Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 8 nº 15 (abril/2008 - setembro/2008) - pág.43-55
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

O ÁBACO DE SILVESTER II

Eduardo Sebastiani Ferreira
UNICAMP - Brasil

(aceito para publicação em abril de 2007)

Resumo

No ano mil Gerbert de Aurillac foi eleito o primeiro papa francês, com o nome de Silvester II. Era um grande conhecedor da matemática na sua época e seu grande reconhecimento pelos historiadores é de ter introduzido na Europa Cristã o sistema arábico de numeração posicional. Gerbert fez isso com a adaptação do ábaco de coluna, introduzindo fichas com a numeração arábica. Seu trabalho foi pouco reconhecido, pela maneira obscura que ele se utilizou no escrever. Com este trabalho tento esclarecer o uso que ele fazia do seu ábaco com a numeração posicional arábica.

Palavras Chaves: Numeração, Ábaco**.**

Abstract

In the year one thousand Gerbert de Aurillac became the first French pope and adopted the name Silvester II. He had a deep knowledge of mathematics at his epoch and was acknowledged by historians as having been responsible for the introduction of the Arabic system of number positioning in Christian Europe. This was done by adapting the column abacus through the introduction of counters with the Arabic numbering. His work was not fully acknowledged due to unclear way in which it was written. In the present work I try to clarify the use Sylvester II made of his abacus with the Arabic number positioning.

Keywords: Numerical, Abacus.

Um pouco de sua história

Gerbert nasceu entre 940 e 945, perto de Aurillac, no centro da França. Alguns historiadores dizem ter sido em Auvergne e outros em Belliac, onde existe uma casa antiga, chamada pelos moradores "la maison du pape". Sua família é desconhecida; mas se sabe é que era muito pobre. Foi criado em Aurillac, no mosteiro beneditino de Saint-Géraud, tendo como mestre em "gramática", isto é, latim, o monge Raimond. Em 970, chegou a Aurillac, Borrel, conde de Barcelona, cidade que pertencia à França e reconhecida na época como um dos melhores centros de conhecimento matemático, ou seja: aritmética, geometria, astronomia e música, o que se explica por ser bem próxima ao território dos mulçumanos, que dominavam toda a Península Ibérica na época. Gerbert, por ser considerado o monge mais bem-dotado em ciências do mosteiro de Saint-Géraud, foi indicado pelo seu superior a acompanhar Borrel, a fim de instruir-se em ciências. Gerbert ficou em Barcelona até 970, quando acompanhou Borrel a Roma, onde este seria consagrado arcebispo de Vich. O papa João XIII, impressionado com os conhecimentos matemáticos de Gerbert, apresentou-o a Otton I, imperador da Alemanha e Itália. O imperador levou Gebert à sua corte para ensinar matemáticas. Gerbert confessou ao imperador que "de fato ele sabia bem as matemáticas, mas o que gostaria de aprender era a lógica.", que hoje chamamos de filosofia. Ele ficou em Roma, na corte de Otton I por mais de um ano, quando conheceu o arcebispo de Reims, Aldabéron, conhecido como um grande filósofo, que convidou Gerbert para acompanhá-lo a Reims. Em 972, Gerbert partiu para Reims como professor. Qualquer que fosse a disciplina, ele se revelava um pedagogo exemplar, referindo-se a Boécio ou a Cícero quando se tratava da didática, da retórica ou da filosofia. Foi naquela época que Gerbert criou seu ábaco de calcular, de que trataremos com detalhes mais tarde.

Gerbert voltou à Itália em 980, quando foi nomeado o superior do mosteiro de Saint-Colomban em Bobbio, por Otton II, que reinou depois da morte de seu pai, Otto I (por volta de 979). Naquela época Gerbert era considerado um dos beneditinos mais ricos do império e gastava fortunas na sua biblioteca. Entretanto, em 7 de dezembro de 983, quando morreu Otton II, Gérbert, enquanto estava no palácio imperial de Pavie, soube de grandes roubos pelos monges em Bobbio e que esses não o reconheciam mais como superior.

