatique et procède le plus souvant du général au particulier, et les chapitres se suivent, en principe, dans un ordre logique rigoureusement fixé). Além disso, "Euclides não tivera como fim *ensinar geometria*; - para as práticas geométricas bastavam outros professores, aqueles que, segundo disse Sócrates, mediam por divisão – antes dirigia-se a pessoas cultas que sabiam geometria e para quem pretendia mostrar como as verdades geométricas se ordenam no entendimento".

Portanto, guardados os tempos e as vontades, tais os *Éléments des Mathématiques* de Bourbaki assim os *Elementos* de Euclides.

Por baixo da forma, no entanto, há um conteúdo essencial de avanços e recuos, de intuições hauridas por acúmulos seculares de experimentação, que é preciso desvendar. Captar o que encerra esse mistério que se esconde na mente dos autores é a tarefa da pesquisa histórica de que se serve o crítico, o ἐξηγητής.

Toda obra importante daquela fonte aparentemente inesgotável e inspirada pelos deuses do Olimpo, da qual os *Elementos* constituem um dos supremos exemplos, foi objeto, no correr dos anos, desde muito cedo, do escrutínio de admiradores estudiosos que tentavam pôr-lhe à mostra, para todos os interessados, aquele "conteúdo essencial".

O *magnum opus* de Euclides não foi uma exceção. Dos primeiros séculos da nossa era, até os tempos atuais, tem sido alvo de considerações e comentários, i.e., no dizer de Federico Enriques, de "la critica antica e moderna", em que pontifica o escrito de Proclus, um antigo chefe da escola neoplatônica no século V A.D., trabalho, cujo título latino "In Primum Euclidis Elementorum Librum Commentarii" (Comentários ao Primeiro Livro dos Elementos de Euclides), esclarece o seu propósito.

Na esteira de Proclus, Beppo Levi fez publicar, pela Editorial Rosario, de Rosario, Argentina, em 1947, o seu comentário intitulado "Leyendo a Euclides".

Tenho em mente fazer um comentário de segunda ordem, ou seja, um comentário ao comentário de Beppo Levi.

Todo homem, no menor dos seus atos, é uma consequência de todas as etapas da sua vida pregressa, do mesmo modo que, postados os axiomas necessários, na sequência de passos de uma demonstração formal, cada um desses passos é um desdobramento de todos os anteriores.

O que o homem é, o que faz, está, mesmo que não o saibamos como, condicionado por tudo o que foi: pelo leite que o amamentou, pela mão que o embalou, pelos jogos que jogou, pelas escolas que frequentou, pelos livros que estudou, pelas montanhas que escalou, pelos rios em que nadou, pelos sonhos que sonhou, pelos moinhos que enfrentou.

Principio então por apresentar esse matemático italiano de excelente cepa, cuja diminuta estatura e frágil compleição faz-nos pensar em um puro intelecto.

Nasceu ele aos 14 dias de maio de 1875 em Turim, na Itália, quarto dos dez filhos da família judaica de Giulio Giacomo Levi, advogado, e da sua esposa Diamantina Pugliese. Fora antecedido por um irmão, que viveu apenas alguns meses, e por duas irmãs, vindo a se tornar, por isso, o filho mais velho dessa numerosa estirpe, e um dos arrimos da mesma, dada a sua nada confortável situação econômica, com o falecimento, em 1898, de Giulio Giacomo. Veremos, posteriormente, como tal fato influenciou em decisões tomadas pelo nosso matemático.

Beppo Levi começou a estudar matemática na Universidade de Turim aos 17 anos e obteve a sua *laurea*, uma espécie de doutoramento, aos 21 , com um trabalho em geometria algébrica, levado a cabo sob a supervisão de Corrado Segre. Deve-se ressaltar que Levi teve, em Turim, a rara felicidade de formar-se na famosa escola italiana daquele ramo da matemática, sob a batuta de professores como o já mencionado Corrado Segre, Eugenio d'Ovidio, Giuseppe Peano e Vito Volterra.

Entre 1897 e 1899, Levi publica sete trabalhos, o que já torna conhecido o seu nome nesse campo da geometria.

Ao longo da sua vida, a versatilidade na sua ciência foi a sua marca distintiva. Conquanto fosse a geometria algébrica a sua principal área de atuação, imprimiu igualmente o seu selo na Análise Matemática, na Teoria dos Números, na Teoria dos Conjuntos, na Lógica, e na Educação Matemática.

