Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 22, nº 43 – pp. 124–133
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

DIVISÃO DA CIRCUNFERÊCIA EM PARTES IGUAIS E NÚMEROS COMPLEXOS

Maria Aparecida Roseane Ramos
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB – Brasil

(aceito para publicação em janeiro de 2022)

Resumo

O saber matemático existe pelo menos há cinco mil anos e o livro impresso existe pouco mais de quinhentos anos. Ao longo de história, o homem sempre foi fascinado por números e várias civilizações deixaram seu legado à Teoria dos Números. Os registros da história da Matemática nos proporcionam uma viagem no tempo, no percorrer dos passos de como os conceitos matemáticos, suas propriedades e métodos foram criados nos registros nas academias e nos jornais científicos bem como por meio de cartas entre seus pares. O presente trabalho traz a conjunção entre a ciclotomia (divisão de uma circunferência em partes iguais) e sua relação com os números complexos à luz da istória da Matemática e à teoria algébrica de equações que nos ajuda a entender que as ciências devem ser estudadas não pelo seu caráter prático, mas para estimular e fortificar o espírito de invenção no intuito de uma instrução intelectual sólida.

Palavras-chave: Matemática, História, Ciclotomia, Teoria dos Números, Números Complexos.

[DIVISION OF CIRCUMFERENCE IN EQUAL PARTS AND COMPLEX NUMBERS]

Abstract

Mathematical knowledge has existed for at least five thousand years and the printed book has existed for just over five hundred years. Throughout history, man has always been fascinated by numbers and several civilizations have left their legacy to number theory. The records of the history of mathematics provide us with a journey through time, through the steps of how mathematical concepts, their properties and methods were created in the records in academies and in scientific journals as well as through letters between their peers. The present work brings the conjunction of cyclotomy (division of a circumference into equal parts) and complex numbers in the light of the history of Mathematics and the algebraic theory of equations that helps us to understand that the sciences should be studied not for their practical character, but to stimulate and strengthen the spirit of invention for the purpose of solid intellectual instruction.

Keywords: Mathematics, History, Cyclotomy, Number Theory, Complex Numbers.

Introdução

O fascínio por números remonta à mitologia chinesa, há 3 000 mil anos antes de Cristo. Dos hindus temos o manuscrito Bakhali, do século IV, onde pela primeira vez aparece o número zero e os números negativos e Brahmagupta (598–668) conhecia as regras para determinar as soluções inteiras da equação $x^2 - Ay^2 = 1$, onde A é um número inteiro positivo. O desenvolvimento da Teoria dos Números na Europa foi a partir da tradição grega, que atingiu o auge com Diofanto (?201, 214–284, 298) na Alexandria, com data provável no século IV depois de Cristo. Sua obra *Arithmetica* é um dos primeiros tratados consagrados exclusivamente à Álgebra e Aritmética. Ao longo de 14 séculos foi fundamental para o desenvolvimento dos conhecimentos que hoje temos sobre a ciência dos números.

Os números complexos foram criados na impossibilidade de extrair raízes quadrada de um número negativo. Constituem um conjunto onde estão definidas as operações de somas e produtos com as propriedades fundamentais dos números reais, cujos elementos são denotados além que existe um único número complexo i com $i^2 = -1$, $i = \frac{1}{4}$ e todo número pode ser escrito de maneira única como $a + bi$ onde a e b números reais, a é a parte real e b é a parte imaginária. Na ótica da Geometria Análica, os números complexos podem ser representados como pontos do plano cartesiano (a, b), como vetor, segmento orientado de origem (0,0) no sistema de coordenadas em que a, b são componentes do vetor (a, b).

A Teoria dos Números desenvolvida no século XVIII foi fortemente influenciada pelas obras de Euler (1707–1783) e Lagrange (1736–1813). No século XIX a ciência foi marcada por outras obras, em especial pelos trabalhos do matemático francês Legendre (1752–1833) que sistematizaram as teorias do século anterior e forneceram ao século XX métodos inovadores e problemas interessantes por meio da análise de Diofanto. Estudiosos apontam que o nascimento da teoria de ciclotomia (divisão de uma circunferência em partes iguais) está explicitamente ligado à própria teoria algébrica de equações. Numa transição entre as obras de Lagrange e Legendre se encontra *Disquisitiones Arithmeticae*, de Gauss (1777–1855), escrito em 1796, publicado em 1801 e traduzido para o francês em 1807 como *Recherches Arithmétiques* por Poullet-Delisle (1778–1849), ex-aluno do matemático Laplace (1749–1827). *Disquisitiones* é um conjunto de teorias completas e contém uma variedade e generalidade de resultados tratados com elegância e concisão de métodos das teorias criadas por Gauss, a exemplo da teoria de congruência que se tornou uma base para toda a Aritmética e a teoria da ciclotomia dissertada na seção VIII, no artigo "As equações que determinam as divisões da circunferência", em que Gauss discorre sobre a divisão de uma circunferência em n partes iguais, teoria que está diretamente relacionada às raízes da equação $x^n - 1 = 0$.

