SOBRE A INCOMPATIBILIDADE DOS NÚMEROS NEGATIVOS COM O CONCEITO GREGO DE *ἈRITHMÓS*

John A. Fossa
Marta Figueredo dos Anjos
UFRN - Brasil

(aceito para publicação em abril de 2007)

Resumo

Uma análise epistemológica do conceito grego de *ἀrithmós* revela que a Aritmética tinha quatro partes, compondo uma Linha Dividida: a Aritmética Prática, a Logística Prática, a Logística Teórica e a Aritmética Teórica. Dentro da Aritmética Teórica, número foi concebido como coleções de mônadas e, portanto, incompatível com números negativos. Não obstante, números negativos surgiram implicitamente dentro da Logística.

Palavras Chaves: Matemática Antiga. Números negativos. Conceito grego de número.

Abstract

An epistemological analysis of the Greek concept of *ἀrithmós* reveals that Arithmetic had four parts, comprising a Divided Line: Practical Arithmetic, Practical Logistics, Theoretical Logistics and Theoretical Arithmetic. In terms of Theoretical Arithmetic, number was thought of as collections of monads and, therefore, incompatible with negative number. Even so, negative numbers arose implicitly in Logistics.

Keywords: Ancient Mathematics. Negative numbers. Greek concept of number.

A primeira ocorrência do uso de números negativos entre os antigos gregos é geralmente atribuída a Diofanto de Alexandria (c. 250). Diofanto, é claro, não viveu no período clássico da civilização grega, o qual podemos considerar encerrado com o falecimento de Alexandre (323 a.C.). Nem tampouco pertenceu ao período subseqüente, o helenístico, tão importante para a matemática grega, devido ao surgimento de grandes investigadores como, entre outros, Euclides (c. 300 a.C.) e Arquimedes (287-212 a.C.), pois esse período é concluído com a conquista romana em 31 a.C. Diofanto, de fato, foi um dos últimos grandes matemáticos da cultura grega (ver Fossa, 2003) e é só na sua obra, *Aritmética*, que percebemos algumas evidências para o uso de os números negativos entre os gregos.

Não podemos, no entanto, ficar contente com a descrição feita no parágrafo anterior, pois Diofanto não somente foi o último grande representante da matemática grega mas também nunca afirmou algo parecido com a frase: "a resposta é –17". Isto é, Diofanto, nas partes da sua obra que sobreviveram até a atualidade, não mencionou explicitamente os números negativos. A atribuição a ele do uso de números negativos é predicada na utilização, de modo implícito, na sua obra, dos mesmos na resolução de equações e, mais importante, o uso implícito da regra dos sinais para a multiplicação. Assim, o surgimento dos negativos na matemática grega é não somente tardio, mas também relutante. Em conseqüência, como mostram, por exemplo, Ernest Nagel (1935) e Helena M. Pycior (1997), a história da aceitação, ou não, dos negativos na matemática européia foi comprida e complicada.

A compreensão da atitude dos gregos perante os números negativos requer um estudo epistemológico do seu conceito de número. Antes de voltar a nossa atenção para a referida análise, porém, será interessante fazer uma pequena investigação da história dos números negativos em outras sociedades antigas, pois isto nos permitirá colocar a questão no contexto cultural com mais clareza.

Culturas Antigas Não-Gregas

Vários historiadores da matemática afirmam que os babilônios utilizaram números negativos. Howard Eves (1995, p. 63), por exemplo, alega que há tábuas babilônicas que "... fazem uso explícito da regra de sinais da multiplicação". Jens Høyrup (2002, p. 294-296), entretanto, mostra que a referida alegação é um engano. De fato, mostra, ainda mais, que o erro é oriundo de uma interpretação equivocada de umas traduções das tábuas feitas por Neugebauer. Segundo Høyrup, os babilônios não eram cientes dos números negativos, nem da regra dos sinais e esses assuntos não aparecem, nem implicitamente, nos seus textos.

