Edição Especial da Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 18 nº 36- pág. 31-75
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

EUCLIDES – *SECTIO CANONIS* – APRESENTAÇÃO E TRADUÇÃO

Gustavo Barbosa
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – UNESP – Brasil

(aceito para publicação em fevereiro de 2018)

Resumo

O presente trabalho apresenta uma tradução do tratado musical de Euclides, a *Sectio canonis*. A tradução foi feita a partir da edição crítica de Karl von Jan, de 1895. Acompanha o texto uma apresentação da obra, problematizando o seu conteúdo e indicando como os comentadores de Euclides atribuem o primado de uma teoria musical ao pitagorismo. A partir dos textos de apoio são feitas notas de rodapé indicando a conexão da *Sectio canonis* com a principal obra de Euclides, *Os Elementos*.

Palavras-chave: Euclides, Harmonia, História, Matemática.

[EUCLID – *SECTIO CANONIS* – PRESENTATION AND TRANSLATION]

Abstract

The present paper presents a translation of the musical treatise of Euclides, the *Sectio canonis*. The translation was made from the critical edition of Karl von Jan, 1895. The text follows a presentation of the work, problematizing its content and indicating how Euclid's commentators attribute the primacy of a musical theory to Pythagoreanism. From the supporting texts are made footnotes indicating the connection of the *Sectio canonis* with the main work of Euclides, *The Elements*.

Keywords: Euclid, Harmony, History, Mathematics.

Apresentação

Sectio canonis é o nome do tratado musical atribuído a Euclides. O seu programa é claro e simples: o estabelecimento de um sistema harmônico a partir de um conjunto de notas fundamentais. A obra representa a codificação do estudo da música na cultura grega antiga, e tornou-se paradigma para a pesquisa musical nos séculos seguintes. Sua importância para a História da Matemática é reconhecida e atestada por diversas razões, entre as quais destacamos:

i-) a formação dos conceitos musicais, como *consonância* e *dissonância*, entre outros. Com efeito, não é possível ignorar os componentes práticos da cultura arcaica, como os instrumentos de cordas, os de sopro e os de percussão. Sem perda de generalidade, podemos pensar na música como uma das manifestações mais antigas do ser humano. A favor disso, poder-se-ia argumentar que desde o útero materno temos um metrônomo batendo dentro de nosso peito. Note-se também que diferentes línguas possuem, além das palavras, toda uma sonoridade distinta. Por fim, há os pássaros, cujo canto parece representar um sopro das musas, inspirando infindáveis gerações de poetas e escritores. Por meio do intelecto a humanidade aperfeiçoou a fruição da audição, ao mesmo tempo em que o fez também com os outros sentidos. A visão, em especial, lidava com um céu repleto de astros em movimento, com uma natureza mutável, mas que obecedia a padrões de regularidade. Disso parece emergir um interesse matemático, que em algum momento perdido no tempo e no espaço, voltou-se para a atividade musical. Assim, os eventos acústicos foram simplificados e modelados segundo certas relações aritmo-geométricas. Os sons, inicialmente classificados agradáveis ou desagradáveis aos ouvidos, foram imbricados a uma justificação racional de assim o serem. Iniciava-se, de tal modo, o que a língua grega descreve como um *método* – termo composto pelo substantivo *hodos*, que significa “caminho”, e a preposição *meta*, significando, neste caso, “com”, “em companhia de”. Esse *caminho* culminou em uma *teoria*, em que o modelo aritmo-geométrico passou a ser referência primeira para o estudo dos acordes conhecidos e para a obtenção de outros. Os sons, subsumidos à matemática, passaram a ser regidos por ela. Deve-se, contudo, observar que essa tradução da música para uma linguagem matemática não substitui os fatos aceitos pela experiência, mas depende crucialmente das considerações físicas feitas no início do texto da *Sectio canonis*. A preocupação do autor em fornecer provas sistemáticas e formais das proposições indica o grau de maturidade científica a que a harmonia grega havia chegado em meados do século III antes da Era Comum. Algo que vai além do âmbito puramente matemático, e que aponta para um programa filosófico, como veremos a seguir.

ii-) entremeada ao item anterior está a herança pitagórica que a *Sectio canonis* representa. Já bem conhecida pela filosofia, uma vez que se encontra nas obras de Platão e Aristóteles, a *symphonia* de que trata Euclides vem da tradição pitagórica. A doutrina de Pitágoras e seus seguidores representou um esforço primordial de modelagem dos eventos acústicos que acompanhavam canções, rituais, poemas e o teatro. Ao compilar os conhecimentos musicais acumulados até então, Euclides os homogeneiza, ou aplaina, segundo a matemática também compilada nos *Elementos*. Ao abrir uma dessas obras, o historiador da matemática assemelha-se a um arqueólogo parado em pé sobre uma planície, imaginando o que poderá encontrar ao escavar aquele local. Como primeira referência estão autores posteriores a Euclides, que comentaram a sua obra, como Cláudio Ptolomeu (aprox. 85 – aprox. 165 EC), Porfírio (aprox. 234 – aprox. 305 EC) e Téon de Esmirna (aprox. 70 – aprox. 135 EC). Estes, por sua vez, apontam para os extratos fósseis dos chamados Pré-Socráticos; os três autores acima referidos imputam a Arquitas de Tarento (aprox. 428 – 350 aprox. aEC) o primado de uma teoria musical fundada sobre base matemática. Então, é preciso debruçar-se sobre o que este pensador teria escrito (escavando novamente, até a filosofia que ele próprio utiliza como base), mas também esboçar um quadro do que foi dito a respeito dele por outros. Tido como "o mais distinto" pitagórico no tempo de Platão (KAHN, 2007, p. 61), Arquitas influenciou o filósofo ateniense, considerado seu amigo. Vários trechos matemáticos dos diálogos de Platão são colocados em relação com a atividade científica de Arquitas. Para se ter uma ideia, um ramo do platonismo interroga-se em qual medida a imagem de Arquitas como estadista, general e cientista inspirou a filosofia e os escritos de Platão. *A República* e o *Timeu* talvez sejam os exemplos de maior destaque. Ao lado de sua importância nos acontecimentos culturais de seu próprio tempo, está a compreensão de Arquitas como mais um veio nas águas agitadas do pitagorismo. "Podemos reconhecer o rigor e a clareza da teoria harmônica de Arquitas como uma obra de gênio original, mas este era um gênio que trabalhava na tradição musical pitagórica, que é representada para nós pela teoria inicial de Filolau"[1]. Como se vê, é possível remeter a teoria contida na *Sectio canonis* até suas origens pitagóricas, seja àquela reinterpretada na Academia, seja à mais arcaica e primordial. Não é o nosso propósito levar essa tarefa a cabo aqui, para nós basta conscientizar o leitor de que entre as páginas e proposições da *Sectio canonis* esconde-se uma história bela e envolvente.