Comumente a divisão da circunferência em partes iguais é do domínio do desenho geométrico em que a circunferência é dividida em n de partes iguais, utilizando régua não graduada e compasso. Assim a divisão da circunferência em partes iguais amálga-se com a construção de polígonos regulares e a teoria de ciclotomia, que numa linguagem moderna, são estudos dos polígonos construtíveis com régua e compasso com uma relação com os números complexos em que os vértices dos polígonos regulares são os pontos ($\cos\frac{2k\pi}{n}$, sen $\frac{2k\pi}{n}$) do R^2. Geometricamente, as raízes são os vértices de um polígono regular de n lados inscrito numa circunferência de centro na origem, exceto para $n = 2$ a configuração será uma reta passando pela origem.

Um polígono de n lados é construtível se, e só se, $n = 2^r \times p_1 \times ... \times p_k$ com r natural, $p_1, ..., p_k$, números primos ímpares distintos e $p_i = 2^{2^m} + 1$, exceto para $m = 5$, que em 1732 Euler demonstrou que $2^{32} + 1$ é composto. Além disso, desenvolveu um método para determinar as raízes imaginárias de X = $\frac{x^n - 1}{x - 1} = 0$ de modo que uma vez conhecida uma única raiz, as demais raízes são deduzidas a partir dela. A solução de X = 0 será determinada pelas fórmulas trigonométricas usuais do Teorema de Cotes (1682-1716) que aponta que se r é uma raiz imaginária de $x^n - 1 = 0$ então $r = \cos\frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{2k\pi}{n}$, onde k é um número inteiro não nulo e não múltiplo de n. Segue que essas raízes são os vértices do *polígono construtível* de n lados.

Nesse momento será evocado que a teoria de ciclotomia está explicitamente ligada à teoria algébrica de equações. Os progressos da Geometria Analítica e do Cálculo Diferencial em meados do século XVII permitiram grandes descobertas na Álgebra no século seguinte. Como exemplo, a fórmula de Moivre (1667–1754) que abriu caminho para o estudo das raízes da unidade. Dado um número natural n e um número real α , tem-se que $(\cos \alpha + \text{sen}\ q_1) = \cos(n\ q_1) + i\ \text{sen}\ (n\ \alpha)$, com $i^2 = -1$, $i = = \frac{1}{4}$. O aperfeiçoamento da forma de tratamento das equações de graus maiores ou iguais a 2 aconteceu no século XVIII, foi através da generalização de antigas proposições e pelo desenvolvimento de equações por meio de radicais através de notáveis trabalhos de Euler, Lagrange, Legendre, Abel (1802–1829), Jacobi (1804–1851) e Galois (1811–1832). Euler, em seus trabalhos publicados na Academia de Berlim de 1769-1770 e nos *Elementos de*

Álgebra de 1773–4, e Lagrange, em seus estudos sobre a equivalência de formas e equações do segundo grau em 1773–5, forneceram métodos generalizados para a resolução de equações do segundo grau, bem como métodos particulares para a resolução de equações de grau maior do que 2. Em 1771, nas *Reflexões sobre a resolução algébrica de equações*, Lagrange conjeturou que a resolução de equações de grau maior do que quatro era impossível e, posteriormente, em 1826–1827, a condição de suficiência foi demonstrada por Abel. Galois restabeleceu as relações entre a Álgebra e a Geometria quando demonstrou as condições necessárias e suficientes em seu artigo “Sobre as condições para resolução de equações por radicais” de 1831, que foi publicado por Liouville em seu *Jornal de Matemática,* somente em 1846. Porém, somente em 1870 que as ideias geniais de Galois foram elucidadas por Jordan, em seu *Tratado sobre Substituições*.