A matemática chinesa é também apontada como a origem dos números negativos. Segundo Eves (1995, p. 245-246), o matemático chinês Li Yeh (1192-1279) criou uma notação para os números negativos. O trabalho do referido matemático foi, ainda segundo Eves, uma extensão da matemática dos *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática*, que data de, mais ou menos, 200 a.C. É, de fato, essa obra que é freqüentemente apontada como contendo a origem histórica do conceito dos números negativos. O tratamento desses números na referida obra, embora restrito às operações de soma e subtração, é, contudo, bastante semelhante ao tratamento dado a esses números por Diofanto, pois, segundo Jean-Claude Martzloff (1997, p. 200-203), os mesmos foram usados apenas em situações específicas, envolvendo a resolução de equações ou o desenvolvimento de certos algoritmos. Foram entendidos como uma "perda", embora nem sempre no sentido econômico. Assim, podemos concluir que, pelo menos durante o primeiro milênio d.C., os chineses, embora usassem números negativos nos seus cálculos, não conceberam os mesmos como entidades matemáticos independentes.

A apreciação clara dos números negativos como entidades independentes foi obtida por certos matemáticos hindus, embora mesmo entre eles, não achamos uma tematização do assunto. Mesmo assim, usaram-nos inclusive como respostas finais de problemas e investiram-nos com a metáfora de perda econômica. Brahmagupta (século VII d.C.), como

relata Carl Boyer (1974, p. 160-161), incluiu as soluções negativas de equações quadráticas e sistematizou, pela primeira vez, a aritmética dos negativos.
O pensamento dos chineses e dos hindus referente aos números negativos ocorreu posterior ao período da Grécia Clássica e, portanto, não poderia influenciar os gregos desse período. Dado o intenso desenvolvimento dos gregos com a matemática, porém, é estranho que eles não desenvolveram algum tipo de pensamento semelhante ao das civilizações chinesa e hindu, especialmente em relação à metáfora de perda econômica. Em qualquer caso, ainda temos de investigar a matemática egípcia, pois o Egito é situado geograficamente mais próximo à Grécia e temporalmente anterior à mesma. Além disto, os gregos foram muito insistentes em atribuir aos egípcios o papel de ser seus mestres matemáticos.
Gay Robins e Charles Shute (1985) descrevem o uso egípcio de malhas quadriculadas na construção das pirâmides e na regulação de proporções, aplicadas a obras de arte. As malhas usadas na construção das pirâmides são muito interessantes porque o nível do chão é indicado e os outros níveis, tanto para cima quanto para baixo, são numerados sucessivamente. Essa técnica artística poderia ter fornecido aos gregos a metáfora que os permitiria desenvolver a idéia de números negativos, especialmente quando esses números começaram a surgir no contexto da resolução de equações. No entanto, isto simplesmente não ocorreu. Ainda mais, não somente não aconteceu, mas a atitude grega, como já mencionamos, foi um empecilho para a aceitação dos números negativos pelos matemáticos europeus por muitos séculos. Para tentar entender porque os gregos não desenvolveram o conceito de números negativos, será necessário fazer uma análise epistemológica do conceito grego de número, *ảrithmós*.

A Matemática como uma Linha Dividida

Os relatos da origem da matemática grega apontam os físicos jônicos como os primeiros a atuarem nessa área. Os referidos pensadores se caracterizavam pela procura do *ảrché*, ou seja, a matéria básica e o princípio do movimento de todas as coisas. Tales de Mileto, por exemplo, identificou esta matéria básica com a água. Neste sentido, Pitágoras adotou o número como esta matéria básica, o que indica que ele provavelmente concebia o número como algum tipo de matéria rarefeita. Mesmo assim, Pitágoras pensava que era necessário ir além do *ảrché*, pois este, por si só, não explicava o mundo. É necessário procurar o *lógos*, ou seja, a inteligibilidade do mundo. Desta forma, Pitágoras argumentou que o *lógos* consistia em número e harmonia, onde a harmonia consiste em razões e proporções entre números. Assim, a própria inteligibilidade do mundo era dada a partir do estudo dos números e das suas relações, ou seja, através da matemática.
Arquitas de Tarento, um pitagórico da primeira metade do século IV a.C., organizou o estudo da matemática em quatro categorias: aritmética (o estudo de número), geometria (o estudo de grandezas), música (o estudo de razões e proporções) e astronomia (o estudo de grandezas em movimento), as quais são denominadas a partir da Idade Média de *Quadrivium*[1]. Platão (427 a.C.?-347 a.C.), que chegou a uma compreensão maior do pitagorismo através do seu contato com Arquitas, colocou estas quatro categorias sobre um