Sem o apoio da impertriz Adelaide e nem do papa João XIV, ele retornou para Reims no início de 984. Secretário do arcebispo Aldabéron e professor, ele teve como seu aluno o filho de Huges Capet, futuro rei da França, Robert "o piedoso", do qual ele se tornou secretário. Voltando a Roma em 996, assistiu à consagração de Otton III, imperador com apenas 16 anos. Otton III nomeou Gerbert seu predecessor e tornou-se seu grande amigo. Em 18 de fevereiro de 999, morreu o papa Grégoire V, com apenas 29 anos. Otton III, o jovem imperador do Santo Império, foi a Roma e solicitou a presença de seu amigo Gerbert, que na época era arcebispo de Ravena, nomeado pelo imperador pouco tempo antes. O conclave para eleição do novo Papa iniciou-se em 29 de março e no dia 2 de abril terminou com a nomeação de Gerbert. Gerbert tomou o nome de Sylvester II, em homenagem a São Sylvester, que batizou Constantino, o primeiro imperador cristão.

No dia 9 de abril de 999, dia de Páscoa, o novo Papa foi consagrado na Basílica de São Pedro. Ele teria um papel político muito importante junto a Otton III, numa cruzada para fortalecer o império e divulgar o cristianismo. Criou, para isso, os arcebispados da Polônia e da Hungria. No fim de janeiro de 1001, entretanto, Roma se revoltou e tanto Otton como o Papa foram atacados. Otton morreu em 24 de janeiro de 1002 por uma febre. Com o novo imperador Crescentius III, Sylvester II continuou seu pontificado com grande autoridade. Até que, no dia 3 de maio de 1003, durante um oficio celebrado na Santa Cruz em Jerusalém, ficou doente e morreu em 12 de maio, na cidade de Latran.

Gerbet foi julgado diferentemente, na Idade Média: era considerado como alquimista e bruxo, que foi buscar sua ciência com os "infiéis sarracenos" e vendeu sua alma a Lúcifer. Graves acusações que se mantiveram sobre o sábio homem durante séculos, ao ponto de, em 1648, a autoridade pontifícia julgar necessário abrir o túmulo de Silvester

II, a fim de verificar se os diabos do inferno não se encontravam lá. (Ilfrah, v. II, p. 360). Como cientista, deu grande contribuição ao avanço das ciências na Idade Média.

Obras de Gerbert

Gerbert deixou obras em Matemáticas, como: *De ábaco computi, De numerorum dividione, Geometria,* carta a Adelbold sobre o cálculo da área dos triângulos, a Constantin sobre a esfera e, também a Constantin, várias outras cartas. O *De ábaco computi* faz parte da carta nº160 a Constantin, da qual vamos tratar com mais detalhes.

Deixou, também, obras em filosofia: *De relationali et relatione uti;* em teologia: *Sermo de informatione episcoparum, De corpore et sanguine Domini;* algumas poesias, várias memórias relativas a sua diferença com seu predecessor Arnould, em relação ao arcebispado de Reims; algumas atas de sua administração como arcebispo de Ravenna; várias bulas papais; e uma grande quantidade de cartas.

Gerbert interessava-se bastante pela Mecânica, e os historiadores contam que fez construir na catedral de Reims um relógio mecânico e órgãos hidráulicos, cujo som se assemelhava ao de flauta.

Michel Chasles e a Histoire de L´arithmétique

Michel Chasles (1793-1880) lançou em 1843 o livro *Historie de l´Aritmétique: - Explication des Traités de l´Abacu, et particulièrement du Traité de Gerbert* em Paris. No mesmo ano publicou em Bruxelas o *Aperçu historique sur l´origine et le développement des méthodes em géométrie* e mais ainda: uma série de comunicados na Académie de Sciences de Paris foi publicada no Comptes Rendus des Sciences. Ele era professor de Geometria Superior na École Polytecnique, mais tarde da Sorbonne, ou seja, um cientista altamente respeitado no meio acadêmico. Nos trabalhos citados, Chasles defende a tese de que o sistema de numeração posicional hindu-arábico era conhecido pelo mundo romano muito antes de Gerbert o ter introduzido no uso do seu ábaco. Como prova de sua tese, Chasles remete-se ao livro de Boécio (cerca de 480-524) *Geometria.* "Mas, como a prova da análise moderna, esta Geometria não era de Boécio, era na realidade uma obra *aprocryphe,* composta por um autor anônimo do século XI."(Ilfrah, v. II, p.346). Ilfrah relata, também, na mesma página do seu livro que o primeiro aparecimento das nove cifras, com o significado que temos, em manuscritos antigos veio do norte da Espanha e data da segunda metade do século X. (São os *Codex Vigilianus,* de 1976).