Em um artigo de 1702, Leibniz (1646-1716) aponta a utilidade de se decompor as frações racionais em elementos mais simples e embora soubesse integrar as funções $\frac{A}{2}$ e α, no entanto nega a possibilidade da decomposição de um polinômio com coeficientes reais em fatores de primeiro e segundo graus, a exemplo de $x^4 + a^4$. Todavia, a teoria de Leibniz foi refutada pelo matemático inglês Côtes (1682–1716), que desenvolveu a fatoração completa dos binômios $x^n + \alpha^n$, na divisão de uma circunferência em n partes iguais, em que X = $\frac{A}{2} = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \mathbf{...} + x + 1 = 0$ tendo como fator geral $x^2 - 2x$ cos μ_i + 1 com k sendo um número não divisível por n. Resulta que, atribuindo a k os valores 1, 2, 3, **....** $\alpha_i \pm$ $(n - 1)$, é possível determinar todos os fatores do polinômio X.

Vinte anos depois, em 1742, Euler formulou o famoso *Teorema Fundamental da Álgebra* ou *Teorema de d´Alembert*, como é conhecido na França. Contudo, esse sábio matemático não forneceu uma demonstração rigorosa, a exemplo de Lagrange em 1722 e d´Alembert em 1742. No entanto Gauss obteve sucesso em 1799, 1815, 1816 e 1849 e sua demonstração de 1799, garantiu a existência de pelo menos uma raiz de um polinômio sem o propósito de determiná-la. Em 1748 em seus estudos sobre as raízes da unidade, Euler estabeleceu um vínculo entre os arcos circulares das funções trigonométricas da fórmula de Moivre (1667–1754), a saber, $e^{\alpha\sqrt{-1}} = \cos\alpha + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\alpha$ com a teoria de polígonos regulares inscritos na circunferência. A partição da circunferência em partes iguais já era estudada por Moivre desde 1707 que possibilitou para que as raízes quintas e sétimas da unidade fossem expressas por meio de radicais. Um grande progresso sobre o assunto se deve a Vandemonde (1735–1796) em seu trabalho *Sobre a resolução de equações* em 1774, onde criou um método geral para a resolução de equações ciclotômicas a partir do caso da 11ª raiz da unidade. O complemento dessa teoria iniciada por Vandermonde em 1774 foi realizado por Gauss em 1801 com fundamentos no teorema de Cotes que em 1716 estabeleceu a fatoração dos polinômios do tipo $x^n - r^n$ ou $x^n + r^n$ de maneira a decompô-los por meio de funções racionais e de fórmulas trigonométricas. Considerando o polinômio X = p'' = $x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + ... + x + 1$, o teorema de Cotes nos diz que o polinômio X possui como fator geral $x^2 - 2x \cos p' + 1$, onde k é um número qualquer não divisível por

n, de maneira que atribuindo a k os valores 1, 2, 3,..., $\frac{1}{3}$ $(n - 1)$, é possível determinar todos os fatores de X.

A alavanca fundamental para lançar estudos sobre raízes da unidade vinculadas a arcos circulares da teoria de funções trigonométricas ou à teoria de polígonos regulares inscritos numa circunferência, aconteceu na demonstração da fórmula de Moivre por Euler em 1748, bem como que $e^{\alpha \sqrt{-1}} = \cos \alpha + \sqrt{-1} \operatorname{sen} \alpha$. A partição da circunferência em partes iguais também foi estudada por Moivre em 1707 que possibilitou que as raízes quintas e sétimas da unidade fossem expressas por radicais. Percebe-se um grande progresso também por Vandemonde que no *Mémoire Sobre a resolução de equações* (1774), forneceu um método geral para a resolução de equações ciclotômicas, a partir do caso da 11ª raiz da unidade. O complemento dessa teoria iniciado por Vandermonde em 1774, foi realizado por Gauss em *Recherches* (1807), tradução francesa de *Disquisitiones* (1801), onde na seção VII, através do artigo "As equações que determinam as divisões do círculo", ele discorre sobre a divisão de uma circunferência em n partes iguais, que está diretamente ligada às raízes da equação $x^n - 1 = 0$. No final de seus estudos, Gauss apresenta uma generalização para que a circunferência possa ser dividida em n partes iguais, a saber: é necessário que n possua apenas os divisores ímpares da forma $2^m + 1$, onde m é uma potência de 2, quer dizer, que n seja um número de Fermat. Para resolver a equação $x^n - 1 = 0$ Gauss resolveu m equações do segundo grau e quando n era um número de Fermat, o polígono regular de n lados é construtível com régua e compasso. No entanto a recíproca não foi muito fácil de determinar, e Gauss se contentou somente em enunciá-la. Como hábil calculista, Gauss aplicou a propriedade a números menores do que 300, e encontrou 38 valores para n = 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 85, 96, 102, 120, 128, 136, 160, 170, 192, 204, 240, 255, 256, 257, 272.