Em 1899, tendo sido por três anos assistente na cátedra do Professor Berzolari da universidade que frequentara, em vista da necessidade de ajudar a família, passa a militar na docência secundária, exercendo-a até 1906. Nesse interlúdio, a sua produção matemática não sofreu solução de continuidade. Entre 1900 e 1906 apareceram aproximadamente vinte e cinco das suas publicações tanto na geometria algébrica quanto na análise matemática. Aliás, como foi dito (Schappacher & Schoof, 1996), entre 1897 e 1909, Levi participou ativamente de todos os novos desenvolvimentos da matemática dessa época. Assim, foi talvez o primeiro a formular e criticar o famoso axioma da escolha, usualmente atribuído a Zermelo.

Em 1906, ganha, por concurso, a cátedra de Geometria Projetiva e Descritiva da Universidade de Cagliari. Em 1909, já livre da obrigação de ajudar a família, casa-se com Alina Bachi.

Mario Bunge diz, no seu Prólogo na segunda edição de *Leyendo a Euclides*: "Irónicamente, este gran hombre ha sido llamado el matemático mas petiso del siglo, era jorobado, tenía uma voz chillona, y estaba casado con una mujer hermosa, con quien tuvo tres hijos, entre ellos Laura, la física de la familia" (Ironicamente, esse grande homem foi chamado o matemático mais miúdo do século, era corcunda, tinha uma voz estridente, e estava casado com uma mulher formosa, com quem teve três filhos, entre eles Laura, a física da família). A filha Laura também enfatiza o seu pai ter um "rostro agradable e interessante pero era de muy pequeña estatura y algo encorvado" (rosto agradável e interessante, mas era de estatura muito baixa e algo encurvado).

Embora tivesse a vida em Cagliari os seus encantos, havia nela certa precariedade e seria humanamente natural que Beppo Levi aspirasse a uma nomeação para alguma universidade de maior prestígio. Assim, em dezembro de 1910, ganha o concurso para a cátedra de Análise Algébrica da Universidade de Parma. Nessa cidade, de fato, nascem os seus três filhos mencionados acima, Giulio em 1913, Laura em 1915 e Emilia em 1921.

Acontece que, por essa época, a Universidade de Parma não tinha a mesma importância que aquelas de Turim, Bolonha ou Roma. Por exemplo, não estava habilitada a outorgar *laurea* em especialidade científica, como matemática e física. Nos dez anos subsequentes à nomeação de Levi, houve um acréscimo significativo na atividade científica levado a efeito com a ajuda de novos contratados matemáticos, do alto nível de um Gaetano Sforza, de um Antonio Signorini, de um Leonida Tonelli. De 1918 a 1920, Levi fundou e dirigiu o Instituto de Matemática da Faculdade e propôs cursos de matemática superior que dariam à Faculdade condições para conferir a *laurea* em matemática.

Depois do abalo causado pela Primeira Guerra Mundial, em cuja frente de batalha o nosso matemático perdeu os irmãos Eugenio Elia e Decio, tendo, o primeiro dos quais, interrompido, com a sua morte, o que se prenunciava um brilhante futuro na matemática, sendo, quando se apresentou como voluntário ao exército, professor na Universidade de Gênova, depois desse abalo, a vida universitária retomou o seu ritmo normal até 1922, quando começaram a soar os primeiros tambores de alerta pela entrada em cena do fascismo. Inicia-se então um período desfavorável às grandes atividades do espírito, e a Universidade de Parma, de 1923 a 1927, assiste atônita à destruição progressiva das suas conquistas da década passada. Em 1924, a Faculdade então existente foi transformada em Faculdade de Ciências Químicas, havendo Levi permanecido como o seu único matemático, encarregado de um curso de Matemática Especial para Químicos. Mas os reveses do destino não abatem as grandes mentalidades e, nesse tempo adverso, damos com Levi apresentando alguns trabalhos em que trata matematicamente problemas da física. A triste história desse período inglório culmina, no final do ano acadêmico de 1927-1928, com a extinção daquela Faculdade. Fechava-se, com estrondo, uma porta ao fim de quase vinte anos de labuta, mas, um pouco mais distante, depois de alguns percalços, abria-se outra mais promissora. No final de 1928, Levi assumiu a cátedra de Elementos de Teoria das Funções na Universidade de Bolonha, cidade que é, por tradição, um bastião universitário, orgulhosa de ser a sede da mais antiga universidade do mundo, *Alma Mater Studiorum.*

Abro um parêntese no rumo que tomava a vida acadêmica de Levi, para mencionar uma extraordinária e inusitada publicação, de um matemático de semelhante jaez. Falo do *Abbaco*, um livro de aritmética para crianças que estão aprendendo a contar, aparecido em 1922, em que se salienta que o "fundamento da aritmética é a sucessão dos números inteiros" e que "o ensino da aritmética começa depois de a criança saber repetir certa extensão de tal sucessão".

