Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 13 nº 26 - pág. 01-21
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

EL PRIMER TOMO DE LAS CARTAS FÍSICO-MATEMÁTICAS DE TEODOSIO A EUGENIO. UN CURIOSO TEXTO GEOMÉTRICO EN FORMATO EPISTOLAR

Antonio M. Oller Marcén
Centro Universitario de la Defensa – Academia General Militar – Espanha

Vicente Meavilla Seguí
Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza – Espanha

(aceito para publicação em abril de 2013)

Resumen

En este trabajo presentamos y analizamos en detalle el primer tomo de las *Cartas Físico-Matemáticas de Teodosio a Eugenio*. Un texto de geometría poco conocido, escrito en formato epistolar por el portugués Teodoro de Almeida a finales del XVIII.

Palabras clave: Geometría, Portugal, Siglo XVIII, Texto Epistolar.

[THE FIRST BOOK OF THE CARTAS FÍSICO-MATEMÁTICAS DE TEODOSIO A EUGENIO. A CURIOUS GEOMETRY TEXT IN EPISTOLARY FORM]

Abstract

In this work we present and analyze in detail the first book of the *Cartas Físico-Matemáticas de Teodosio a Eugenio*. A little-known geometry text written epistolary form by the Portuguese Teodoro de Almeida at the ending of XVIII century.

Keywords: Geometry, Portugal, Eighteenth century, Epistolary text.

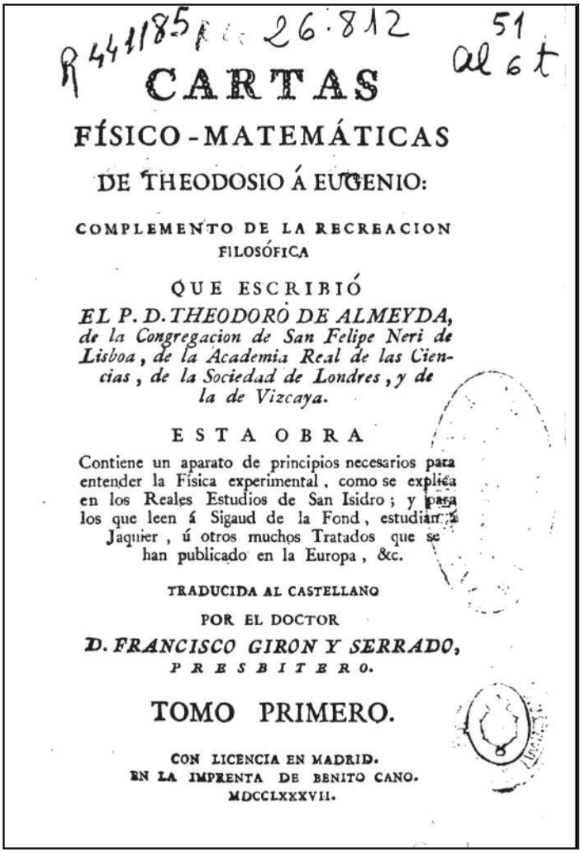
1. Introducción.

Figura 1. Retrato del Padre Teodoro de Almeida

El Padre Teodoro de Almeida nació en Lisboa el 7 de enero de 1722 y murió en esa misma ciudad el 18 de abril de 1804. Cofundador de la Academia de Ciencias de Lisboa, socio de la Royal Society de Londres y miembro de la Real Sociedad Bascongada de amigos del país. Se trata de una figura relativamente importante de la Ilustración portuguesa (Azevedo, 1979) y fue autor de una obra bastante extensa y leída en su época (Borralho, 2001). Entre dicha obra destaca, quizás, la *Recreação Filosófica* (Domingues, 1988) cuya vocación enciclopédica (fruto seguramente de su estancia en Francia entre 1767 y 1778) es evidente.

Esta obra se publicó en diez tomos, el primero de los cuales apareció en 1751 y el último en 1800. Los seis primeros se dedican a la filosofía natural, el séptimo a la filosofía racional, el octavo a la metafísica, el noveno a la teología natural y el décimo y último a la teología moral. Su fama fue bastante grande y fue editada varias veces tanto en castellano como en francés. De hecho, para 1792, antes incluso de que Almeida completara su obra, ya se habían editado en castellano los ocho primeros tomos (Almeida, 1792). Curiosamente, los tomos noveno y décimo se editaron en España separadamente y bajo el título de *Armonía de la razón y la religión* (Almeida, 1802).

Como complemento a la *Recreação Filosófica*, y más especialmente, de sus siete primeros tomos (los de contenido científico), Almeida compuso entre 1783 unas *Cartas Físico-Matemáticas* en tres tomos. También esta obra tuvo gran impacto en España, siendo traducida por primera vez al castellano en 1787 (Almeida, 1787) y después en otras múltiples ocasiones, siendo en 1827 (Almeida, 1827) la última de la que tenemos noticia. Estas cartas presentan temas más avanzados de Geometría, Física y Mecánica que no recibieron atención en la *Recreación Filosófica* puesto que "*hay cuestiones que* [...] *no son para la capacidad de los principiantes*".



CARTAS
FÍSICO-MATEMÁTICAS
DE THEODOSIO Á EUGENIO:
COMPLEMENTO DE LA RECREACION FILOSÓFICA
QUE ESCRIBIÓ
EL P. D. THEODORO DE ALMEYDA, de la Congregacion de San Felipe Neri de Lisboa, de la Academia Real de las Ciencias, de la Sociedad de Londres, y de la de Vizcaya.
ESTA OBRA
Contiene un aparato de principios necesarios para entender la Física experimental, como se explica en los Reales Estudios de San Isidro; y para los que leen á Sigaud de la Fond, estudian á Jaquier, ú otros muchos Tratados que se han publicado en la Europa, &c.
TRADUCIDA AL CASTELLANO
POR EL DOCTOR
D. FRANCISCO GIRON Y SERRADO,
PRESBITERO.
TOMO PRIMERO.
CON LICENCIA EN MADRID.
EN LA IMPRENTA DE BENITO CANO.
MDCCLXXXVII.