Anos mais tarde, Legendre se dedicou à teoria de ciclotomia de Gauss na seção "Uso da Análise Indeterminada na resolução da equação $x^n - 1 = 0$, onde n é um número primo", apresentada na quinta parte da última edição da *Teoria dos Números* de 1830 em que incrementou novos conteúdos à teoria, como ele próprio afirmou:

> "[...] *Os conhecimentos dos Analistas sobre a resolução de $x^n - 1 = 0$, estão quase reduzidos à resolução de um único teorema, quando M. Gauss publicou a sua excelente obra intitulada Disquisitiones Arithmeticae, onde encontramos uma nova e muito completa teoria sobre a resolução da mesma equação, ou, o que dá no mesmo, da divisão da circunferência em n partes iguais. Como essa teoria é uma das aplicações mais interessantes da Análise Indeterminada e conduz a resultados muito curiosos, cremos que satisfaremos os nossos leitores, expondo-a aqui com novos desenvolvimentos."* (LEGENDRE, 1830, Vol. II, p. 168, tradução nossa.)

Sem utilizar a mesma notação de Gauss, Legendre inova a teoria de ciclotomia de *Disquisitiones* na sua na edição de *Teoria dos Números* de 1830, com acréscimos de conteúdos e aplicações numéricas que constituíram os cinco parágrafos da obra: “Sobre as bases dessa nova teoria”; “Formação geral da equação de grau *k* para os valores de k = 2, 3, 4,5”; “Aplicação da teoria a exemplos numéricos”; “Método de redução para completar a teoria anterior”; “Método para obter a solução geral da equação X = 0”.

Mediante à impossibilidade da decomposição do polinômio X = $\frac{x^n - 1}{x - 1}$ em fatores racionais, ao estabelecer uma conexão entre a resolução da equação X = 0 e da equação $x^{n-1} - 1 = 0$ ou $x^{n-1} - 1 = M(n)$, Legendre utilizou a noção de raiz primitiva tal como o matemático alemão apresentou em *Disquisitiones* em 1801.

Diferenças e semelhanças dos trabalhos de Legendre e de Gauss sobre a ciclotomia

Na distribuição das raízes primitivas da unidade em períodos, Legendre substituiu a notação de Gauss $[g^k]$, por (g^k). Os exemplos da construção geométrica de polígonos regulares de n lados com régua e compasso da generalização de Gauss aponta que é necessário que n seja um número de Fermat do tipo $2^m + 1$, exceto para $n = 5$. Além disso, os exemplos foram os mesmos, com exceção de $n = 19$. Na obra de 1830, Legendre analisou os casos em que $m = 1$, 2 e 4, já conhecidos na obra de Gauss, além dos estudos no caso em que $m = 8$ e $n = 2^8 + 1 = 257$. No entanto, Legendre demostrou que por meio de sete equações do segundo grau, é possível dividir geometricamente uma circunferência em 257 partes iguais. Apresentou outros teoremas relativos à resolução de X = $\frac{A}{2}$ = 0, para $n = 3m + 1$ e $n = 4m + 1$. Também, usou o método de resolução de Gauss, no caso particular da equação auxiliar de grau k do tipo $p^k + p^{k-1} + \alpha p^{k-2} + \alpha p^{k-3} + \text{etc.} = 0$ para todo número primo $n = km + 1$. Tais equações auxiliares se reduzem, em cada caso, a uma equação com dois termos de mesmo grau, cujo termo conhecido é da forma $a + b\,q_1$. De maneira que, uma equação completa de grau k pode ser resolvida pela secção de um ângulo cujo cosseno e o seno são conhecidos, ou pelo menos, determinados, supondo conhecida a divisão do círculo em k partes iguais. Por meio das raízes dessa equação o polinômio X de grau $n - 1 = km$ é decomposto em k equações de grau m e Legendre aplicou nos casos para $k = 2$, 3, 4 e 5. Como Gauss foi muito prolixo na apresentação desse método, Legendre propôs uma abordagem sob um novo aspecto, que em muito facilitou nas aplicações. Ele cria um método para encontrar as raízes imaginárias da equação X = 0. Como cada raiz é da forma cos q_1 + α sen $\frac{\alpha^2 - B}{A}$, bastava obter uma raiz por meio dos valores reais de $x + \alpha$ que sempre seria representada por 2 cos $\alpha^2 - B$. Para garantir que todas essas raízes fossem distribuídas em períodos, em que a raiz da equação X = 0 pode ser representada por r^α, com α não nulo e nem múltiplo de n; tal raiz foi identificada pelo seu expoente e denotada por (α). Assim, duas raízes (α) e (β) são iguais se $\alpha - \beta$ é divisível por n.