A escola de Bolonha, cuja fundação remonta a 1088, destacou-se inicialmente, com o nome de *Studium*, como centro de estudos jurídicos, porém, a partir do século XVI, há um avanço das especialidades científicas, especialmente da matemática.

Entre os professores de matemática dessa época, é dever ressaltar Luca Pacioli, autor do memorável livro *De Divina Proportione*, que lecionou em Bolonha em 1501-1502.

Concomitante com a unificação da Itália em 1860, houve a consolidação dos estudos científicos, de início orientados à formação de engenheiros e especialistas em outras ciências aplicadas. O efetivo renascimento da matemática na Universidade de Bolonha deu-se, sem dúvida, quando, em 1880-1881, aparecem os matemáticos Salvatore Pincherle, Cesare Arzelá e Luigi Donati a quem se uniram, no começo do século XX, outros de igual calibre.

Em 1923, Pincherle fundou a União Matemática Italiana e, pouco depois, no âmbito da Faculdade de Ciências, o Instituto de Matemática.

É isso que Levi encontra em Bolonha.

Em termos docentes, teve sempre a seu cargo dois cursos: um de *Análise Algébrica* ou *Análise Matemática*, para uma plateia mais ampla de estudantes de Matemática, de Física e de Engenharia, e o outro de nível mais elevado, *Elementos de Teoria das Funções* ou *Análise Superior*, para alunos mais adiantados de matemática.

Da recordação de Franco Levi, sem parentesco com Beppo, antigo aluno de Engenharia e depois professor de Física em universidades italianas:

> *Beppo Levi era extremamente equilibrado e era dotado de grandes possibilidades da mente e do espírito, porém desgracioso de corpo. Com mais ou menos um metro e vinte de altura e uma linda cabeça inteligente sobre um corpo infantil, tinha uma voz difícil de controlar nos agudos. Expunha as suas aulas com exemplar clareza, mas devia quase arrojar-se sobre as grandes mesas-lousa para escrever sobre o plano horizontal, uma vez que não se podia servir do quadro-negro vertical. No início da primeira aula, os jovens riam-se, mas por pouco tempo; enquanto se acostumavam com a sua voz e o seu aspecto, eram arrastados pelo conteúdo e pela maneira de expô-lo; sentiam que um piloto seguro os levava ao alto mar aberto. Depois dos primeiros minutos, os alunos estavam subjugados, logo fascinados e a rigorosa análise matemática tornava-se emocionante como uma aventura.*

Além de prosseguir na sua intensa atividade científica, Levi foi nomeado membro da Comissão de Redação da União Matemática Italiana e, como tal, recebia artigos submetidos à publicação no Boletim daquela entidade.

Em consequência dessa atividade de responsável editorial, Levi manteve certa correspondência com o matemático argentino Juan Carlos Vignaux que, em 1937, enviara um trabalho ao Boletim da União Matemática Italiana. Esse fato teve uma importância capital quando, um pouco mais tarde, os judeus italianos enfrentaram os rigores desumanos das leis antissemitas de 1938.

Isso tudo faz-nos lembrar o que dizia Hardy: “a matemática é um jogo de jovens”, e os versos de Pessoa:

Caiam cidades, sofram povos, cesse
A liberdade e a vida,
Os haveres tranquilos e avitos
Ardem e que se arranquem,
Mas quando a guerra os jogos interrompa,
Esteja o rei sem xeque,
E o de marfim peão mais avançado
Pronto a comprar a torre.

Neste caso, no entanto, a torre da inteligência e do humanismo não foi comprada pelo peão antropofóbico das tiranias irracionais que devastaram a Europa.

Felizmente, graças aos contatos científicos anteriores, pode o jogo desse jovem matemático de 64 anos ter prosseguimento em Rosário, na Argentina, quando ali desembarcou com a sua esposa e as duas filhas, em novembro de 1939, na condição de diretor do recém criado Instituto de Matemática da Faculdade de Ciências Matemáticas, Físico-Químicas e Naturais aplicadas à Indústria, da Universidad Nacional del Litoral.