Os comunicados de Chasles foram muito discutidos na Académie, com vários matemáticos da época contrários a sua hipótese, debatida, também, por matemáticos ingleses.

Hoje se tem como certo que foi Gerbert que introduziu na Europa cristã o sistema de numeração arábico, quando escreveu seu tratado — muito confuso para a época — do uso do ábaco. Mas é a partir do início do século XIII, graças à influência determinante de um grande matemático italiano, Leonardo de Pisa (por volta de 1170-1250), mais conhecido como Fibonacci, e do seu livro *Liber Abaci* (1202), que se tornou conhecido em toda Europa cristã o sistema numérico que utilizamos até hoje. Mesmo tendo no título a palavra ábaco, não se assemelhava aos tratados de aritmética da tradição de Gerbert e seus discípulos, pois Fibonacci explicava as regras do cálculo escrito usando o zero e as nove cifras arábicas, usando a regra posicional. “Sem dúvida Fibonacci, dando o nome mesmo de ábaco ao título de sua obra, queria evitar a ira daqueles que detinham o monopólio do domínio numérico e preconizavam antes de tudo os métodos do cálculo sobre o ábaco com fichas.”(Ilfraf, v. II, p.367)

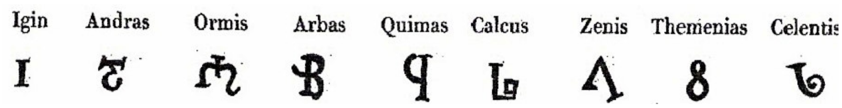
O ábaco de tabuleiro.
O uso do ábaco de tabuleiro parece ser muito antigo; a palavra latina *abacus* deriva do grego *abax* ou *abakion*, que significa tabuleiro, mesa.

Já o “ábaco de areia” faz arte da tradição oriental. Fibonacci refere-se a ele como o “ábaco pitagórico”; portanto, deveria ser conhecido pela escola pitagórica. Seu uso é mencionado no ocidente greco-romano por Plutarco e por Apulée. Constitui-se de um tabuleiro de madeira coberto de areia ou cera, onde se delimitavam as colunas sucessivamente e onde se escreviam as cifras com os dedos ou com um estilete. Essas cifras eram escritas em numeração grega ou romana. No romano era encabeçado pelos números I, X, C, $\overline{\mathrm{I}}$, $\overline{\mathrm{X}}$, $\overline{\mathrm{C}}$, onde $\overline{\mathrm{I}}$, $\overline{\mathrm{X}}$ e $\overline{\mathrm{C}}$ representam 1.000, 10.000 e 100.000, respectivamente. No tratado de Boécio aparecem, por exemplo: $\overline{\mathrm{M}}$, $\overline{\mathrm{X}}\ \overline{\mathrm{M}}$, $\overline{\mathrm{C}}\ \overline{\mathrm{M}}$ etc., para designar 1.000.000, 10.000.000, 100.000.000 etc, respectivamente. Para os gregos o ábaco tinha acima: α, ι, ρ, °α, ° ι, °ρ etc., para os números 1, 10, 100, 1.000, 10.000, 100.000, respectivamente.

$\overline{\mathrm{C}}$	$\overline{\mathrm{X}}$	$\overline{\mathrm{I}}$	C	X	I
		I I I	I I I I I I I I I	I I I	
		III	IX	III	

No exemplo acima está escrito 3.930. Nas operações, seguiam o processo de juntar os riscos, ou de retirar, ou ainda de repartir; depois era transcrito o resultado na numeração romana. O mesmo processo acredita-se que também era usado no ábaco grego.

Ábaco de Gerbert
A grande contribuição de Gerbert foi de, no lugar de colocar traços ou marcas, tantas quantas necessárias, em cada coluna, construir fichas de chifre de boi e nelas marcar a numeração hindu-arábica, que trouxera da Espanha. Assim, numa coluna onde deveria haver, por exemplo, nove traços, colocavam uma só ficha com a representação do número nove.