Caso contrário, elas são distintas. Vale ressaltar que tais raízes possuem propriedades análogas às dos logaritmos, pois o produto $(\alpha)\times(\beta)=(\alpha+\beta)$ e a potência $(\alpha)^m=(m\alpha)$. Como todas raízes da equação X = 0 são representadas por (1), (2), (3),..., ($n-1$), e r pode ser substituída por r^α desde que α não seja divisível por *n*, as representações dessas mesmas raízes são (α), (2α), (3α),..., $(\overline{n-1}\cdot\alpha)$, a menos da ordem de seus termos. Considerando *k* um divisor qualquer, primo ou não primo de $n-1$, de maneira que $n-1=mk$ e a partir de um termo qualquer (g^λ) da sequência (1), (g), (g^2), ... , (g^{n-2}), pertencente a todas as raízes da equação X = 0, Legendre criou-se uma nova sequência, (g^λ), $(g^{\lambda+k})$, $(g^{\lambda+2k})$,...., $(g^{\lambda+mk-k})$. Essa sequência foi denominada como o *período composto com m termos* , também como auto reversa, uma vez que o seu termo $(g^{\lambda+mk})$, que sucede o $m^{\text{ésimo}}$ termo é igual ao primeiro (g^λ), em virtude da equação condicional $g^{mk}=g^{n-1}=1$. A expressão (m : g^λ) foi utilizada por Legendre como notação para exprimir a soma das *m* raízes que compunham o período onde g^λ é o primeiro termo. Após atribuir a λ os valores de 1 a *k* tem-se equação de grau *k*, que tem como raízes os períodos de *m* termos, (m : 1), (m : g), (m : g^2) **....** (m : g^{k-1}), onde *g* é uma das raízes primitivas de x^n-1. Assim, Legendre obteve todos os períodos que são determinados da seguinte maneira:

$$(m:g)=(g)+(g^{1+k})+(g^{1+2k})+\ldots+(g^{1+mk-k})$$

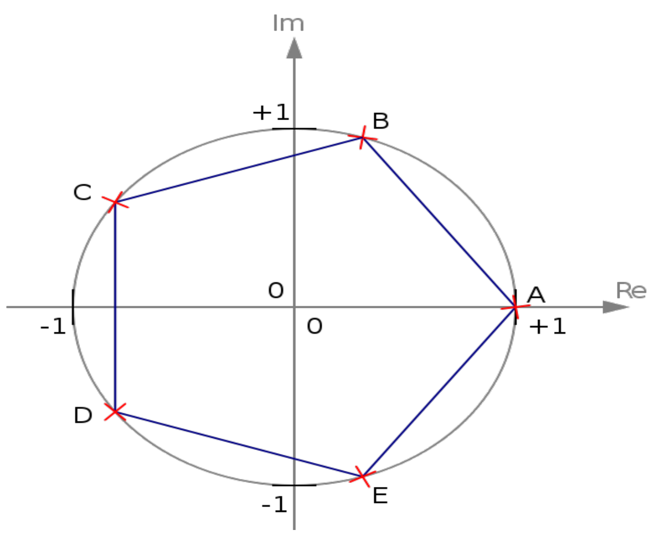
$$(m:g^2)=(g^2)+(g^{2+k})+(g^{2+2k})+\ldots+(g^{2+mk-k})$$