Na posição de diretor do Instituto, Beppo Levi pode dar azo à sua vontade de ser útil a esse novo ambiente, que o acolhera com cordialidade e reconhecimento da sua importância como pensador, assumindo um papel de difusor do pensamento matemático, compensando assim as dificuldades encontradas para o desenvolvimento de trabalho original de alta estirpe, dada a escassa tradição no campo da pesquisa ali vigente.

Em que pese o fato de não ter chegado a formar uma escola, sua influência fez-se sentir por todo o ambiente, pelo seu entusiasmo e pela profundidade do seu trabalho, pela sua atividade de difusor do pensamento matemático, que o levou a estimular a aparição de publicações periódicas próprias do Instituto: primeiramente a *Publicaciones del Instituto*, cujo primeiro número, com artigos dele próprio, de Santaló e de Amodeo, apareceu já em 1939; depois, em 1941, as *Mathematicae Notae*, criação de Levi, do título ao conteúdo e forma convenientes, em que o rigor matemático do que era publicado unia-se à intenção de que fossem palestras úteis a jovens e estudantes.

Por mais de vinte anos labutou à frente do Instituto que, hoje, leva o seu nome e se, como diz a sabedoria do povo, não se escolhe o local em que se nasce, Beppo Levi escolheu aquele que receberia os seus restos mortais, pois, tendo, ao término da Segunda Guerra Mundial, a oportunidade de regressar, em julho de 1945, ao seu cargo de professor da Faculdade de Ciências da Universidade de Bolonha, preferiu permanecer em Rosário, onde faleceu em 28 de agosto de 1961.

De todas as suas publicações resultantes da sua estada na Argentina, dou relevo ao livro *Leyendo a Euclides*, idealizado, como afirma Laura Levi, a percorrer a obra euclidiana de um modo acessível a um público culto geral, pondo em evidência também as características do pensamento científico-filosófico induzido pela leitura de Euclides.

É óbvio que Levi conhece o *In Primum Euclidis Elementorum Librum Commentarii* (Comentários ao Primeiro Livro dos Elementos de Euclides) de Proclus e ainda em 1937 publicou no Boletim da União Matemática Italiana uma resenha do famoso *Gli Elementi d'Euclide e la Critica Antica e Moderna* de Federico Enriques e colaboradores. Assim, não seria injusto supor ter ele se inspirado nesses livros para escrever o seu.

A mencionada obra do escoliasta grego é introduzida por um extenso prólogo histórico, que se costuma bipartir. Enquanto a primeira parte diz respeito à matemática em geral e na qual se encompassam tópicos como: *O Status Intermediário do Ser Matemático*; *Os Princípios Comuns do Ser Matemático: O Limitado e o Ilimitado; Os Teoremas Comuns Governando os Tipos Matemáticos; De Que Modo Esses Teoremas Comuns Subsistem; A Função e os Procedimentos da Matemática Geral: O Seu Alcance; A Unidade Matemática; A Classificação Pitagórica das Ciências Matemáticas; A Classificação de Geminus das Ciências Matemáticas*, etc, a segunda porção aborda o que toca à geometria em particular, incluindo itens do seguinte teor: *O Assunto da Geometria Como Parte da Matemática Geral; Os Objetos e Métodos da Ciência Geométrica; O Alcance e a Utilidade* *da Geometria; A Origem e o Desenvolvimento da Geometria; Os Trabalhos Matemáticos de Euclides; O Propósito dos "Elementos"; O Significado de "Elemento"; O Arranjo das Proposições nos "Elementos"*.

Isso tudo é feito com amplas referências a Platão, sobretudo aos diálogos *República, Teeteto, Timeu, Górgias, Filebo, Político, Sofista e Mênon.*

O *Leyendo a Euclides* também é precedido por um longo texto (61 páginas) histórico-filosófico, intitulado *La Geometría y el Pensamiento Socrático* em que se recorre, sobejamente, a passagens da República, do Timeu, e de Teeteto.

Aliás, como esclarece Laura Levi, em *Nota a la Segunda Edición* do *Leyendo a Euclides*:

> *O livro consta de duas partes: uma primeira que se pode considerar uma introdução histórico-filosófica aos* Elementos *de Euclides, e uma segunda, em que os* Elementos *são apresentados com as suas principais características.*

O objetivo desse prólogo é (ainda com a palavra Laura Levi) "localizar a obra de Euclides em um período próximo ao da vida de Sócrates, isto é, anterior de quase um século ao que se faz habitualmente. (...) Sem dúvida há algo de certo nessa observação; não obstante Sócrates ter morrido em 399 a.C., pode bem o pensamento dos filósofos que o rodeavam, em particular o de Platão, haver influenciado a obra de Euclides, ainda que este a haja efetivamente realizado quase um século mais tarde". De fato, a leitura atenta do texto, mostra que Levi "pretende, na realidade, relacionar a geometria de Euclides com o pensamento expresso nos diálogos" mencionados "de Platão, embora pondo em evidência que o pensamento platônico nasce precisamente do pensamento socrático."