Esses são os nove símbolos da numeração de um a nove, que Gerbert usou no seu ábaco; não se conhecia até então o zero. Assim, ele introduziu na Europa cristã a numeração posicional hindu-arábica; isto para realizar no ábaco as operações, pois seu resultado era depois escrito em numeração romana.

Progressivamente, o ábaco de Gerbert e de seus rivais caiu em desuso. E, pouco a pouco, as cifras foram traçadas novamente sobre areia, em lugar de usar as fichas gravadas; e, mesmo, desaparecem as colunas do ábaco. Um cálculo de método mais simples, mais prático, mais elegante e mais rápido, que foi designado pelo nome de *algoritmo* (em referência ao nome do matemático árabe Al´Khuwãrizmi). Com isso, contrariamente aos "abacistas", os novos sábios europeus de cálculo foram obrigados a adotar o zero para marcar as casas que apareciam sem fichas no ábaco. Com o *Liber Abaci* (1202), Fibonacci esclarece o uso na escrita desse sistema de numeração posicional.

De Abaco Computi

O trabalho de Gerbert que teve certa repercussão na Idade Média foi *De Abacus Computi*, que aparece também com os nomes: *De numerorum divisone, Rationes numerorum abaci* ou *Constantino suo Gerbertus scolasticus*, em carta escrita, provavelmente em 999, a Constantino, monge da abadia de Fleury.

Quem fez um estudo mais detalhado desse texto foi Chasles, que o publicou nos Comptus Rendus de l´Académie de Sciences de Paris, em 1843.

No seu *Explication des Traités de l´Abacus, et particulièrement du Traité de Gerbert*, (C.R. 1843), Chales escreveu:

> Um dos documentos mais obscuros na historia da ciência é o famoso Traité de Gerbert sobre os números, que costumamos designar pelo título *De numerorum divisone*, ou simplesmente com o nome de *Ábaco,* termo que significa então *Arithmética*. [...] Concluímos que Gerbert trouxe seus conhecimentos aritméticos dos árabes e que seu método de cálculo ensinou com o nome de *Ábaco.* Essa opinião foi reconhecida em geral e o é até hoje, bem que quiseram, também, depois de séculos, fazer honras a Fibonacci de ser o primeiro a ensinar a aritmética árabe no ano 1202, de seu regresso da costa da África. Para conciliar, supomos que as regras de Gerbert eram tão confusas e inteligíveis, que ficaram estéreis e que foi necessário que Fibonacci reimportasse a aritmética árabe para os cristãos.(p.156)

No mesmo comunicado (p.161), Chasles afirma que:

> De fato, depois do século X, de que data o tratado de Gerbert, este modo de cálculo, ensinado nas escolas, se difundiu e fez grandes progressos. Os autores se familializaram com suas regras, no início tão obscuras, bem diversas e sem generalidade. Eles as generalizaram e tornaram, ao mesmo tempo, a exposição mais simples e clara, seu estilo, em uma palavra, tornou-se mais fácil e suas obras

> mais inteligíveis. Podemos assinalar a cada um uma data provável, no espaço de um século e meio, que separa o século X do começo do século XII. (p.161-162)

Gerbert inicia seu texto falando da forma do tabuleiro, que ele chama de *Abacus*, um tabuleiro composto de colunas consecutivas, tendo no alto os números romanos: I, X, C, $\overline{\mathrm{I}}$, $\overline{\mathrm{X}}$, $\overline{\mathrm{C}}$, $\overline{\mathrm{I}}$ $\overline{\mathrm{I}}$, etc. Em seguida, o autor escreve que se utiliza de nove caracteres representando os números: um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito e nove, colocados em fichas, e que são suficientes para fazer todas as operações de multiplicação e divisão com números inteiros, diz Gerbert. Essas fichas são colocadas nas colunas do tabuleiro: na primeira coluna, para representar as unidades simples; na segunda, os números decompostos por dezena dessa unidade; na terceira coluna, os das centenas, etc.