Figura 2. Portada de la primera edición en castellano de las *Cartas*

En este trabajo vamos a centrar nuestra atención en el primero de los tres tomos que forman las *Cartas*, cuya temática única es la Geometría y que, de hecho, es el único texto de contenido matemático escrito por este autor.

2. Estilo y estructura del primer tomo de las *Cartas*.

El Padre Almeida escribió la *Recreación Filosófica* en forma de diálogo. Tres personajes: Eugenio, Silvio y Teodoro (éste último actuando como maestro) conversan durante varias tardes acerca de los temas más diversos. El estilo es, de hecho, muy similar al del *Diálogo Sobre los dos Máximos Sistemas del Mundo* de Galileo.

Sin embargo, la obra que nos ocupa ya no sigue ese mismo esquema. Como indica su propio título el texto se organiza como una serie de cartas del maestro Teodoro a su discípulo Eugenio en las que trata de ampliar los conocimientos de este. En la carta preliminar leemos:

> "*Amigo Eugenio, he recibido tus cartas, en que con amor y cortesía me condenas, por haberte dejado ignorante en muchas materias de Física, en las que ahora te hallas embarazado. Dices que lees muchos libros de Física en lengua francesa* [...] *y que no los entiendes...*"

Existen ejemplos antiguos (el *Método* de Arquímedes o las *Cónicas* de Apolonio) en los que el texto matemático viene precedido de una introducción a modo de carta. Sin embargo estas dedicatorias simplemente parecen indicar el modo en que los trabajos matemáticos circulaban en aquella época y el estilo del texto posterior no refleja rasgos epistolares.

La organización de un texto matemático en la forma (ficticia) de una serie de cartas parece ser un caso sumamente excepcional en la historia de la Matemática. De hecho, no hemos sido capaces de encontrar otros ejemplos, lo que convertiría la obra que nos ocupa en un caso único.

La obra se inicia con un listado de suscriptores y un prólogo de tres páginas por parte del traductor. El texto propiamente dicho se estructura en torno a siete cartas y un epílogo y se concluye con 15 láminas desplegables que contienen 276 figuras. En concreto, el índice es el siguiente:

- Carta preliminar, que sirve de prólogo para las demás cartas.
- Carta I. Sobre las líneas y los ángulos.
- Carta II. De la medida de los ángulos.
- Carta III. De las razones y proporciones.
- Carta IV. De las líneas proporcionales.
- Carta V. De las superficies.
- Carta VI. Sobre los sólidos.
- Epílogo. Sobre las razones y proporciones de las líneas, superficies y sólidos.

3. Los suscriptores de la obra.

Como hemos dicho, justo antes del prólogo del traductor, se incluye un listado con los suscriptores de la obra. Constituye éste un curioso y heterogéneo grupo de 183 personas, que ilustra el interés que debía suscitar la lectura de la obra. Algunos de ellos estaban suscritos por más de un ejemplar, siendo el caso más extremo el de alguien llamado Francisco Antonio Miravete; suscrito por 140 ejemplares.

Entre estos 183 suscriptores encontramos militares como el Brigadier D. Antonio Angosto o el Coronel D. Alfonso Tabares, eclesiásticos (siendo el más notorio el Ilmo. Sr. D. Joseph Constancio de Andino, Obispo de Albarracín), nobles como el Marqués de Astorga o el Conde de Clavijo o profesionales liberales como D. Manuel Mota, que figura como cirujano de Villa-Pozuelo. No obstante la mayor parte de los suscriptores aparecen tan sólo con su nombre sin indicación alguna de cargo u ocupación.

Merece la pena señalar que únicamente aparecen dos mujeres en el listado de suscriptores. De una de ellas no se conoce el nombre pues se presenta como la viuda de Miguel Alegría, mientras que la otra, María Benita Fernández Chicharro ostentaba el cargo de Tesorera de la Real Universidad de Valladolid (por lo que no es descabellado que adquiriera los 8 ejemplares con los que aparece anotada para la citada universidad).

4. Análisis del contenido.

4.1. El prólogo del traductor.

Las Cartas físico-Matemáticas fueron traducidas al castellano por el doctor D. Francisco Girón y Serrado. De este autor poco hemos podido averiguar más allá de que fue presbítero, según se indica en la portada de la primera edición castellana de las *Cartas* (Almeida, 1787). Como única referencia adicional respecto a la labor de este autor, hemos encontrado la tercera edición del *Directorio Moral del Reverendo Padre Fr. Francisco Echarri* (Echarri, 1788) en cuya portada leemos "*con adiciones por vía de notas y exactamente corregido por Don Francisco Girón y Serrado*".

Fuera quien fuese este Francisco Girón, el prólogo nos informa de cuáles fueron los dos motivos principales que le llevaron a abordar la traducción de la obra de Almeida:

> "*Dos motivos principalmente me han animado a facilitar más la lectura de estas Cartas del Padre Almeida: el uno el deseo de desengañar a los que han oído a sus maestros, aunque ignorantes de la Física Experimental* [...] *que esta ciencia no se compone bien con la verdadera Religión* [...] *El segundo motivo que me inclinó fue el ver que muchos aficionados a los descubrimientos que ha hecho en nuestro tiempo la Física, sin los principios que son indispensables y yo los hallaba todos en las Cartas del Padre Almeida claros y compendiosos...*"

Además de esta doble motivación, el prólogo concluye con un elogio de la Geometría y de su valor formativo, idea que sigue viva aún hoy en día, diciendo:

> "*La Geometría es la mejor Lógica, porque no puede el buen Geómetra apartarse de la verdad sin sentir repugnancia* [...] *Luego podremos esperar que empezará la educación de los jóvenes por la Geometría, ya que está tan clara en el primer tomo de estas Cartas, a imitación de los grandes Autores de la antigüedad...*"

4.2. La Carta preliminar.

Esta primera carta hace las veces de prólogo del autor. En ella da contexto a todo aquello que vamos a leer e informa sobre aspectos relativos a su motivación a la hora de escribir el texto así como al método elegido para presentar los contenidos.