Não pretendo avançar além dessas poucas observações sobre essa introdução de Levi. Chamo apenas a atenção para as suas seguintes palavras (pp.31-32):

> [...] *não tenho erudição; e, em particular, não conheço grego. Que, por essa razão, tivera que ler Euclides nas traduções, não surpreende ninguém, pois se trata de uma obra científica; mas terei que falar de Platão e das informações que se podem extrair dos* Diálogos *para iluminar o nosso estudo; tive também que lê-lo nas traduções; fiz o possível para que fossem traduções boas, que, com a fidelidade, unissem o gosto literário e, então, convenci-me de que é possível ler Platão, não com o fim deliberado de inteirar-se da filosofia platônica, mas do mesmo modo como se lê uma obra de literatura amena, em que o autor se esforça por apresentar os seus personagens nos seus respectivos modos de pensar, às vezes também contrastantes. Sem excluir, de início, que, como sempre ocorre, o pensamento do autor tenha os seus reflexos no desenvolvimento do drama, parece-me que, no geral, quando Platão faz Sócrates falar, são verdadeiramente os ensinamentos de Sócrates e às vezes também os seus modos o que se quer reproduzir.*

Com isso, deixo para trás o seu prólogo e começo propriamente a ler o *Leyendo a Euclides*.

Destaque-se, de saída, o seu objetivo. Assevera Levi:

> *Vamos pois ler os Elementos com o afã de entender, na sua significação, na sua formação, no seu desenvolvimento, aquele pensamento dedutivo que se funda sobre a fé na identidade humana entre conhecer e entender.*

Aquele pensamento dedutível apontado é ressaltado em atuação na sequência:

> *Em Euclides vemos, pela primeira vez na história do pensamento, em ação o propósito de fazer com que os primeiros princípios sobre os quais se vai trabalhar a dedução sejam poucos, simples, e sua proveniência seja antes a contemplação e a reflexão do que a material e a instrumental.*

Um tal tipo de afirmação encontra apoio no *Comentário* de Proclus.

Ao prosseguir, Levi explica como Euclides estrutura o arcabouço desse tratamento da geometria:

> *Euclides começa a sua exposição com um grupo de proposições simplesmente afirmadas e que o leitor deve aceitar; estão divididas em três categorias: definições, postulados e noções comuns.*

Conforme foi anteriormente mencionado, apesar de bem casado com a geometria algébrica, Levi manteve, ao longo das décadas, um namoro platônico com a lógica matemática. Prova disso são os artigos – as suas cartas de amor a ela – dentre os quais ressalto: *Intorno alla teoria degli aggregatti*, de 1902; *Antinomie Logiche*, de 1908; *A proposito di logica matematica*, de 1922; *Ancora sulla logica matematica*, de 1923; *Sui procedimenti transfiniti*, também de 1923; *Nota di logica matematica*, de 1933; e *Considerazioni sulle esigenze logiche della nozione del reale e sul principio delle infinite scelte*, de 1933.

É esse gosto que o leva a assinalar:

> *Apressa-se, em seguida, o pensamento para outro terno de premissas que, nas modernas teorias lógicas, se antepõem a qualquer dedução, com os nomes totalmente parecidos de* ideias primitivas, postulados *(às vezes também* axiomas*) e* definições*. Há entre ambos os sistemas certo parentesco, porém não identidade.*

Uma vez assentada a existência dessas noções no início das teorias matemáticas, cumpre o escoliasta o papel de explicá-las.

Referindo-se às definições, aos postulados e às noções comuns, diz:

> *Observamos, então, que as definições euclidianas estão reunidas muitas no princípio da obra, antes mesmo dos postulados e axiomas"* (teria dito melhor "noções comuns"; Euclides jamais usa a expressão "axioma"), *"depois em número menor, e em geral com significado mais técnico, no princípio dos distintos Livros.*

E, agora, uma interpretação interessante à respeito dessas primeiras definições:

> [...] *não parece absurdo supor que se trata simplesmente, na intenção do autor, de algo como um pequeno vocabulário, para se entender com o leitor sobre o uso e o significado de determinados termos não pertencentes à língua comum;* guia *para a leitura, não parte integrante do texto.*

Vale a pena abrir um parêntese, neste ponto, para tentar surpreender como o desconhecimento do grego clássico induz em Levi a ideia de tomar as definições do Livro I como um "guia para a leitura".