Ele usa as expressões *digitus* e *articulus*, sendo a primeira para designar os nove números naturais e os *articulus* são os múltiplos por dez desses números. Os outros são números compostos de *digitus* e *articulus.* Dizem alguns autores que essas expressões vieram do processo de cálculo usando os dedos. Assim, os números 3, 50, 1.000 têm um *digitus*, 3, 5 e 1. Quanto aos números 35, 460, têm um *digitus* 5 e 6, e um *articulus* 3 e 4. Por outro lado, o número é composto, como chama o autor, quando é formado por *digitus* e vários *articulus*, como 1.356, em que 6 é o *digitus* e os outros — 1,3e 5 — são *articulus*.

Os nove caracteres apresentados por Gerbert são denominados *igin, andras, ormis, arbas, quimas, calcus, zenis, temenias e celentis*, que correspondem aos nossos: um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove. Ele chama as colunas do ábaco de *arcus*, termo que foi usado muito posteriormente, mas não se sabe o porquê.

Gerbert inicia os cálculos com a multiplicação, que ele classifica em simples ou composta; contínua ou com interrupção. Ela é simples quando o multiplicador é expresso por um só caractere e composta quando aparece mais de um caractere. É contínua quando o multiplicador aparece sem interrupção, isto é, quando não existe coluna vazia no ábaco, ou ainda, quando não tem zero. Com interrupção, no caso de ter coluna vazia.

Vejamos como Gerbert procede na multiplicação, que não se diferencia muito do nosso processo. A seguir, damos um exemplo: 3.540 multiplicado por 36.

Ele coloca o multiplicando no alto do tabuleiro, os produtos no meio e o multiplicador embaixo. Inicia o processo pela direita; assim, multiplica-se primeiramente 6 por 4. Ele escreve: "Quando um número da coluna da dezena multiplica um número de uma outra coluna qualquer, coloca-se o dígito na coluna da dezena, a partir da do multiplicador, e o artigo na coluna seguinte". Assim, 6 vezes 4 é 24, o 4 é o digito e o 2, o artigo; coloca-se o 4 na coluna da dezena e o 2, na coluna da centena.

$\overline{\mathrm{C}}$	$\overline{\mathrm{X}}$	$\overline{\mathrm{I}}$	C	X	I	
		3	5	4		multiplicando

	1 1 9	3 8 1 5	2 2	4		6×40 6×500 6×3.000 30×40 30×500 30×3.000
1	2	7	4	4		*Purgatio* (soma) resultado
				3	6	multiplicador

O autor chama de *Purgatio* a soma dos produtos parciais e obtém o resultado da multiplicação. Em seguida ele dá as regras para multiplicação por números de ordem de dezenas, centenas, etc. e exprime essas regras por uma regra geral dizendo: “Tanto a coluna que multiplica é distante da coluna da unidade, tanto dígitos será distante da coluna do multiplicando; e o artigo será sempre colocado na coluna seguinte”. O processo de multiplicação apresentado por Gerbert, no seu ábaco, não difere muito do usado hoje; a grande diferença aparece na divisão.

O processo de divisão para o ábaco de Gerbert foi apresentado de duas maneiras: sem diferença e com diferença. Ele usa os mesmos nomes que usamos hoje: divisor e dividendo. Para dividir 4.050 por 301, por exemplo, ele diz que os dividendos são 4.000 e 50, o maior divisor, 300 e o menor divisor, 1. Como na multiplicação, há quatro tipos de divisão: simples ou composta e contínua ou com interrupção.

O método sem diferença é parecido com o algoritmo que temos hoje, para cada divisão parcial. Quando o divisor é simples (um número natural de 1 a nove): por exemplo, o número 4; tomemos para divisor o 563. Transporta-se o 4 sob o dividendo 500, na coluna das centenas, e dividimos 5 por 4; o quociente é 1 e o resto também é 1, que fica na coluna das centenas. O divisor, sendo maior que 2, é transportado para a coluna à direita do dividendo, isto é, para a coluna da dezena, e tomamos 2 como o artigo 20 e dividimos 20 por 4; e assim por diante.

C	X	I	
		4	divisor
5	6	3	dividendo
1 	 4 	 3	Resto da divisão de 5 por 4 16 dividido por 4 3 é menor que o divisor
		3	resto

1	4		Denominação $500 = 4 \times 100 + 100$ $160 = 4 \times 40$
1	4		Soma das denominações (resultado)

Gerbert usa o termo denominação para as quantidades de divisor que tem cada parte do dividendo, assim:

$$563 = 500 + 60 + 3 = 400 + 100 + 60 + 3 = (100)4 + 100 + 60 + 3 = (100)4 + 160 + 3 = (100)4 + + (40)4 + 3 = (140)4 + 3$$

Ou seja, em 563 existem 4 vezes 140 e sobra um resto 3, que é menor que o divisor 4.