$$(m:g^3)=(g^3)+(g^{3+k})+(g^{3+2k})+\ldots+(g^{3+mk-k})$$

$$(m:g^k)=(g^k)+(g^{2k})+(g^{3k})+\ldots+(g^{mk}).$$

Com essa notação, Legendre distinguiu as raízes da equação X = 0 em *k* grupos disjuntos, compostos *m* termos, uma vez que são encontrados todos os termos da sequência (g), (g^2), (g^3), ... (g^{n-1}). Uma decomposição semelhante foi realizada em todos os demais valores de *m* e *k*, cujo produto *mk* é igual ao número dado $n-1$. Pelo processo da descida finita foram realizadas as subdivisões para a formação da sequência m, m', m'', etc., até que o último termo da sequência fosse 2 . Portanto, as equações que continham por raízes os períodos de dois termos, em geral, eram representadas por $x^\mu+x^{-\mu}$, como solução completa do problema. Também, a equação $p^k+p^{k-1}+\alpha' p^{k-2}+\beta' p^{k-3}+etc.=0$, em que os coeficientes α', β', etc., serão sempre números inteiros, que satisfazem algumas propriedades. Considerando $n=5m+1$ Legendre aplicou a teoria na determinação da equação auxiliar $p^5+p^4+\mathrm{P}p^3-\mathrm{Q}p^2+\mathrm{R}p-\Omega=0$ na resolução de $x^{11}-1=0$ que conduziu ao mesmo resultado de Vandermonde, que foi o primeiro autor dessa teoria publicada nos *Mémoires* da Academia de Paris em 1771.

Como exemplo, vejamos o caso do pentágono regular, considerando $x^5 - 1 = 0$. Nesse caso, temos que $r = cos\ \frac{2\ k\pi}{5} + \frac{1}{4} sen\ \frac{2\ k\pi}{5}$ com $k = 0, 1, 2, 3, 4$ e variando os valores, serão obtidas as raízes, para $k = 0$, $r = cos\ 0 + i\ sen 0 = 1$ como solução trivial pois $1^5 = 1$; para $k = 1$, $r = cos\ \frac{2\ \pi}{5} + i\ sen\ \frac{2\ \pi}{5} = cos 72^\circ + i\ sen 72^\circ$, para $k = 2$, $r = cos\ \frac{4\ \pi}{5} + i\ sen\ \frac{4\ \pi}{5} = cos 144^\circ + i\ sen 144^\circ$, $k = 3$, $r = cos\ \frac{6\ \pi}{5} + i\ sen\ \frac{6\ \pi}{5} = cos 216^\circ + i\ sen 216^\circ$, para $k = 4$, $r = cos\ \frac{8\ \pi}{5} + i\ sen\ \frac{8\ \pi}{5} = cos 288^\circ + i\ sen 288^\circ$, $k = 5$, $r = cos\ \frac{10\ \pi}{5} + i\ sen\ \frac{10\ \pi}{5} = cos 360^\circ + i\ sen 360^\circ = r = cos\ 0 + i\ sen 0 = 1$. Por recorrência, as de raízes $x^5 - 1 = 0$ são cíclicas ou auto reversas para valores de k maiores do que 4, como vértices do polígono *construtível* de 5 lados, o pentágono regular, na divisão de uma circunferência em 5 partes iguais. Segue que essas raízes serão os vértices do polígono *construtível* de 5 lados:



Pentágono regular
Fonte: http://pt.wikibooks.org/wiki/MatemA1tica_elementar

Importante ressaltar que com fundamentos na seção V de *Disquisitiones* Legendre acrescentou novos conteúdos à teoria não utilizando a aritmética modular de Gauss e sim a aritmética dos números inteiros, criando uma simbologia própria, e por longas décadas eles disputaram a primazia de descobertas em vários ramos das ciências. Com exceção das simbologias particulares adotadas por ambos matemáticos, os textos sobre ciclotomia são bem semelhantes e, deixando as querelas do passado, Legendre presta uma grande homenagem ao magnífico matemático Gauss, o único autor em Teoria dos Números que, até então, não tinha sido contemplado em seus trabalhos anteriores nessa área. Na obra de 1808 no parágrafo, "Uso da Análise Indeterminada na solução da equação $x^n - 1 = 0$", finalmente Legendre declarou que o método de Gauss era "*muito mais simples e mais elegante" do que o meu* (RAMOS, 2010).

No presente trabalho, viajamos no tempo ao percorrer os passos da evolução da teoria de ciclotomia, divisão de uma circunferência em partes iguais e sua relação com os números complexos, à luz da história da Matemática e da teoria algébrica de equações, na convicção de que as ciências não devem ser estudadas apenas pelo seu caráter prático ou teórico, mas sim pelo estimulo ao espírito da invenção, na instrução intelectual sólida dos que se propõem a apreende-las.