El maestro Teodosio escribe en respuesta a una carta de su discípulo Eugenio en la que este último se lamenta porque el maestro dejó temas sin tratar en sus conversaciones anteriores (las que se relatan en la Recreación Filosófica). El maestro se congratula por el ansia de conocimiento mostrada por el discípulo y justifica las omisiones:

> "*A la verdad que yo gusto de verte tan sediento* […] *pero sábete, que mi silencio en algunas materias en compañía de Silvio, fue preciso, y fue prudente. Si yo hubiera de tratar de todo lo que pertenece a esas materias, el estómago de tu entendimiento, por no poder digerir asuntos tan fuertes, padecería indigestiones…*"

En concreto, Eugenio solicita a su maestro instrucción sobre la Geometría, aunque muestra cierto temor hacia las dificultades inherentes a su aprendizaje. Teodosio le anima:

> "*Créeme que has de hallar en ella* [en la Geometría]*, como en la Física* […] *Los primeros pasos son los más oscuros; pero cada verdad geométrica es una luz o una antorcha que se enciende, y esta va sucesivamente encendiendo otras; de modo, que al principio sólo tenemos la simple luz de la razón que nos guía* […] *pero después va el entendimiento iluminado con muchas luces, que se van multiplicando cada vez más…*"

A continuación, Teodosio pasa a explicar que los contenidos presentados son exclusivamente los necesarios para "*profundizar en el estudio de la Física*". Además afirma que va a dejar de lado el método de Euclides oponiéndose a "*los apasionados del grande Euclides*" que opinan que "*sólo en él o en su método de tratar las verdades geométricas se halla la genuina evidencia matemática*". Para apoyar esta decisión Teodosio cita a (sic) Arnaldo[1], Lami[2], Cleraut[3], la Chapele[4] y Besout[5], "*que pusieron la mira en la facilidad de introducir en la mente de sus discípulos las verdades que nos querían enseñar*".

Teodosio continúa con un interesante alegato de la libertad de pensamiento y cátedra, que le sirve de justificación por haber escrito un texto de Geometría (de los que ya existían excelentes ejemplos):

---

[1] Posiblemente Antoine Arnauld, quien publicó en 1667 sus *Nouveaux élémens de Geométrie*.
[2] Se trata de Bernard Lamy, autor en 1685 de *Les Élémens de Géometrie*.
[3] Alexis Clairaut. En 1741 publicó su texto *Élémens de Géometrie*.
[4] Jean-Baptiste de la Chapelle. Su obra *Institutions de Géometrie* apareció en 1756.
[5] Étienne Bézout. Autor de importantes textos, como el *Cours de mathématiques à l'usage des Gardes du Pavillon et de la Marine,* aparecido ente 1764 y 1767 ó el *Cours complet de mathématiques à l'usage de la marine et de l'artillerie* que vio la luz entre 1770 y 1782.

> "*La libertad de pensar como mejor los parece, que todos tienen en lo que no sea materia de Fe o de costumbres da a cada cual el derecho de exponer sus pensamientos* [...] *Esta libertad ha sido utilísima, así en todas las Ciencias Naturales, como en las Matemáticas. Aunque no se concede en las verdades sustanciales, sobre las que todos están acordes, jamás se negó en el modo de enlazarlas, y deducir unas de otras, o en el de manifestarlas al entendimiento...*"

Para concluir esta Carta preliminar, Teodosio refiere algunos aspectos metodológicos que ha seguido al presentar los contenidos y que considera que algunos podrían criticar. En concreto:

1. Uso de explicaciones difusas y de abundantes figuras. Esto lo justifica porque pretende "*que cada uno por sí mismo sin Maestro pudiese entender todo cuanto le quiero enseñar*".
2. Las pruebas preceden al enunciado de las proposiciones (dando a este método el nombre de método sintético o de doctrina). Esta elección la basa en su experiencia previa puesto que "*siempre observé constantemente, que cuando usaba yo este método, insensiblemente, y como sin trabajo alguno me percibían y se convencían de las verdades más complicadas*".
3. Los enunciados de las propiedades que se presentan se escriben separados del resto del discurso y en una tipografía diferente. El autor toma esta decisión para que así "*sea más fácil y clara la impresión en el alma*".

Todos estos aspectos metodológicos acaba por justificarlos Teodosio en el hecho de que busca "*la mayor claridad y facilidad* [...] *no la mayor profundidad de doctrina*", a petición de su propio discípulo:

> "*me animas a que sólo atienda a estos dos fines: el uno a instruirte en las verdades más útiles que se enseñan en la Geometría* [...] *el otro es ahorrarte trabajo, y aumentarte la claridad en la percepción y la inteligencia...*"

4.3. La Carta I.

Esta primera carta se titula "Sobre las líneas y los ángulos" y se organiza en torno a las once secciones siguientes:

1. De la formación de las líneas recta y curva.
2. De la línea circular.

3. De los ángulos en común.
4. De la línea perpendicular y de la oblicua.
5. De otras propiedades de las líneas perpendiculares.
6. Reglas para conocer las perpendiculares y modo de formarlas.
7. De la línea oblicua.
8. De las paralelas.
9. De las tangentes de los círculos.
10. De las perpendiculares en los círculos.
11. Problemas sobre los círculos que tocan a otros en puntos dados en la periferia y pasan por puntos dados fuera de ella.