[1] Curso de estudos matemáticos; o *Trivium*, composto do estudo da Gramática, Lógica e Retórica, era o curso literário.

formato hierárquico, delineando a seguinte seqüência de ascensão da esquerda para a direita: Astronomia / Geometria / Aritmética / Música. Esta estrutura deriva da sua doutrina da Linha Dividida, esboçada no Livro VI d'*A República*. No Livro VII da mesma obra, Platão explica a referida doutrina através da bem conhecida Alegoria da Caverna. Segundo Fossa e Erickson (2005, p. 60) os níveis ontológicos e suas respectivas formas de apreensão podem ser esquematizados da seguinte forma:

Níveis Ontológicos

Mundo das Sombras / Formas Cosmológicas / Formas Matemáticas / Idéias Transcendentais

Opinião Comum / Opinião Científica / Razão Discursiva / Intuição

Níveis Epistemológicos

O primeiro nível, o mundo das sombras, corresponde, na Alegoria da Caverna, ao prisioneiro preso dentro da caverna, onde ele só vê sombras de estátuas passando na parede da caverna. Assim, esse "mundo" constitui-se de imagens de imagens em constante movimento, as quais, portanto, não podem ser objetos do verdadeiro conhecimento; muito pelo contrário, são apenas objetos do modo de apreensão chamado Opinião Comum. No segundo nível, o prisioneiro já está liberto, mas continua dentro da caverna. Toma conhecimento das entidades oriundos do mundo físico e, desta forma, atinge o nível epistemológico da Opinião Científica. Em seguida, o nível das Formas Matemáticas corresponde ao momento em que o prisioneiro liberto está fora da caverna, o que representa a apreensão de objetos inteligíveis, objeto do verdadeiro conhecimento. O modo de apreensão é a Razão Discursiva, a qual procede de verdades para outras verdades, justificando as últimas através das primeiras. A Razão Discursiva, porém, não pode explicar seus próprios princípios; para isto, é necessário atingir o nível das Idéias Transcendentais, simbolizado na Alegoria pelo prisioneiro olhando diretamente ao sol. Isto se concretiza pela Intuição, modo imediato de cognição.

Segundo a análise de Fossa e Erickson (2005), a Linha Dividida tem uma estrutura matemática bastante interessante. A própria definição da linha – um segmento de linha dividido em duas partes, cada uma das quais sendo dividida de novo na mesma razão – implica $b=c$ e, portanto, que b é a média geométrica entre a e d. Quando concebemos a e d como inteiros positivos (devido à tradição pitagórica), eles são ou quadrados perfeitos ou múltiplos de quadrados perfeitos e a Linha Dividida toma a seguinte forma: $\underline{kn^2 / knm / knm / km^2}$, com m e n primos entre si e k é um número natural qualquer.

Para entender a lógica da Linha Dividida, é importante compreender que os dois termos internos são aritmeticamente iguais, mas geometricamente distintos, o que ressalta o seu papel como médias que ligam o todo numa unidade harmônica. Também nos proporciona uma compreensão mais profunda do mundo, pois, por um lado, percebemos o mundo com toda a sua diversidade, enquanto, por outro lado, percebemos a sua unidade oculta. Assim, as Formas Cosmológicas e as Formas Matemáticas, de um ponto de vista, são diferentes, pois as primeiras constituem-se de objetos sensíveis, enquanto as segundas se constituem de objetos inteligíveis. De um outro ponto de vista, porém, as Formas Cosmológicas são nada mais do que instâncias das Formas Matemáticas.