A palavra grega que se traduz por "definições" é ὅροι. ὅρος (singular) significa "limite" (de um campo), donde "termo, confim", marcado por uma pedra, uma coluna, etc., igualmente "fronteira" (de um território) e, na lógica, "definição". Seguindo G. Vacca e F. Enriques, Levi tem que a tradução espanhola literal para a expressão de Euclides seria "confines, mojones". De fato, "mojón" tem por significado "sinal permanente para fixar os limites", expressão derivada do latim-hispânico *mutulo, -onis*, que, por sua vez, provém do latim *mutulus, -i*, termo da arquitetura para "pedra grossa ou peça de madeira para servir de suporte; modilhão, mútulo" (*mutulus*: *lignum vel lapis extra parientem prominens, ad faciendas coronas, aut tignorum capita, vel ad quippiam aliud sustinendam*, "madeira ou pedra, projetando-se para fora da parede, para fazer cornijas ou cabeças de barrotes, ou para sustentar qualquer outra coisa"). Do significado de *mutulus* poder-se-ia também tirar "pedaço de pau fincado na parede para pendurar objetos" e disso facilmente se passaria a "algo fincado no solo". Daí, possivelmente, por extensão, viria a outra acepção de "mojón", a que Levi alude, "sinal que se coloca em um lugar despovoado para que sirva de *guia*".

Temos aí um exemplo de como a expressão que traduz abre um campo semântico a que aquela traduzida não conduz.

No que toca aos postulados e às noções comuns, Levi é categórico.

"Os *postulados* e as *noções comuns* deveriam assemelhar-se uns e outras ao que modernamente se chama postulado (ou axioma); e que a diferença não tenha sempre sido percebida pelos geômetras sucessivos demonstra-o o fato de que, em transcrições distintas, algumas dessas proposições têm emigrado de um grupo ao outro. No entanto, essa diferença no conceito do autor foi certamente muito grande." E esclarece. "Formalmente os postulados são afirmações de operações geométricas que podem ser efetuadas: traçar uma reta, traçar uma circunferência, determinar a intersecção de duas retas; mais precisamente, são afirmações de existência e determinação unívoca de determinadas figuras; apesar da expressão operativa e, portanto, cinemática dos verbos traçar e prolongar, devem ser concebidos no significado abstrato e estático.

As *noções comuns* são, aparentemente, a expressão das propriedades fundamentais das "classes" de objetos (na terminologia moderna, dos *conjuntos*); e, com efeito, são as mais comumente citadas por Aristóteles, o codificador da teoria das classes, quando pretende apresentar exemplos matemáticos; também, por essa razão, interpreta-se, mais comumente, a palavra *comuns* no sentido de "comuns a todas as ciências"." Levi continua categórico ao asseverar a sua intenção de mostrar que essa última interpretação de *comuns,* por um bom número de autores, não corresponde à de Euclides. E acrescenta: *"Preferivelmente, poderíamos considerá-las como os postulados gerais da noção geométrica de igualdade."*

Na sequência lê, com alguns comentários, umas poucas das vinte e três definições iniciais dos *Elementos*. Enuncia, então, os cinco postulados, observando, como já o fizera, que

> *Se deixarmos de lado o quarto postulado, cada um dos outros enuncia que certa coisa pode ser feita: traçar, prolongar, encontrar o ponto comum; evidentemente esse fazer tem sentido existencial, intelectivo, e, considerando o encontrar-se em um ponto como dual de traçar uma linha, adquirem uma homogeneidade conceitual que, talvez, diminua um pouco a estranheza que em todo tempo o quinto apresentou aos geômetras:*
> - Existe *e* é único *o segmento que une dois pontos quaisquer.*
> - Existe *e* é único *o prolongamento retilíneo de um segmento, a partir de um qualquer dos seus extremos.*
> - Existe *e* é única *a circunferência em um plano dado, com centro dado e por um ponto dado do plano.*
> - Existe *e* é único *o ponto de intersecção de duas retas coplanares, quando existe outra reta que corta as duas, formando com elas ângulos da mesma parte cuja soma é menor do que dois ângulos retos.*

Levi, parece-me, tem um gosto especial pelas digressões, tudo, neste caso fica evidente, pelo amor à divulgação do conhecimento. Por isso, nesta altura, desvia-se de Euclides, para dar notícia de que, na linguagem matemática moderna, tem-se feito frequentemente distinção entre *proposições existenciais* e *proposições construtivas*, ressaltando que tal estado de coisas está vinculado à chamada aritmetização da matemática, que, com Kronecker, Weierstrass, Dedekind, parte da intenção de edificar toda a análise sobre o conceito primitivo de *número inteiro*.