Los contenidos tratados pueden ser considerados como básicos e incluyen numerosas definiciones y propiedades sencillas que, en su mayor parte, se deducen directamente de las definiciones presentadas. Las definiciones de los conceptos presentados son de carácter intuitivo. Así, por ejemplo, se define el concepto de línea:

> "*Eugenio, imagínate que un punto se mueve; de cualquiera modo que se mueva, siempre ha de seguir algún camino: este camino que lleva el punto es el que llamamos línea…*"

Las justificaciones de las propiedades también recurren en gran medida a la intuición y poseen un carácter muy visual. Así la propiedad de que por un punto de una recta pasa una única perpendicular a ella recibe la siguiente justificación:

> "*Puesta una recta y levantada una perpendicular si desde el mismo punto queremos levantar otra, o bien ha de pasar sobre la primera, y entonces no es línea distinta, o ha de caer hacia alguno de los lados, y entonces no será perpendicular…*"

También se dedica algo de tiempo a presentar algunas construcciones sencillas, como por ejemplo la de la mediatriz de un segmento, la de una circunferencia dados tres puntos o la de una circunferencia tangente a otra dados el punto de tangencia y otro punto de la circunferencia buscada. Esta última construcción, quizás la más compleja, junto con su discusión constituyen la última sección de la carta.

Es interesante señalar que a lo largo de esta primera carta no aparece ningún aspecto de geometría métrica, sin embargo, en la tercera sección (dedicada a los ángulos) se presenta la definición de grado del siguiente modo:

> "*La circunferencia de cualquier círculo grande o pequeño se divide en 360 partes iguales, las que se llaman grados: los círculos grandes tienen grados grandes, y los pequeños los tienen pequeños…*"

Llama la atención esta confusión entre la amplitud de un ángulo y la longitud del arco correspondiente (la primera no depende del tamaño del círculo y la segunda sí), ocasionada por las dificultades que surgen a la hora de definir el concepto de ángulo y que siguen muy presentes en la enseñanza de estos conceptos hoy en día (Casas y Luengo, 2005).

La carta se cierra con las disculpas de Teodosio por la excesiva extensión de la misma y la justificación, tan familiar para quienes se dedican a la docencia:

> "*Esta carta, amigo, se ha dilatado mucho* [...] *bien que la deducción de las verdades que iban espontáneamente naciendo* [...] *no me permitía cortar el hilo: perdóname, aunque no te prometo la enmienda*".

4.4. La Carta II

La segunda carta, titulada "De la medida de los ángulos" se organiza en torno a cinco secciones:

1. De la medida de los ángulos que tienen el vértice en la circunferencia.
2. De la medida de los ángulos formados en el círculo.
3. De la medida de los ángulos en los triángulos.
4. De la medida de los ángulos en los polígonos.
5. Modo de formar triángulos o polígonos iguales a los que nos dieren.

Tras una primera carta dedicada a conceptos básicos, en esta segunda el maestro entra ya a tratar aspectos algo más complejos e interesantes.

Se comienza estudiando el resultado clásico sobre la relación entre el ángulo inscrito en una circunferencia y su ángulo central correspondiente, dando como aplicación el método para construir una perpendicular por el extremo de un segmento dado y para trazar la tangente a una circunferencia por un punto exterior a ella. Por su parte, la siguiente sección se dedica al estudio de la relación entre ángulos interiores y exteriores a una circunferencia y sus correspondientes ángulos centrales, resultados igualmente clásicos.

Estos resultados se demuestran sin recurrir (pues son ideas que no se han introducido todavía en este punto) a la definición de triángulo isósceles ni a resultados relacionados con los ángulos interiores o exteriores de un triángulo, que es el enfoque que se suele adoptar hoy en día (S.M., 2009).

A continuación, el maestro se dedica a probar que los tres ángulos de un triángulo suman un total de dos rectos, extiende ese resultado a polígonos arbitrarios y termina presentando los criterios de igualdad de triángulos.

La carta se cierra con una advertencia respecto a la siguiente, dedicada a las razones y proporciones. Teodosio pone sobre aviso a su discípulo de que va a utilizar lenguaje algebraico:

> "*Para facilitarte, amigo Eugenio, la expresión, y abreviártela, haré lo que todos los modernos acostumbran, usando de las señales o signos del Álgebra; pues la experiencia enseña, que lo que hace más corta la expresión de una verdad, y una mirada la coloca enfrente de la imaginación, facilita increíblemente su inteligencia…*"

En concreto Teodosio introduce las siguientes notaciones:

- El signo de la suma (+).
- El signo de la resta (–).
- El signo de igualdad (=).
- El signo del producto (×).
- La notación $a \cdot b : c \cdot d$ para indicar una proporción aritmética (o por diferencias).
- La notación $a : b :: c : d$ para indicar una proporción geométrica.
- La notación fraccionaria para el cociente.
- La equivalencia entre las expresiones aa, a^2 y $a \times a$.

Respecto a esta última equivalencia, el maestro se ve en la necesidad de introducir una aclaración que muestra su experiencia docente, pues el error que indica sigue bien presente en las aulas de Secundaria (del Río, 1990):

> "*para multiplicar a por a podemos decir $a \times a$, o bien aa, o bien a^2: y se lee a dos, o a multiplicado por a; pero $2a$ quiere decir $a+a$, o a sumada con a*".

<u>4.5. La Carta III</u>

Como ya hemos adelantado, la tercera carta se titula "De las razones y proporciones" y sus contenidos se organizan en base a diez secciones:

1. De la razón en general.
2. De la proporción en común.
3. De la razón aritmética.
4. Proporción aritmética
5. De la razón geométrica.
6. Propiedades de la razón geométrica.
7. De la proporción geométrica.
8. De las mutaciones que se pueden hacer en los términos, conservando la proporción.

9. De la razón compuesta.
10. De la proporción recíproca.

Como quedó claro al final de la carta anterior, el tratamiento dado a la Proporcionalidad es puramente aritmético, por más de que nos encontremos ante un texto dedicado a la Geometría. En este sentido, los contenidos presentados, pese a su dificultad, juegan un importante papel instrumental en el desarrollo posterior, como el propio Teodosio indica a su discípulo al inicio de la carta:

> "*Amigo Eugenio, en esta carta te voy a dar la instrucción más importante porque es una llave precisa para entrar en mil gabinetes de verdades lindísimas; pero es algún tanto enfadosa al principio: si te disgusta, déjala a un lado, y ve leyendo las siguientes: después volverás a acabar de leer esta poco a poco, porque es muy precisa e importante. Empecemos, pues, que tal vez con el gusto no te parecerá enfadosa, y saltarás de contento, al ver en las cartas siguientes las utilidades que esta trae.*"

Se inicia la carta introduciendo la idea de razón como comparación (ya sea por diferencia o por cociente) y la proporción como la igualdad de dos razones del mismo tipo. A continuación se aborda un tratamiento detenido de los dos tipos de razones y proporciones: las aritméticas y las geométricas. Ambas nociones reciben un tratamiento bastante similar, aunque como es de esperar, el desarrollo es más extenso en el caso de las razones y proporciones geométricas.