Erickson e Fossa (2005) mostram que cada parte da Linha Dividida desabrocha em novas Linhas Divididas. Isto é especialmente claro em relação à Matemática, pois o próprio Platão, como vimos acima, indica que a Matemática se estrutura segundo a seguinte Linha:

Astronomia / Geometria / Aritmética / Música. De novo, de um ponto de vista, a Geometria e a Aritmética são distintas, porque a primeira é o estudo de grandezas (quantidades contínuas), enquanto a segunda é o estudo de números (quantidades discretas). De um outro ponto de vista, porém, as duas mostram a sua unidade no fato de que são ambas o estudo de quantidade. Assim, essa hierarquização tem, de fato, a estrutura de uma Linha Dividida, o que seria revelada de modo ainda mais profundo por Descartes com a sua geometria analítica.

A Aritmética Como uma Linha Dividida

A parte da matemática grega que nos interessará é Aritmética, pois como já vimos, essa parte compreende o estudo de números. Os historiadores da matemática grega, como, por exemplo, T. L. Heath (1981, v. 1, p. 13-16), geralmente dividem esta parte da matemática em dois estudos, a arte (*téchne*) de calcular, chamada Logística (*Logistiké*), e a investigação dos próprios números e suas propriedades, chamada Aritmética (*Ἀrithmetiké*). A distinção é geralmente compreendida como uma distinção entre atividades práticas e estudos teóricos – Heath, por exemplo, identifica a Aritmética com a Teoria dos Números. No entanto, Jacob Klein (1968, p. 21-25) oferece uma interpretação diferente, pois, para ele, cada uma destas duas partes são divididas em sub-partes práticas e teóricas. Assim, a Aritmética é composta das seguintes quatro partes: Logística Prática, Logística Teórica, Aritmética Prática e Aritmética Teórica.

A análise de Klein é muito perspicaz, porque consegue superar a distinção Logística/Aritmética em termos da distinção Prática/Teoria e, portanto, identifica os quatro tipos de Aritmética (no sentido geral, ver a figura mais adiante). Mesmo assim, porém, sua análise também parece confusa em dois aspetos. Em primeiro lugar, Klein confunde[2] a Logística Teórica – que é uma parte da Aritmética (no sentido geral) – com a Música, o que resulta da sua caracterização (KLEIN 1968, p. 24) da Logística Teórica da seguinte maneira:

> According to this definition [as definições de 'Aritmética' e 'Logística', dadas por Platão na *Gorgias* e na *Charmides*], theoretical logistic would have to include primarily knowledge concerning all those *relations*, i.e., ratios (λόγοι) among "pure" units, on which the success of any calculation depends, while knowledge of these "pure" *numbers themselves* would be reserved for theoretical arithmetic. [Ênfase no original.]

Há, de fato, uma compreensão de número de um ponto de vista musical, pois todo inteiro positivo n é dado fundamentalmente como uma razão com a unidade, n:1. Também parece verdadeira que, para Platão, razão e proporção fundamentam o sucesso do cálculo com números. Mas nada disso justifica a transposição de razão e proporção da esfera da Música para a da Aritmética (no sentido geral). Propomos a seguinte interpretação[3] das sub-partes da Aritmética (no sentido geral):

Aritmética Prática: contagem de coisas;
Aritmética Teórica: enumeração de unidades;

[2] Klein alega que a referida confusão ocorre em autores posteriores e que isto é problemático.
[3] Nossa interpretação foi claramente beneficiada pela análise de Klein.