O deslocamento da denominação - Aqui ele se refere ao deslocamento que tem que ser feito, quando o divisor for maior que a dezena: "Em qualquer estágio, acima da coluna das unidades, que seja primitivamente o divisor, coloca-se a denominação em uma coluna depois do divisor transportado."

Na divisão composta, Gerbert trata do divisor contínuo (sem zeros intermediários) e com interrupção (com zero intermediário). Ele dá um exemplo com interrupção $100.000 \div 20.023$. A regra é a mesma nos dois casos, contínua ou com interrupção: o maior divisor (o divisor de maior ordem) deve ser transportado sob o dividendo, se for menor ou igual a esse; ou, então, numa coluna anterior (à direita), se for maior. No exemplo, o maior divisor é 20.000; como o dois é maior que 1, então o 2 deve ser colocado na coluna dos dez mil. Pergunta-se, então: Quantas vezes 10 contém 2? Contém 5, mas não se pode tomar 5 como denominação, pois não podemos retirar do dividendo o produto dos divisores inferiores 20 e 3 pela denominação. Então, tomamos 4 para denominação, etc..

$\overline{C}$	$\overline{X}$	$\overline{I}$	C	X	I	
	2			2	3	divisor
1	2 2 1	 9	 1 9	 8		Maior divisor colocado à direita do dividendo Dividendo Resto $4 \times 10.000 + 20.000$ Resto com: $19.900 + 100$ Produto do divisor 20 pela denominação 4
	1	9	9	2		Resto

				1	2	Produto do divisor 3 pela denominação 4
	1	9	9		8	Resto
					4	Denominação

Procedimento:

$$100.000 = 4(20.000) + 20.000 = 4(20.000) + 19.900 + 100 = 4(20.000) + 19.900 + 4(20) +$$
$$+ 20 = 4(20.000) + 19.900 + 4(20) + 4(3) + 8 = 4(20.000 + 20 + 3) + 19.908 = 4(20.023) +$$
$$+ 19.908$$

Quanto à *divisão por diferença*, é o processo introduzido por Gerbert que se diferencia mais de nosso processo de divisão. Esse processo, que desconhecemos hoje, Gerbert o apresenta como procedimento, sem demonstração, mas aparece em outros tratados de ábaco da Idade Média. Chasles acreditava que ele desconhecia seu princípio.

Assemelha-se muito com o procedimento para cálculo mental; assim, na busca de um número que, multiplicado, esteja mais perto do divisor, muda-se o divisor por outro fictício de ordem maior, que torne mais fácil fazer essa busca. Por exemplo: para dividir 43 por 7, vamos dividir por 10 com a diferença 3 para o divisor. Então, a denominação de 40 para 10 é 4. O produto da denominação 4 pela diferença 3 é 12. Somando esse produto com o resto do divisor 3 (43 – 40 = 3), obtemos 15. Repetindo a divisão, a denominação de 15 para 10 é 1 e tem resto 5. O produto da denominação 1 pela diferença 3, mais esse resto, dá 8. Como não é possível dividir 8 por 10, então usamos o procedimento primeiro, isto é, dividindo diretamente 8 por 7, tem denominação 1 e resto 1. Logo, na soma (*Purgatio*) das denominações, tem-se 4 + 1 + 1 = 6 e resto 1.

