

“SOBRE NÚMEROS AMIGÁVEIS”, DE LEONHARD EULER: TRADUÇÃO E COMENTÁRIOS

John A. Fossa
UFRN – Brasil

Sarah Mara Silva Leôncio*
UFRN – Brasil

(aceito para publicação em junho de 2008)

Resumo

Tradução do primeiro artigo sobre números amigáveis escrito por Euler, em que ele lamenta o pouco interesse dado à teoria dos números, critica o método de Fermat para achar os mesmos e dá uma lista de pares de números amigáveis.

Palavras-Chave: história da teoria dos números, números amigáveis, Leonhard Euler.

Abstract

Translation of Euler's first article on amicable numbers, in which he laments the slight interest given to number theory, criticizes Fermat's method for finding numbers of this kind and gives a list of amicable numbers.

Key words: history of number theory, amicable numbers, Leonhard Euler.

Apresentação dos tradutores

Leonhard Euler (1707-1783) publicou três artigos sobre números amigáveis, todos com o mesmo título, *De numeris amicabilibus*. A presente tradução é do primeiro, que saiu em *Nova acta eruditorum*, em maio de 1747. Visto que faremos uma análise mais cuidadosa dos três artigos noutro lugar, limitar-nos-emos aqui a fazer algumas observações na forma de notas de rodapé.

“Sobre Números Amigáveis”, de Leonhard Euler

Parece que, nesta época em que a análise matemática está abrindo o caminho para especulações muito profundas, problemas sobre a natureza e propriedades de

* Bolsista de Iniciação Científica do CNPq.

números foram quase totalmente abandonados pelos geômetras¹ – e, de fato, a maior parte julga que a contemplação dos números nada contribui para a melhoria da análise. Entretanto, a investigação das propriedades dos números sem dúvida frequentemente requer mais argúcia que as mais sutis questões da geometria e assim parece, por essa mesma razão, que as questões aritméticas foram imerecidamente desprezadas por estes. Não obstante, eruditos, dos mais superiores, responsáveis pelos maiores desenvolvimentos da análise, julgaram que as propriedades dos números não eram indignas de muito zelo e dedicação. Em relação ao próprio *Descartes*², sabe-se que, embora ele tenha se ocupado por muito tempo com meditações, não somente sobre a filosofia universal, mas também sobre a matemática, não teve muito sucesso na sua tentativa de desvendar os números amigáveis; em seguida, *van Schooten*³ enfrentou a tarefa com maior dedicação.⁴ Chamam-se então números amigáveis dois números do seguinte tipo: cada um produz o outro quando todas suas partes alíquotas⁵ são somadas. Os números 220 e 284 são desse tipo, pois, em primeiro lugar, as partes alíquotas de 220, ou seja, os divisores menores que ele mesmo, $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110$, somadas, produzem 284 e, por sua vez, as partes alíquotas do número 284, sendo $1 + 2 + 4 + 71 + 142$, produzem 220. Há, sem dúvida, além desses dois números, muitos outros – e até infinitos⁶ – que têm essa propriedade. Não obstante, nem *Descartes*, e depois, nem *van Schooten* exibiram mais que três pares dos referidos números, embora pareça que não foram poucos os esforços que dedicaram à tarefa. Mas o método, do qual cada um dos dois fez uso, foi elaborado de tal forma que, usando o mesmo, dificilmente poderiam ser descobertos mais números amigáveis.⁷ Para tanto, assumiram que números deste tipo são dados pelas fórmulas⁸ 2^nxy & 2^nz , onde x , y e z denotam números primos; é também necessário que esses números sejam escolhidos de tal forma que $z = xy + x + y$ seja primo e, ao mesmo tempo, que $2^n(x + y + 2) = xy + x + y + 1$. Atribuíram, portanto, valores sucessivamente ao expoente n , e procuraram-se, em cada caso, números primos x e y , tais que a última equação fosse satisfeita e que se fossem tais que, ao mesmo tempo, $xy + x + y$ fosse um número primo, então as referidas fórmulas, 2^nxy & 2^nz , produziriam números amigáveis. Compreende-se facilmente, no entanto, que, ao proceder desta maneira para valores maiores de n , o valor de $xy + x + y$ logo se tornará tão grande que não será mais possível discernir se o mesmo é um

¹ Na época de Euler, esse termo significava *matemáticos*, de forma geral.

² René Descartes (1596-1650). Numa carta para Marin Mersenne (1588-1648), Descartes deu uma regra para achar números amigáveis. Como ele próprio reconheceu, a mesma regra foi dada antes por Pierre de Fermat (1601-1665). Em todo caso, a regra só produziu três pares de números amigáveis, a saber, 220 e 284, conhecido na Antiguidade, 17296 e 18416, dado por Fermat, e 9363584 e 9437056, dado por Descartes. Não mencionamos as contribuições dos matemáticos árabes aqui, pois Euler não teve ciência delas (Dickson 1971, cap. 1).

³ Frans van Schooten (1615-1660). Apesar de descobrir uma maneira de achar números amigáveis usando equações indeterminadas, o método de van Schooten não forneceu qualquer novo par deste tipo de número (Dickson 1971, cap. 1).

⁴ Dada a informação na nota anterior, podemos apreciar a leve ironia de Euler aqui.

⁵ Os divisores positivos do número, excluindo o próprio número.

⁶ Ainda está em aberto a questão de se há, ou não, uma quantidade infinita de números amigáveis.