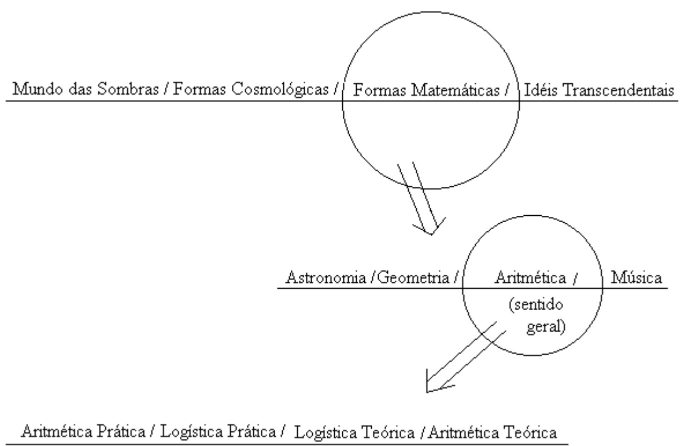
Logística Prática: uso de cálculos para resolver problemas práticos;
Logística Teórica: cálculos com números puros.

Desta forma, a distinção entre atividades práticas e atividades teóricas depende da aplicação ou não das mesmas ao mundo. Assim, "2 exércitos + 3 exércitos = 5 exércitos" faz parte da Logística Prática, enquanto "2+3 = 5" faz parte da Logística Teórica. Voltaremos ao conceito de número puro mais adiante.

O outro problema da interpretação de Klein é que não mostra como as partes da Aritmética (no sentido geral) são hierarquizadas. Isso provavelmente é uma conseqüência da maneira como ele faz a divisão, primeiramente distinguindo entre Aritmética e Logística e depois dividindo cada uma destas em Prática e Teoria. Quando dividimos a Aritmética (no sentido geral) em Prática e Teoria e depois dividimos cada uma destas em Logística e Aritmética (no sentido restrito), fica mais aparente como as partes formam a seguinte nova Linha Dividida:

Prática Teoria
Aritmética Prática / Logística Prática / Logística Teórica / Aritmética Teórica

A Logística Prática é simplesmente a Logística Teórica aplicada aos problemas do mundo e, portanto, são médias apropriadas entre os extremos da Aritmética Prática e da Aritmética Teórica. Platão concebeu os extremos como sendo radicalmente distintos, porque as unidades de contagem são radicalmente distintos. A Aritmética Prática usa unidades diferentes em cada contagem. Para "2 exércitos", por exemplo, a unidade é um exército, enquanto para "3 vasos" é um vaso. Ainda mais, as coisas contadas não são iguais, pois mesmo quando dizemos "2 exércitos" isto não implica que os dois exércitos são iguais. Mesmo objetos que parecem iguais, visto que são objetos sensíveis, contêm matéria, um princípio de diferenciação, e, portanto, são distintos. A enumeração da Aritmética Teórica, em contraste, é sempre de objetos inteligíveis, o seja, as unidades puras. A seguinte figura indica como a Linha Dividida original desabrocha nas outras duas Linhas consideradas acima:



Número Puro e Número Negativo

Podemos, por um momento, limitar nossa atenção à Aritmética Prática e a Aritmética Teórica, pois é nesses dois tipos de conhecimento que encontramos o conceito de número (*ảrithmós*). Como Klein (1968, p. 46) afirma, "the *arithmos* indicates in each case a *definite number of definite things*" [ênfase no original]. Como já vimos, porém, a quantidade indicada é dependente da unidade usada para fazer a contagem. No caso da Aritmética Prática, as unidades utilizadas são objetos sensíveis, enquanto as unidades da Aritmética Teórica são objetos inteligíveis. Isto é, um número puro é simplesmente uma coleção destas unidades que não contêm matéria. De fato, a unidade (*monás*) é uma mônada, ou seja, um ser que é completamente simples e sem partes.