Um outro exemplo aparece no manuscrito nº 533 do Fonds de Saint, autor desconhecido, provavelmente de 1200 – Victor, da Biblioteca Real de Paris, apud Charles-Régles de l´Abacus – C.R.- t.16- p.236)

Dividir 7.800 por 166:

$\bar{I}$	C	X	I	
	 1	3 6	4 6	Diferença Divisor
7 1	8 1 9	 2		Dividendo Resto do maior dividendo Produto da diferença 4 pela denominação 3 (4×30) Produto da diferença 3 pela denominação 3 (30×30)
2	8	2		Novo dividendo

	3	4		Produto das diferenças pela denominação 1 (340×1)
1	1 1	6 2 5		Novo dividendo Produto da diferença 4 pela denominação 5 (4×5) Produto da diferença 3 pela mesma denominação (30×5)
	3 1	3 3	 4	Novo dividendo Resto do maior dividendo Produto das diferenças pela 3ªdenominação 1
	1	6	4	Novo dividendo, que é menor que o divisor, logo é o resto da divisão
		1 3	1 5	Denominações
		4	6	Soma das denominações (Purgatio) Resultado da divisão

Procedimento:

$$7.800 = 7.000 + 800 = 30(200) + 1.000 + 800 = 30(166 + 30 + 4) + 1.800 = 30(166) + 900 + 120 + 1.800 =$$
$$= 30(166) + 2.820 = 30(166) + 10(200) + 820 = 30(166) + 10(166 + 30 + 4) + 820 = 30(166) + 10(166) +$$
$$+ 300 + 40 + 820 = 30(166) + 10(166) + 1.160 = 30(166) + 10(166) + 1.000 + 160 = 30(166) + 10(166) +$$
$$+ 5(200) + 160 = 30(166) + 10(166) + 5(166 + 30 + 4) + 160 = 30(166) + 10(166) + 5(166) + 150 + 20 +$$
$$+ 160 = 30(166) + 10(166) + 5(166) + 330 = 30(166) + 10(166) + 5(166) + 300 + 30 = 30(166) +$$
$$+ 10(166) + 5(166) + 1(200) + 100 + 30 = 30(166) + 10(166) + 5(166) + 1(166 + 30 + 4) + 130 =$$
$$= 30(166) + 10(166) + 5(166) + 1(166) + 30 + 4 + 130 = (30 + 10 + 5 + 1)166 + 164 = 46\times 166 + 164$$

Logo, 7.800 têm 46 vezes 166 e sobram 164, que é menor que o divisor 166.

Um outro procedimento que Gerbert apresenta para a divisão é o caso de dividir milhares por centenas com unidades. Ele toma um mil, que chama de *ad minuta componenda*, e divide o excedente, isto é, nove centenas, pelo maior divisor, encontrando uma denominação parcial. Reserva-se o resto. Multiplica-se o dígito do divisor (*minutum*) pela denominação parcial. Coloca-se nas colunas correspondentes a soma do que foi reservado e do que restou do produto. Multiplica-se essa soma pelo número de parcelas de mil que tem o dividendo e continua-se a divisão.

Gerbert dá um exemplo : $3.000 \div 407$

$\bar{I}$	C	X	I	
	4		7	Divisor
3				Dividendo
1				Parcela do dividendo (novo dividendo)
	1			Reserva do novo dividendo
				Novo dividendo
	9 1			Resto da divisão de 900 pela denominação 2
		1	4	Multiplicação da denominação 2 pelo dígito 7
		8	6	Resto da diferença de 1.000 por 14
				Soma dos restos (1.000+86)
	1 5	8 5	6 8	Multiplicação da soma anterior pelo maior dígito do dividendo (novo dividendo)
	1	5	1	Resto da divisão de 559 por 407($1 \times 407 + 151 = 558$)
			2	Denominação do 1.000
			6	3 vezes a denominação anterior
			1	Denominação da divisão do resto 558 por 407
			7	*Purgatio* das denominações

Resultado: $3.000 \div 407 = 7 \times 407 + 151$

Procedimento: $$\begin{cases} 3.000 = 3(1.000) = 3[2(400) + 100 + 100] = 3[2(400) + \\ + 2(7) + 86 + 100] = 3[2(407) + 186] = 6(407) + 558 = \\ = 6(407) + 1(407) + 151 = 7(407) + 151 \end{cases}$$

Estrutura do *Traité de Gerbert*

Existem nove cópias do *Tratado* de Gerbert: três na Bibliothèque Nationale de Paris, manuscritos nºs. 6.620,7.189 e 8.663; um na Bibliothèque de Chartres, manuscrito nº 41; um na Bibliothèque de Rouen, manuscrito nº 581; um na Bibliothéque da abadia de Saint-

Emmeran de Ratisbonne, manuscrito nº LXXIII; um na Bibliothèque de Leyde, nos manuscritos de Scaliger, com nº 38; e dois na Bibliothèque Royale de Buxelas, nºs.10.079 e 10.095.