Se definen los conceptos de razón y proporción y se estudian manipulaciones que dejan invariante la razón o que permiten obtener nuevas proporciones a partir de una dada. En el caso de las proporciones geométricas, al estudiar las posibles manipulaciones de una proporción que llevan a una nueva proporción, se presentan tanto en abstracto (utilizando letras) como ejemplos concretos que clarifiquen la idea. Por ejemplo,

> "*Si A:B::C:D luego alternando será A:C::B:D* [...] *Demos que sea la proporción primitiva 12:4::9:3, luego alternando 12:9::4:3...*"

Aunque la mayor parte del discurso se centra en dar reglas prácticas de manipulación de razones y proporciones, podemos encontrar algún breve excurso en el que se introduce notación. Así:

> "*Cuando la razón entre las cantidades se puede expresar por números,* [...] *se llama racional; pero cuando no se puede explicar por números* [...], *entonces esta razón se llama surda o irracional* [...] *Las cantidades que tienen entre sí razón de*

> *número a número, son conmensurables, las que tienen razón surda son inconmensurables* […] *partes alícuotas y alicuantas: las alícuotas son aquellas que multiplicadas cierto número de veces, agotan el todo exactamente* […] *las alicuantas son las que nunca ajustan con el todo…*"

También se dedica algo de espacio al estudio de las proporciones compuestas, en concreto a analizar el modo en que se pueden componer dos proporciones geométricas para obtener una nueva (multiplicando término a término los términos de las proporciones) y también a las proporciones recíprocas, relacionadas con la proporcionalidad inversa.

El enfoque que se da a la proporcionalidad es puramente numérico y no aparecen prácticamente referencias a posibles aplicaciones de la proporcionalidad en el manejo de cantidades de magnitudes concretas. Tan sólo al hablar de razón compuesta y recíproca se siente Teodosio en la necesidad de presentar algún ejemplo concreto. Así, en el caso de la proporción recíproca leemos:

> "*Otro ejemplo: cuanto mayor es la tripulación de una nave, menos tiempo dura una determinada provisión de alimentos, y decimos: la tripulación de la nave grande es a la tripulación de la pequeña como la duración de las provisiones es en la nave pequeña, respecto de la duración de los alimentos en la grande…*"

Para concluir, el maestro vuelve a incidir en la dificultad del material presentado, en su importancia y en la posibilidad de posponer su lectura:

> "*Esta materia, amigo mío, es un poco cansada y oscura, pero es indispensable: si a la primera vez que se lee esta carta no se comprende bien, pasa adelante, ve leyendo las otras, y vuelve después* […] *y créeme, amigo, que puse toda diligencia para tratar esta materia con la mayor facilidad posible: agradéceme la buena voluntad.*"

4.6. La Carta IV

Esta carta, que bajo el título de "De las líneas proporcionales" vuelve a retomar contenidos más propiamente geométricos, se articula según las siguientes ocho[6] secciones:

1. Dividir las líneas en la proporción pedida.
2. De los lados proporcionales en los triángulos semejantes.

[6] Debido seguramente a un error de imprenta, de la sección 7 se salta directamente a la 10. Esta errata aparece tanto en la edición de 1787 como en la de 1792. No hemos consultado otras posteriores.

3. Aplicación de la doctrina precedente a medir distancias inaccesibles sin el socorro de la Trigonometría.
4. Aplicación de la doctrina dada a la división de cualquiera línea en partes proporcionales muy pequeñas.
5. De las líneas que son medias proporcionales.
6. Modo de dividir cualquier línea en media y extrema razón.
7. De las líneas que están en proporción recíproca.
10. De las circunferencias proporcionales en los polígonos y en los círculos.

A lo largo de esta carta se utilizan constantemente los resultados relativos a razones y proporciones numéricas que se presentaron en la anterior. Así, el maestro comienza su misiva del siguiente modo:

> "*La doctrina, amigo Eugenio, que te di acerca de la proporción de los números, se aplica fácilmente a las líneas* [...] *y yo, ahora tratando de las líneas proporcionales, me iré fundando sobre lo que dije acerca de las razones y proporciones de los números*."

Teodosio comienza presentado el método usual para descomponer una línea en partes iguales y, como aplicación, para descomponer una línea en dos partes que guarden una razón dada. Estos métodos se presentan sin recurrir explícitamente al Teorema de Thales ni manejar la idea de semejanza de triángulos, concepto que se introduce en la siguiente sección.

Los triángulos semejantes son definidos como aquellos que tienen los ángulos correspondientes iguales, apareciendo la relación de proporcionalidad entre los lados correspondientes como una consecuencia. Tras esta propiedad se presentan los criterios de semejanza clásicos y se dan métodos para construir terceras y cuartas proporcionales.