Talvez isso necessite de mais explicação, pois há um certo sentido em que um organismo, por exemplo, é chamado "um" ou "tem unidade", apesar de ser composto de várias partes. Um exército é outro exemplo, pois, apesar de ter partes componentes, *um* exército tem unidade. As palavras "um" e "unidade", usadas nestas situações, porém, são claramente sendo usadas em um sentido derivativo, devido à sua aplicação a coisas materiais. Mesmo quando a mônada foi concebida pelos primeiros pitagóricos como *ảrché*, porém, ela foi concebida como o correlato do Hum teológico, fonte de tudo. Esse ser é simples porque se tivesse partes, teríamos de procurar a fonte dessas partes, bem como a diferença entre as partes, numa outra entidade; mas, isso implica que o ser contemplado não é, afinal, a fonte original. Seja isto como for, é mais importante para os nossos propósitos investigar o conceito de *ảrithmós* do período clássico, pois é nesta forma que entraria na obra de Euclides, entre outros autores, e informaria, mais tarde, a matemática européia.

No período da Grécia clássica, devido à análise platônica, a mônada (número puro) foi concebido como um ser inteligível. Se, portanto, pudéssemos analisar a mônada em partes componentes, cada parte seria um ser inteligível e, portanto, o todo seria muito, não um. O mesmo aconteceria se a mônada tivesse propriedades distintas, pois cada propriedade geraria um ser inteligível, tendo apenas aquela propriedade, e a suposta mônada desabaria em muitas. Assim, a mônada é necessariamente simples.

A unidade, compreendida como a mônada, é, em virtude da sua simplicidade, irredutível. Assim, como já dizemos, é vista como a origem de tudo pelos pitagóricos. Na Aritmética Teórica, a unidade gera número pela iteração de si mesmo e, portanto, número é sempre uma coleção de mônadas. Em conseqüência, número puro é sempre um inteiro positivo. A unidade não pode gerar números negativos porque, para fazê-lo, teria de ter duas propriedades, uma a ser usada para gerar os números positivos e outra a ser usada para gerar os negativos. Neste caso, a unidade não seria simples e, portanto, não seria uma unidade. A mesma coisa acontece se supormos que haja dois tipos de unidades, uma para os positivos e outra para os negativos. Para que os dois tipos sejam distinguíveis, eles teriam de ter propriedades contrastantes e, de novo, perderiam a sua simplicidade. Assim, os números negativos não são consoantes com a Aritmética Teórica.

Observamos ainda que, visto que a unidade é irredutível, as frações são dificilmente concebidas dentro da Aritmética Teórica. Uma fração é uma parte de um todo. Mas, a unidade não tem partes e, portanto, ela não pode ser dividida para formar frações. Desta forma, o papel de frações é feito na matemática grega por razões de dois números. Na Aritmética Prática, em contraste, há um outro recurso, pois há diversas unidades, algumas das quais são submúltiplos de outros. Assim, o mesmo objeto poderá ser contado pela unidade "exército" ou pela unidade "soldado". Parece que, nesse contexto, o conceito de fração poderia surgir. Porém, não surgiu. Talvez seria complicado demais ter dois sistemas distintos, um, sem frações, para número puro e um, com frações, para objetos materiais. Além disso, a existência de dois sistemas com propriedades formais diferentes faria a Logística Prática radicalmente distinta da Logística Teórica, o que seria visto como algo bastante desagradável, especialmente entre os que foram influenciados pelos pitagóricos.

Finalmente, devemos perguntar se seria possível para o conceito de número negativo surgir dentro da Aritmética Prática. Lembramos que na Aritmética Prática há vários tipos de unidades e, assim, poderia ter uma para os positivos e outra para os negativos. De fato, isto é uma possibilidade, mas também não aconteceu. Era mais natural localizar a idéia de negatividade na própria unidade, em vez de no número. Assim, os números positivos foram usados para contar a quantidade de unidades negativas e números negativos não foram necessários. Desta forma, não se pensava em "+3" para ganho, por exemplo, e "–3" para débito. Bastava pensar em "3 unidades de ganho" e "3 unidades de débito".