Evocamos a resolução da equação $x^n - 1 = 0$ entrelaçada à divisão da circunferência em *n* partes iguais, teoria essa que faz parte do conjunto das aplicações mais interessantes da Análise Indeterminada e uma importante contribuição à Teoria dos Números. Na conjunção inusitada dessa ciência aos números complexos segundo eminentes matemáticos, dentre eles, os franceses Vandermonde, Legendre e o alemão Gauss. Embora Legendre e Gauss disputaram por longas décadas a primazia de descobertas em vários ramos das ciências. Tanto que os estudos de Gauss em Teoria dos Números, não foram contemplados na primeira edição de Legendre, *Théorie des Nombres* em 1798 e somente foram dissertados nas edições de 1808 e de 1830 em que Legendre se dedicou a estudar a teoria de ciclotomia criada pelo matemático alemão. Com fundamentos na seção VII de *Disquisitiones*, Legendre acrescentou novos conteúdos à teoria, porém, não se utilisou da linguagem da aritmética modular de Gauss e sim na linguagem da Aritmética dos números inteiros. Simbologias particulares à parte, os textos são bem semelhantes e, deixando de lado as querelas do passado, Legendre prestou uma homenagem a Gauss, o único matemático que até então nunca teve seus estudos contemplados na obra do matemático francês no seu livro *Teoria dos Números*.

Referências Bibliográficas

ANNE, L. *Sur la résolution de deux équations du seconde degré à deus inconnues*. Disponível em: http://archive.numdam.org/ARCHIVE. Acesso em: 06 jun 2013.

BREZINSKI, Claude. *Ces étranges fractions qui n'en finissent pas*. Disponível em: www.reunion.iufm.fr. Acesso em: 02 mai 2013.

CAHEN, E. *Elements de la théorie des nombres*. Vol. I, Paris: Gaithier-Villars, 1900.

CARMO, Manfredo P. do,.*Trigonometria e Números complexos*. Coleção Fundamentos da Matemática Elementar, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1985.

COLLETTE, J-P. *Histoire des Mathématiques*. Editions du Renouveau Pédagogique, Montréal: 1979, p 263, 137-169, 170-191.

COURANT, Richard; ROBBINS, Hebert. *Qué es la MATEMÁTICA? Uma Exposicion Elemental de sus Ideas y Métodos*. Traduction del inglês por Luis Bravo Gala, Madrid: Aguilar, 1958.

DÉVELOPPEMENT D'UN NOMBRE EN FRACTIONS CONTINUÉES. Disponível em:*mathtous.perso.sfr.fr/articles/fracont1.pdf*. Acesso em abril 2013.

DIEUDONNÉ, Jean. A*brégé d´histoire des mathématiques – 1700-1900*. Paris: Hermann, 1978, p. 185-323.

LEGENDRE, Adrien Marie. Théorie des Nombres. Tome I. 4 eme edition.conforme à la trosième nouveau tirage corrigé, Librairie Scientifique et Tecnique, A. Blanchard, Paris: 1953.

MOREIRA Carlos Gustavo T. de A. *Frações Contínuas, Representações de Números*

e Aproximações Diofantinas. Anais do 1o Colóquio da Região Sudeste, Rio de Janeiro: IMPA, abril de 2011.

O. MAY, Kenneth. *Bibliography and Research Manual of the History of Mathematics*. University of Toronto Press, Toronto: 1973.

PRESTES, Maria Luci de M. *A pesquisa e a construção do conhecimento científico: do planejamento aos textos, da escola à academia*. Rêspel, 3. ed., São Paulo: 2005.

RAMOS, Maria Aparecida Roseane, *Adrien-Marie Legendre (1752-1833) e seus trabalhos em Teoria dos Números,* (Tese de Doutorado), Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal: UFRN, 2010, 257 p. Disponível em: http://bdtd.bczm.ufrn.br/tedesimplificado/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=4000.

VANDERMONDE, Alexandre-Theóphile. *Sur la résolution des équations. Mémoires de l' Académie Royale des Sciences,* Lut à la séance en 1770, Paris: L' Imprimerie Royale, 1774, p. 365-417.

Maria Aparecida Roseane Ramos
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB – Brasil

E-mail: aparecidaroseane.ramos@yahoo.com.br