Encontramos una sección bastante extensa en la que encontramos métodos topográficos que no requieren de la Trigonometría, que el autor introduce y justifica así:

> "*Nada lisonjea mas el gusto de los principiantes que el medir distancias inaccesibles sin instrumentos, ni cálculos embarazosos, lo cual pueden conseguir, sacando varias consecuencias de la regla general que arriba hemos puesto* [la proporcionalidad entre los lados correspondientes en un par de triángulos semejantes]"

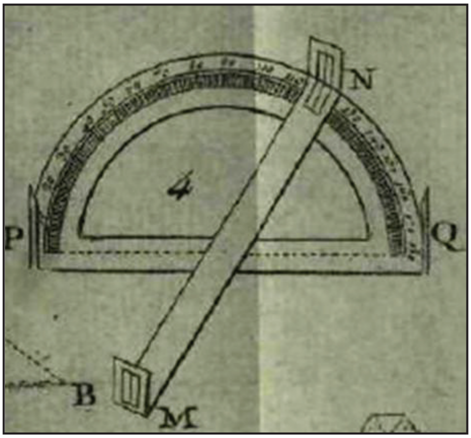


Figura 3. Figura 4 de la Lámina 4, un grafómetro.

En concreto, Teodosio presenta métodos para llevar a cabo las siguientes mediciones:

- Medir una distancia inaccesible *AB*.
- Medir la altura de una torre por su sombra.
- Medir distancias inaccesibles con un grafómetro y un semicírculo graduado.
- Medir, simultáneamente, distancia y altura de un objeto distante con dos estacas a plomo.

En las dos secciones siguientes se presentan métodos para construir la media proporcional entre dos segmentos y para dividir un segmento según la razón áurea. En ambos casos las técnicas presentadas son las clásicas.

La carta se cierra con la proporcionalidad entre la longitud de una circunferencia y su radio (o su diámetro). En este punto considera Teodosio que se ha superado ya la parte más delicada de la instrucción de su discípulo y dice:

> "*Ahora bien, amigo Eugenio, si hubieras entendido bien estas cartas, puedes sosegar, pues no encontrarás en los Elementos de Geometría cosa que sea difícil, pues el peor camino ya está pasado…*"

4.7. La Carta V

Esta carta se titula “De las superficies” y sus contenidos se organizan de acuerdo a doce secciones:

1. De la formación de las superficies.
2. Modo de valuar las superficies.
3. Modo de valuar o hallar el valor de los polígonos regulares y los círculos.
4. Modo de reducir un paralelogramo a otro.
5. Reducción de las figuras irregulares a otras también irregulares.
6. De las proporciones de las superficies del mismo nombre, supuesto que sean desemejantes entre sí.
7. De la proporción de las superficies del mismo nombre y semejantes.
8. De la razón que hay entre el círculo y los cuadrados inscripto y circunscripto y del formado sobre el radio.
9. De la razón que hay entre el cuadrado de la hipotenusa y los cuadrados de los otros dos lados.
10. Aplicación de la doctrina de la hipotenusa a los polígonos y círculos.
11. Modo de construir cuadrados y círculos en cualquier razón que nos pidieren, con respecto a los que nos fueren dados.
12. Modo de hallar superficies que sean medias proporcionales entre dos superficies dadas.

De un modo similar al inicio de la Carta I, Teodosio introduce de un modo dinámico el concepto de superficie, que no es sino “*el espacio por donde se considera que la línea entera va pasando*”. De hecho, se presenta una curiosa definición y clasificación de los paralelogramos:

> “*Debes ahora suponer que cuando una línea recta se mueve hacia un lado siempre va paralela a sí misma; y así el espacio que recorrió la línea se llama paralelogramo. La línea AB se considera movible y la línea AC es la directriz, y se considera quieta. Si la movible con la directriz hacen un ángulo recto, el paralelogramo se llama rectángulo* […] *Si además de ser el ángulo recto, la movible es igual a la directriz, el paralelogramo se llama cuadrado* […] *Si la movible hiciere con la directriz un ángulo que no sea recto, el paralelogramo, se llama oblicuángulo; y en este caso, si la movible es igual a la directriz, el paralelogramo se llama rombo* […] *pero si no fuesen iguales las dos líneas, se llama romboide...*”

Como cabe esperar, otros cuadriláteros como el trapecio; o el concepto de polígono en general no se definen de este modo. Los triángulos se definieron en la tercera sección de la Carta II.

Tras estas definiciones se inicia una discusión sobre el cálculo de las áreas de diversas figuras planas (desde rectángulos hasta sectores circulares). Pero antes encontramos una interesante digresión acerca de la distinción entre una superficie y su área. En concreto leemos:

> "*Para valuar la superficie de un paralelogramo rectángulo se debe multiplicar la base por la altura; mas los principiantes no pueden bien comprender cómo se multiplica una línea por otra: para esto se advierte, que cualquiera cantidad representada por una línea se debe dividir en un cierto número de unidades, aunque la calidad de estas es arbitraria* […] *y así multiplicando el número de las unidades de una línea por el número de las de la otra, queda multiplicada una línea por otra. Adviértase también, que no es lo mismo formar una superficie, que valuarla; pues para su formación se considera la línea matemáticamente, esto es, prescindiendo de su grueso* […] *Pero si queremos valuar una superficie ya formada, debemos numerar la cantidad de partes que la componen; y en esto ya se ve, que estas mismas partes son ya superficies, y no puramente líneas, por cuanto de líneas matemáticas sin latitud o grueso no se puede componer una extensión física […] que la nada, por más que se multiplique, no puede dar cosa positiva…*"

Vemos cómo se mezclan las ideas filosóficas con las matemáticas y cómo aparecen concepciones respecto a la suma de cantidades infinitamente pequeñas que supusieron (y suponen) obstáculos (Brousseau, 1983) a la hora de comprender conceptos relacionados con el Análisis Matemático.

Además de lo que llamaríamos fórmulas para el cálculo de áreas, se presentan métodos para construir figuras equivalentes y resultados relativos a la comparación entre las áreas de diversas figuras semejantes o no. Se cierra esta parte probando que "los círculos son entre sí como los cuadrados de los diámetros".

Tras el estudio de un caso particular en la sección 8, se presenta el Teorema de Pitágoras; del que se dan hasta tres demostraciones (incluyendo la que aparece en los *Elementos* de Euclides). Sigue una serie de aplicaciones de este resultado que incluyen, por ejemplo, la duplicación de un cuadrado o la construcción de un círculo de igual área que una corona circular dada.