Conclusão

O próprio conceito de *ảrithmós* foi, então, uma barreira muito grande para o desenvolvimento do conceito dos números negativos. Neste sentido, Jacob Klein (1968) tem razão em reivindicar que o historiador deve pensar em termos dos conceitos usados na época e não em termos de conceitos modernos. Mas, se pensamos com o conceito de *ảrithmós*, teremos de fazer mais uma pergunta: como foi possível superar a referida barreira? Afinal, os gregos, na época de Diofanto, chegaram a algum entendimento dos negativos, mesmo se foi um entendimento implícito e relutante.

A resposta à pergunta feita no parágrafo anterior é indicada na terceira das Linhas Divididas, investigadas no presente trabalho, pois historicamente os números negativos não surgiram na *contagem*, mas nos *cálculos*. Isto é, mesmo que não poderiam ser contemplados nas Aritméticas (no sentido restrito), apareceram nas Logísticas na resolução de equações e em outros contextos. Enquanto se permanecia na Logística Prática, o matemático poderia excluir os negativos como respostas sem significado. Ou poderia, como muitos faziam, alegar que a aparência de um negativo indicava que o problema original foi mal elaborado. Do ponto de vista da Logística Teórica, porém, os números negativos se apresentavam como etapas intermediárias necessárias à obtenção de soluções e, portanto, foram, na pior das hipóteses, um mal necessário. Em síntese, os números negativos eram usados na Logística sem grande problema, mas, quando foram tematizados (pelos matemáticos europeus da Renascença), foi necessário concebê-los em termos do conceito de *ảrithmós* da Aritmética Teórica, o que gerou as barreiras expostas acima. Com o passar do tempo, porém, se reconheceu que a aceitação dos negativos acarretaria resultados bastante interessantes em termos algébricos estruturais. Foi provavelmente isto, mais do que qualquer outra coisa, que, eventualmente, levou os matemáticos a superar a barreira, herdada dos antigos gregos, em relação aos números negativos.[*]

[*] Agradecemos a dois pareceristas da RBHM pelas suas sugestões.

Referências

BOYER, Carl. *História da Matemática*. Trad. de Elza Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Trad. de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 1995.

ERICKSON, Glenn W. e John A. FOSSA. *A Linha Dividida: Uma Abordagem Matemática à Filosofia Platônica*. Rio de Janeiro: Relume Dumará, 2005.

FOSSA, John A. "A História da Teoria dos Números de Pitágoras a Fermat." *In* Marcos V. Teixeira e Sergio R. Nobre (Eds.). *Anais do V SNHM*. Rio Claro: SBMat, 2003.

FOSSA, John A. e Glenn W. ERICKSON. "The Divided Line and the Golden Mean". *Revista Brasileira de História da Matemática* v. 5, n. 9, 2005.

KLEIN, Jacob. *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*. Trad. de Eva Brann. Cambridge (MA): The M.I.T. Press, 1968.

HEATH, T. L. *A History of Greek Mathematics*. New York: Dover, 1981.

HØYRUP, Jens. *Lengths, Widths, Surfaces: A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin*. New York: Springer, 2002.

MARTZLOFF, Jean-Claude. *A History of Chinese Mathematics*. Trad. de Stephen S. Wilson. Berlin: Springer, 1997.

NAGEL, Ernest. "'Impossible Numbers': A Chapter in the History of Modern Logic". *Studies in the History of Ideas* 3, 1935.

PYCIOR, Helena M. *Symbols, Impossible Numbers, and Geometric Entanglements*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

ROBINS, Gay e Charles SHUTE. "Mathematical Bases of Ancient Egyptian Architecture and Graphic Art". *Historia Mathematica* 12, 1985.

John A. Fossa
Departamento de Matemática
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Natal - Brasil
e-mail: jfossa@oi.com.br

Marta Figueredo dos Anjos
Departamento de Matemática
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Natal - Brasil
e-mail: martafigueredo@yahoo.com.br