⁷ O método é de Fermat. Como veremos, o referido método não fornece os números amigáveis diretamente, mas delimita um conjunto de números que facilita uma procura posterior. Dos pares de números amigáveis dados no final do presente artigo de Euler, só os primeiros três têm a forma estipulada pelo método de Fermat.

⁸ Aqui e no que segue, n nem sempre é escrito como expoente no texto original. No entanto, o texto, bem como a lista de pares de números amigáveis ao final do artigo, mostra que a intenção de Euler foi que a referida variável fosse compreendida como expoente.

número primo, pois a tabela de números primos ainda não foi estendida além de 100 000.

Além disto, é evidente que, além da relação apontada, a seguinte questão deve ser considerada cuidadosamente: todos os números amigáveis são compreendidos nas referidas fórmulas? Examinei essa questão e, ao investigá-la com alguns recursos provenientes da natureza da divisão, obtive muitos outros pares de números amigáveis, dos quais comunicarei aqui trinta, incluindo os três já conhecidos. Apresentá-los-ei, porém, decompostos nos seus fatores para que possam ser examinados mais claramente em relação à sua origem e natureza. Eis, então, os números amigáveis:

I. ⁹	$2^2 \cdot 5 \cdot 11$	&	$2^2 \cdot 71$
II. ¹⁰	$2^4 \cdot 23 \cdot 47$	&	$2^4 \cdot 1151$
III. ¹¹	$2^7 \cdot 191 \cdot 383$	&	$2^7 \cdot 73727$
IV.	$2^2 \cdot 23 \cdot 5 \cdot 137$	&	$2^2 \cdot 23 \cdot 827$
V.	$3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 19$	&	$3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 239$
VI.	$3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 17$	&	$3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 107$
VII.	$3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 41$	&	$3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 251$
VIII.	$2^2 \cdot 5 \cdot 131$	&	$2^2 \cdot 17 \cdot 43$
IX.	$2^2 \cdot 5 \cdot 251$	&	$2^2 \cdot 13 \cdot 107$
X.	$2^3 \cdot 17 \cdot 79$	&	$2^3 \cdot 23 \cdot 59$
XI.	$2^4 \cdot 23 \cdot 1367$	&	$2^4 \cdot 53 \cdot 607$
XII.	$2^4 \cdot 17 \cdot 10303$	&	$2^4 \cdot 167 \cdot 1103$
XIII. ¹²	$2^4 \cdot 19 \cdot 8563$	&	$2^4 \cdot 83 \cdot 2039$
XIV.	$2^4 \cdot 17 \cdot 5119$	&	$2^4 \cdot 239 \cdot 383$
XV.	$2^5 \cdot 59 \cdot 1103$	&	$2^5 \cdot 79 \cdot 827$
XVI.	$2^5 \cdot 37 \cdot 12671$	&	$2^5 \cdot 227 \cdot 2111$
XVII.	$2^5 \cdot 53 \cdot 10559$	&	$2^5 \cdot 79 \cdot 7127$
XVIII.	$2^6 \cdot 79 \cdot 11087$	&	$2^6 \cdot 383 \cdot 2309$
XIX.	$2^2 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 263$	&	$2^2 \cdot 11 \cdot 43 \cdot 107$
XX.	$3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 71$	&	$3^3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 31$
XXI.	$3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 79$	&	$3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 199$
XXII.	$3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 47$	&	$3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 31$
XXIII. ¹³	$3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 1583$	&	$3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 227 \cdot 263$
XXIV. ¹⁴	$3^3 \cdot 5 \cdot 31 \cdot 89$	&	$3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29$
XXV.	$2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 60659$	&	$2 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 673$
XXVI.	$2^3 \cdot 31 \cdot 11807$	&	$2^3 \cdot 11 \cdot 163 \cdot 191$
XXVII.	$3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 79 \cdot 1103$	&	$3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 367$
XXVIII.	$2^3 \cdot 47 \cdot 2609$	&	$2^3 \cdot 11 \cdot 59 \cdot 173$
XXIV.	$3^3 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 79 \cdot 1103$	&	$3^3 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 367$
XXX.	$3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 59 \cdot 179$	&	$3^2 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 359$

⁹ Trata-se de 220 e 284, o par conhecido na Antigüidade.

¹⁰ Trata-se de 17296 e 18416, o par dado por Fermat.

¹¹ Trata-se de 9363584 e 9437056, o par dado por Descartes.

¹² Trata-se de 2603152 e 2707792, o que não é um par de números amigáveis.

¹³ O texto tem 513 na coluna esquerda. Isto é obviamente um erro de impressão para 5 . 13.

¹⁴ Trata-se de 372465 e 301455, o que não é um par de números amigáveis. Colocando 3² em vez de 3³, porém, resulta nos números amigáveis 124155 e 100485. O presente erro, bem como o relatado na nota 12, foi descoberto somente no início do século XX.

Referências

Dickson, L. E. 1971. *History of the Theory of Numbers*, Vol I. New York: Chelsea.
Euler, Leonhard. 1747. “De numeris amicabilibus”. *Nova acta eruditorum*, 1747, 267-269. Também em *Opera Omnia*, Series 1, Volume 2, 59-61 (Índice de Eneström E100).

John A. Fossa
Departamento de Matemática,
Universidade Federal do Rio
Grande do Norte

E-mail: jfossa@oi.com.br

Sarah Mara Silva Leôncio
Departamento de Matemática,
Universidade Federal do Rio
Grande do Norte

E-mail: sarahleoncio@hotmail.com