La carta, y con ella los contenidos relativos a áreas y superficies, se cierra con diversos resultados que relacionan la razón entre los lados de dos cuadrados o los radios de dos círculos y la razón entre sus áreas.

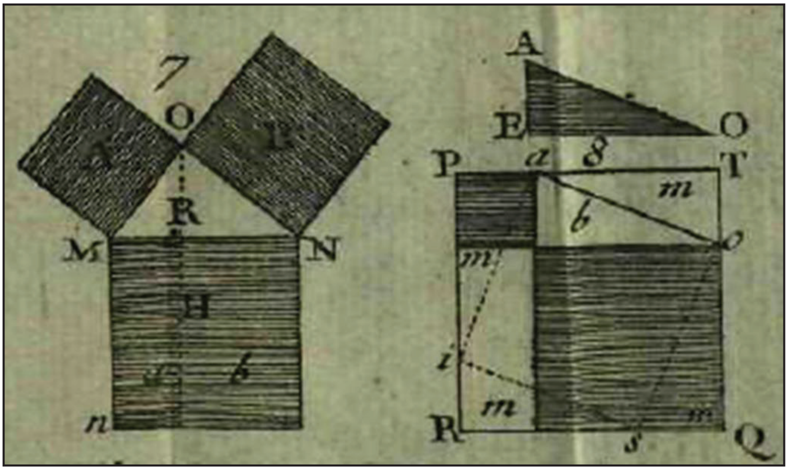


Figura 4. Figuras 7 y 8 de la Lámina 5, dos demostraciones del Teorema de Pitágoras.

4.8. La Carta VI

Esta última carta, la más extensa, se titula "Sobre los sólidos" y está estructurada en torno a las diecisiete secciones siguientes:

1. De la formación de los sólidos.
2. De las superficies de los prismas y cilindros.
3. De las superficies de las pirámides y conos enteros y truncados.
4. De la superficie de la esfera y de los segmentos de ésta.
5. De la solidez o valor de los prismas y de los cilindros.
6. De la comparación de los prismas y cilindros rectos con los oblicuos.
7. De la comparación de las pirámides y conos rectos con los oblicuos.
8. Modo de conocer el valor de las pirámides o de los conos.
9. Del valor de la pirámide y cono truncado.
10. Del valor de la esfera.
11. De la razón que tienen los sólidos entre sí.
12. De la razón que tienen entre sí los sólidos semejantes.
13. De la proporción que se halla entre el valor de la esfera y el del cilindro, cubo y cono que tuviesen la misma altura y profundidad que la esfera.
14. Del valor del sector y del segmento de la esfera.
15. Del modo de valuar el prisma recto truncado.

16. Modo de valuar el volumen de los cuerpos irregulares.
17. De los sólidos regulares.

La introducción del concepto de sólido se hace forma totalmente análoga al de línea y superficie. El propio Teodosio así lo hace ver:

> "*En cuanto a su formación* [la de los sólidos] *quiero que tengas presente la formación de las líneas y las superficies* […] *Considerando el movimiento de una superficie* […] *haremos la idea de un sólido…*"

Los contenidos de esta carta se inician con una primera parte, formada por las secciones 2, 3 y 4, dedicada al estudio de las superficies de los sólidos presentados (prisma, pirámide, cono y esfera). Se dan métodos para calcular lo que hoy llamaríamos el área lateral y total de prismas, pirámides y conos, así como para el área de la esfera.

El resto de la carta sigue una estructura similar a la anterior, dedicada a las áreas de superficies, pero en este caso respecto a volúmenes de sólidos: se dan "fórmulas" para el cálculo de volúmenes, se compara el volumen de figuras del mismo tipo rectas y oblicuas, se estudia la razón entre los volúmenes de figuras semejantes o la razón entre los volúmenes de figuras no semejantes pero del mismo tipo.

La sección final, que supone prácticamente el cierre de la obra (aunque como veremos se incluye un epílogo) está dedicada a la clasificación de los sólidos regulares. El maestro Teodosio justifica la no existencia de más poliedros regulares que los conocidos y da métodos para su construcción. Por lo curioso de sus términos, indicamos aquí el correspondiente al dodecaedro:

> "*Tomemos, pues un pentágono de papel, y de sus cinco lados hagamos que se levantes otros cinco pentágonos iguales hasta unirse mutuamente en forma de una bandeja (perdónese la familiaridad de los términos, porque sólo atendemos a la claridad, que es la que necesitan los principiantes); formemos otra bandeja semejante a la anterior* […] *y colocaremos una sobre otra…*"

Resulta de interés señalar que la esfera es considerada por el autor como un sólido regular "*por ser en todas partes semejante a sí mismo: de suerte que de cualquiera modo que se la tome siempre ofrece la misma superficie igualmente convexa*".

4.9. El Epílogo

Aunque, como ya hemos comentado, los contenidos geométricos concluyen en la Carta VI, la obra se cierra con un epílogo titulado "Sobre la combinación de las razones y proporciones de las líneas, superficies y sólidos" que se compone de dos secciones sin titular.

Los contenidos de este epílogo son de carácter aritmético y podrían haberse incluido en la Carta III. En concreto el maestro se centra en, dada una progresión geométrica de cierta razón, estudiar las progresiones geométricas formadas por los cuadrados y los cubos de la original.

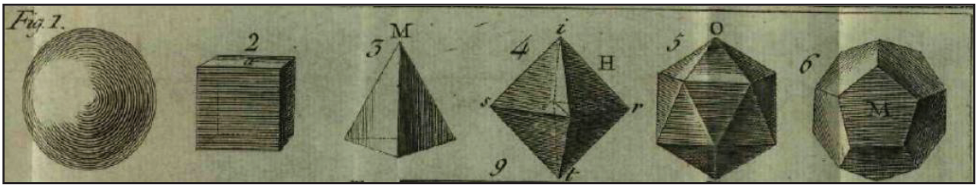


Figura 5. Figuras 1 a 6 de la Lámina 14, los sólidos regulares según Teodosio.