Ao retomar o seu caminho pelos meandros projetados na obra do alexandrino, adverte: "Com o enunciado dos postulados entendemos que Euclides quis aclarar o "existe" com o "pode-se"; mas, qualquer que seja a palavra, pede ao leitor que haja refletido bastante para conceber – e considerar sem contradição – os conceitos enunciados, com as propriedades que lhes são atribuídas; para dizê-lo com palavras modernas, Euclides define com os postulados as *ideias primitivas* do seu sistema. Para ajudar a linguagem com o desenho, esses conceitos poderiam, em cada caso, ser representados por figuras, e isso justifica o "pode-se"; mas está sempre entendido que o que o geômetra afirma não se refere à imagem física, mas ao conceito mental que se quer com ela representar. Assim nos adverte Sócrates.”

A respeito do quarto postulado: “E serem iguais entre si todos os ângulos retos”, Levi começa por dizer: “O postulado 4 representou sempre, para os comentaristas, sérias dificuldades de interpretação, como a de fazê-lo emigrar, às vezes, para as noções comuns, ou de considerá-lo como um acréscimo devido à corrupção dos textos”. Nesse passo, ele tem em mente o que expressa Proclus, no início das suas observações sobre tal postulado:

> Τοῦτο εἰ μεν ὡς ἐναργὲς καὶ μὴ δεομενον ἀποδείξεως συγχωροῦμεν, αἴτημα μὲν οὐκ ἔστι κατὰ τὸν Γεμῖνον, ἀξίωμα δέ. [*Se aquiescemos isto como manifesto aos olhos da mente e não requerendo demonstração, não é postulado, segundo Geminus, mas axioma*]

Levi prossegue:

> [...] *surpreende, com efeito, a sua forma aparentemente heterogênea com os demais postulados e pela aparição da noção de igualdade, comparável antes com magnitude. Mas, mais notável contudo é o fato de que, nos desenvolvimentos sucessivos, falta toda alusão direta ao mesmo, de maneira que se pode dizer que, na construção euclidiana, não tem aplicação visível.*

Depois de praticamente rejeitar uma interpretação de Heath para a utilidade do postulado, como pouca munição para muita guerra, acrescenta o seguinte:

> *Há, no entanto, outra interpretação perfeitamente orgânica do postulado 4; quiçá tão orgânica de modo a suscitar outras interrogações acerca do pensamento que guiara o autor. Os elementos com que está construída a geometria de Euclides são segmentos e ângulos; veremos logo, ao analisar os primeiros teoremas, o trabalho fundamental que cumprem os axiomas em relação à operação de* transporte *das figuras, para o qual o instrumento principal é o círculo que, na interpretação existencial do postulado 3, deve se considerar como figura dada antes que gerada por movimento contínuo. Mas, de imediato, o círculo tem vinculação com os segmentos, não com os ângulos. Para chegar a esses, servem os teoremas sobre a igualdade dos triângulos, dos quais provém que o transporte de um ângulo qualquer poderá ser conseguido quando se saiba transportar um ângulo determinado. A escolha, para esse fim, do ângulo reto teria podido, então, apresentar-se como a mais natural, também por razões de tradição, coincidindo substancialmente com as considerações de simetria, a que devem referir-se as demonstrações intuitivas de Sócrates no* Mênon. *O postulado 4 viria, desse modo, a combinar com os anteriores, como figura elementar, estaticamente concebida, independentemente de um procedimento concreto de construção. Mas, no*

> *desenvolvimento efetivo que segue, Euclides dirige-se, para esse fim, a outra consideração, substancialmente equivalente, mas de manejo mais fácil para recusar o uso de instrumentos de transporte rígido, isto é, a igualdade de cada ângulo consigo mesmo depois de permutar os lados. Admitirá, com efeito, essa igualdade na proposição I.5* (*Os ângulos junto à base dos triângulos isósceles são iguais entre si, e, tendo sido prolongadas ainda mais as retas iguais, os ângulos sob a base serão iguais entre si.*)*, para estabelecer as propriedades do triângulo isósceles, sem enunciá-la explicitamente como postulado; e dessas propriedades resultam, sem necessidade de dirigir-se ao postulado 4, as das retas perpendiculares e ângulos retos.*