Gerbert inicia seu texto falando diretamente da multiplicação e a divide em seis categorias pelos multiplicadores: a simples (por um dígito), da dezena, da centena, de milhar, da dezena de milhar e da centena de milhar. Usa o processo que foi citado, mostrando onde se devem colocar os *dígitos*, ou *artigos*, nas colunas respectivas.

Depois, apresenta a divisão, que divide em dez parágrafos:

I – Divisão de unidades por unidades.

II – Divisão de dezenas, centenas, etc. por unidades.

III – Divisão de centenas, milhares, etc. por dezenas.

IV – Divisão de dezenas, centenas e milhares, simples ou reunidos, por unidades juntas com dezenas. Método das diferenças.

V – Divisão de outra maneira, pelo método das diferenças, de centenas, milhares, etc. por unidades juntas com dezenas. Reduzindo o dividendo a uma só unidade de sua ordem e multiplicando o quociente e o resto pela denominação do dividendo, isto é, pelo número das unidades que contém.

VI – Divisão de dezenas juntas com centenas, ou milhares, por centenas juntas com milhares, etc. Método das diferenças.

VII – Outra maneira de dividir centenas ou milhares pelos mesmos divisores, simples ou compostos. Método das diferenças.

VIII – Divisão de centenas por centenas juntas com unidades, com um lugar vazio ao meio (uno médio numerorum intermisso), ou milhar por milhar junto com dezenas (uno médio intermisso). Procedimento atual.

IX – Divisão de milhar por centenas juntas com unidades, ou dezenas de milhar por milhar juntas com dezenas. Dividindo somente uma unidade de ordem do dividendo e multiplicando o quociente e o resto pela denominação desse dividendo.

X – Quantas vezes um dividendo contém um divisor. No último parágrafo ele explica como se formam os quocientes, o que não foi dito antes. Ele se restringe a indicar os cálculos, sem dizer o significado do resultado. (Chasles, C.R. Iº semestre de 1843, t. XVI, nº 6, p.284).

Conclusão

Foi, então, Gerbert d´Aurillac que introduziu em 999, na Europa Cristã, o sistema de numeração posicional arábico, que utilizamos hoje. Ele o fez criando um ábaco, no qual esse tipo de numeração aparece, mas sem o zero, que era desconhecido mesmo pelos árabes da Península Ibérica. Com a escrita dos algoritmos das operações, apareceu, então, a necessidade do zero, para designar a(s) coluna(s) vazia(s) que havia no ábaco. Esta introdução foi foi feita na Europa por Fibonacci, em 1202, no seu famoso tratado *Liber Abaci*.

Bibliografia

CHASLES, M. *Histoire de l´Arithmétique*: dévelloppement et détails sur divers du système de l´Abacus – C.R.de l´ Academie des Sciences - Paris– t. XVI -1843

- *Aperçu historique sur l´origine et le dévelloppement des méthodes em géométrie* – M. Hayes- Bruxelas – 1837
- *Histoire de l´arithmétique*- Analyse et explication du traité de Gerbert. C.R. de l´Académie des Sciences – Paris – t. XVI – 1843
- *La géométrie de Boèce* – un nouveau système de numération – M. Hyes – Bruxelas – 1836
- *Histoire de l´arithmétique* – Explication des Traités de l´Abacus, et particulièrement du Traité de Gerbert- C.R. de l´Académie des Sciences – Paris – t. XVI – 1843

HAVET, J. *Lettres de Gerbert* (983-997) – A. Picard. Paris 1889

H...COMME HISTOIRE – *L´élection su premier pape français* – Point de Vue – nº 2854 – Paris - 2003

MONTUCLA, J. F. *Histoire des Mathématiques* – Henri Agasse, Paris 1799-1802 .

IFRAH, G. *Histoire Universelle des chiffres* – Vols: I e II – Éditions Robert Laffont . Paris – 1981- 1994

SEVERINI, A. *Boetii – de la institutione arithmetica* – Friedlein – Lipsiae- 1867

Eduardo Sebastiani Ferreira
Pesquisador colaborador
NIEM/IMECC/UNICAMP

E-mail: esebastiani@uol.com.br