La explicación de la ubicación de este estudio en este punto y no en la Carta III dedicada a la proporcionalidad aritmética es que, en este punto, Teodosio puede relacionar los cuadrados y cubos con superficies y sólidos:

> "*En la Geometría podremos dar figura sensible así de la segunda potencia, que es una superficie, como de la tercera, que es un sólido; pero como no hay más de tres dimensiones, no podemos dar figura sensible de la cuarta, de la quinta...*"

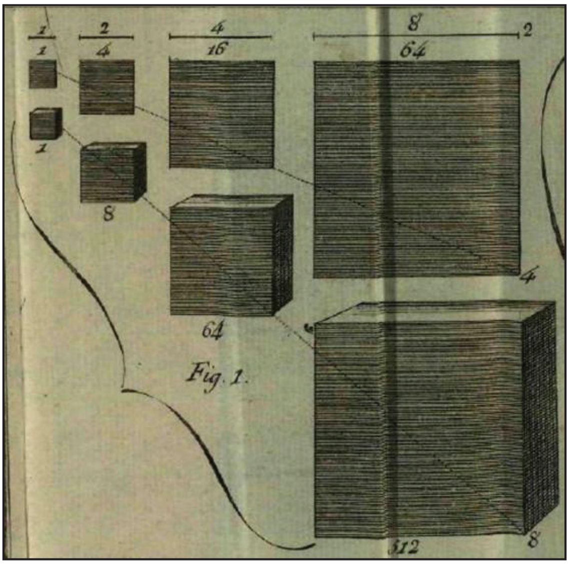


Figura 6. Figura 1 de la Lámina 15, interpretación geométrica de los cuadrados y cubos de una progresión geométrica.

5. Conclusión.

Desde el punto de vista de los contenidos que trata, el primer tomo de las *Cartas Físico-Matemáticas de Teodosio a Eugenio* no es un texto especialmente interesante. De hecho, el propio autor ya señala en la Carta Preliminar que su aportación personal se centra más bien en el modo de presentarlos.

En ese sentido, y dejando de lado el estilo epistolar originalísimo, pensamos que el modo en que se presentan ciertos contenidos es ciertamente interesante y, si se nos permite, moderno. Se observa claramente la influencia en el Padre Almeida de los autores citados en la Carta Preliminar (ver notas 1 a 5).

Es reseñable el abandono (aunque sea parcial) del método axiomático y el recurso a la intuición y a la visualización (apoyado en el gran número de figuras). Virtudes que no siempre se consideran tales[7].

Aún hoy es poco habitual, por citar algunos ejemplos, encontrar una presentación dinámica (basada en el movimiento) del concepto de línea o el tratamiento de problemas topográficos relativamente complejos de manera práctica y efectiva sin recurrir a la Trigonometría.

En cuanto a la extensión de los contenidos, el autor no pretende ser exhaustivo. La obra se cierra con las palabras siguientes, que refuerzan opiniones ya expresadas al comenzar la obra:

> "*Ve aquí, amigo Eugenio, lo que me ha parecido suficiente para inteligencia de la Física...*"

Sin embargo, en nuestra opinión, los contenidos que se presentan proporcionan una sólida formación geométrica que, dejando de lado aspectos formales y de nomenclatura, sería considerada muy buena incluso desde el punto de vista actual.

6. Referencias.

ALMEIDA, T. (1787) *Cartas Físico-Matemáticas de Teodosio a Eugenio*. Madrid, Imprenta de Benito Cano, 2 vols.

ALMEIDA, T. (1792) *Recreación Filosófica*. Madrid, Imprenta Real, 8 vols.

ALMEIDA, T. (1802) *Armonía de la razón y de la religión o respuestas filosóficas a los argumentos de los incrédulos. Dividida en dos tomos. Traducida al castellano y aumentada con varias notas, por el R. don Francisco Vázquez, C.R. de S. Cayetano, lector de teología.* 1ª edición, Madrid, Imprenta de Villalpando, 2 vols.

ALMEIDA, T. (1827) *Recreación Filosófica* y *Cartas Físico-Matemáticas de Teodosio a Eugenio*. Madrid, Imprenta del Diario, 11 vols.

AZEVEDO, F. (1979) "Teodoro de Almeida: A religious orator of the Portuguese Elightment". *Luso-Brazilian Review*, *16(2)*, 239-247.

[7] Recuérdese, sin ir más lejos, cómo Lagrange se vanagloriaba en el prefacio de su Mecánica Analítica de 1788 de no haber incluido figura alguna en la obra.

BORRALHO, M.L.M. (2001) "Teodoro de Almeida. Entre as histórias da História e da Literatura". En *Estudos em homenagem a João Francisco Marques*, 213-227. Oporto: Facultade de Letras da Universidade do Porto.
BROUSSEAU, G. (1983) "Les obstacles épistémologiques et le problèmes en Mathématiques". *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4(2)*, 165-198.
CASAS GARCÍA, L.M. y LUENGO GONZÁLEZ, R. (2005) "Conceptos nucleares en la construcción del concepto de ángulo". *Enseñanza de las Ciencias*, *23(2)*, 201-216.
DOMINGUES, F.C. (1988) "Um projecto enciclopédico y pedagógico: a 'Recreação Filosófica' de Teodoro de Almeida". *Revista de História das Ideias*, *10*, 235-248.
DEL RÍO SÁNCHEZ, J. (1990) "Concepciones erróneas en Matemáticas. Revisión y evaluación de las investigaciones". *Educar*, *17*, 205-219.
ECHARRI, F. (1788) *Directorio moral del Reverendo Padre Fr. Francisco Echarri*. 3ª edición, Madrid, Imprenta Real.
S.M. (2009) *Esfera. Matemáticas 1º E.S.O.* Madrid, S.M.

Antonio M. Oller Marcén
Centro Universitario de la Defensa, Academia General Militar – Espanha
E-mail: oller@unizar.es

Vicente Meavilla Seguí
Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza – Espanha
E-mail: meavilla@unizar.es