Ao escrever as suas considerações sobre as *noções comuns*, há que pôr em evidência aquela que toca à seguinte: "E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si" que ele dá na seguinte tradução, evidentemente equivalente, "E as coisas coincidentes são iguais entre si". Diz ele:

> *A palavra* coincidir *é a que mais deve atrair a nossa atenção. Na concepção geométrica mais comum, considera-se-a equivalente a* sobrepor-se*; e essa última inclui uma ideia de movimento. Agora, há muitas razões para considerar que o movimento não pode ter lugar na geometria. Se o movimento é ocupar sucessivamente várias posições, é evidente que não é possível falar dele sem ver aparecer a ideia de "tempo", incluída no vocábulo* sucessivamente. *Mas o tempo não pertence à geometria e não é possível construir a mecânica sem o substrato da geometria. E, para o nosso argumento, deve-se acrescentar que considerações dessa natureza haviam sido objeto de disputa entre os filósofos, precisamente no tempo da primeira gestação da geometria racional. Nos fins do século VI ou princípios do V a.C., Zenão havia materializado, nos paradoxos contra o movimento, as discussões acerca do ser e do devir. Portanto, devemos pensar que, por razões não demasiado diferentes das mesmas que fazem excluir o movimento da crítica geométrica moderna, a mesma exclusão estivera no programa geométrico de Euclides. Constata-se, com efeito, que os casos em que a consideração do movimento rígido parece apresentar-se com a interpretação mais imediata do texto euclidiano são absolutamente contados – não mais do que dois ou três – ao passo que é muito maior o número de vezes em que, pela admissão desse movimento, as demonstrações teriam resultado mais breves. Deveríamos crer que só de vez em quando, forçado pela necessidade, Euclides rompe a aludida lógica que é quase a razão de ser da sua geometria? Que o faz sem avisar o leitor?*

Tendo, depois, ressaltado que “a análise que vem a seguir das primeiras proposições do texto euclidiano vai mostrar que elas, em que pese a sua expressão aparentemente escolástica, têm, na construção dos *Elementos*, um papel geométrico essencial, comparável, em boa parte, à função que têm, nas modernas teorias, os postulados com que se caracteriza a congruência”, dá-nos essa análise mencionada.

As suas considerações abrangem os vários Livros dos *Elementos* nos diversos capítulos em que está dividido o seu trabalho:

I. *Definições, Postulados, Noções Comuns. A Teoria da Igualdade.*

II. *A Soma dos Ângulos de um Triângulo e o Postulado V.*

III. *A Álgebra Geométrica e a Teoria das Proporções.*

IV. *O Método de Exaustão.*

V. *O*s *Livros Aritméticos*.

Ao longo desses capítulos, damo-nos conta do alto grau de conhecimento e erudição de Levi, quer pelas opiniões firmadas quer pela longa gama de autores citados.

Com o que está dito, tenho consciência de mal ter arranhado a superfície das coisas.

Sirva o feito, então, como um convite para que se beba diretamente da fonte. Pois,

Ao contrário das rosas dos jardins de Adônis,

Essas vólucres rosas
Que em o dia em que nascem,
Em esse dia morrem”,

neste mundo repleto de mudanças, de tantas e tão grandes lides, Beppo Levi, com o seu livro, faz-nos ver

quão belas, eternas, imutáveis
são as flores dos jardins de Euclides.

Bibliografia

BOURBAKI, N. *Théorie des Ensembles.* New York: Springer. 1990.
CAMÕES, L. de. *Obra Completa.* Rio de Janeiro: Companhia Aguilar Editora, 1963,
HALMOS, P.R. “Nicolas Bourbaki”. *Scientific American*, vol.196(1957), n° 5, 88-97.
HARDY, G.H. *A Mathematician’s Apology.* Cambridge: Cambridge University Press, 1976.
LEVI, Beppo. *Leyendo a Euclides.* 2ª ed.. Buenos Aires: Libros del Zorzal, 2000.

LEVI, Laura. *Beppo Levi, Italia y Argentina en la Vida de un Matemático.* Buenos Aires: Livros de Zorzal, s. d.
PESSOA, Fernando. *Obra Completa*. Rio de Janeiro: Companhia Nova Aguilar, 1965.

Irineu Bicudo
Departamento de Matemática – UNESP – campus de Rio Claro – Brasil

E-mail: ibicudo@rc.unesp.br