A introdução da *Sectio canonis*

O argumento inicial diz respeito a natureza física dos sons, que são produzidos por meio de movimentos e percussão. Os sons com frequência maior dão origem às notas agudas; os com frequência menor, às graves. As notas agudas, que são compostas de movimentos mais frequentes e numerosos, tornam-se mais graves quando afrouxadas. Do mesmo modo, as notas graves, que são compostas de movimentos menos frequentes e numerosos, tornam-se agudas quando retesadas. A imagem de um músico soltando ou apertando a tarraxa de seu instrumento de cordas é um auxílio bem-vindo aqui. A este processo Euclides identifica uma subtração e uma soma de movimento, respectivamente. Logo, essa variação quantitativa (movimento, frequência) que acompanha a variação qualitativa (agudo e grave) é interpretada como uma composição por partes. E para Euclides, tudo o que é composto por partes pode ser colocado em relação com uma proporção numérica. Assim, o autor passa do estudo físico dos sons para a sua representação matemática, classificando as notas de acordo com a relação entre elas em tais proporções. Por fim, o autor estabelece como consonantes as notas que fazem uma única combinação de som. A interpretação física moderna desse fato é que a combinação se deve ao fato de as frequências se sobreporem,

[1] Id., p. 65.

soando aos ouvidos como uma única nota. Fato este que pode ser facilmente aferido pela experiência. As notas dissonantes são aquelas onde isso não ocorre, criando um som discordante.

Acerca do *cânone*

O que em geral designamos pela palavra *cânone* (norma, preceito, modelo, padrão) deriva do grego *kanon*, originariamente uma régua ou barra utilizada para averiguar ou preservar retidão, o uso do termo é também atestado na astronomia[2]. Os pitagóricos chamavam *kanonike* a arte ou ciência *(techne)* da retidão, com base no que a razão *(logos)* considera correto e bem sintonizado (BARKER, 2004, p. 239-240). O seu praticante, o *kanonikos* era um teórico harmônico cujo ofício era a construção de razões em sintonia. O nome transferiu-se ao instrumento utilizado para esse fim. Portanto, o *kanon* passou a designar o instrumento constituído por uma única corda estendida por entre dois pontos fixos, sobre uma base rígida. Também conhecido por *monocórdio*, era ainda composto por: uma base móvel que permitia alterar o comprimento da corda, e o som produzido por ela; e uma régua ou escala fixa, em que eram indicadas as posições das notas. Mais uma vez, a palavra *kanon* transferiu-se, por metonímia, primeiro para a escala, e depois para a sua representação abstrata como um segmento de reta. Isto posto, chegamos ao que Euclides chama de *Divisão do cânone*, isto é, a segmentação aritmo-geométrica da representação da escala musical em proporções.

Acerca da divisão

Uma vez fixada a corda do *cânone* na extremidade móvel, obtinha-se um determinado som – uma nota – que encontrava um segmento correspondente na escala. A divisão primordial seguia um modelo pitagórico, pois valia-se da *tetraktys*, a saber, o conjunto formado pela unidade e pelos três primeiros números $(1, 2, 3, 4)$, cuja soma resulta no número dez. De acordo com o que nos transmitiu Aristóteles, na *Metafísica* (A 5, 986a8-9), na concepção pitagórica “o número dez parece ser perfeito e parece compreender em si toda a realidade dos números” (ARISTÓTELES, 2002, p. 27).

Por meio dos elementos da *tetraktys* geram-se os intervalos fundamentais:

i. a oitava, que corresponde à relação $2 : 1$;
ii. a quinta, que corresponde à relação $3 : 2$;
iii. e a quarta, que corresponde à relação $4 : 3$.

O cálculo dos intervalos

Grosso modo, a harmonia grega é o estudo das relações entre intervalos e do que é possível obter compondo-os. Isso é feito de acordo com as operações estabelecidas. Ao passo que se

[2] Ver LIDDELL; SCOTT, 1940. In: http://www.perseus.tufts.edu/hopper/text?doc=Perseus%3Atext%3A1999.04.0057%3Aentry=kanw%2Fn

utiliza uma linguagem aditiva ou subtrativa, as operações efetuadas são a multiplicação ou a divisão. Por exemplo: o *tom* é definido como a diferença entre a quinta e a quarta, o que é representado em linguagem moderna como $(3 : 2) \div (4 : 3) = 9 : 8$. Os mesmos intervalos quando compostos formam a oitava, ou seja: $(3 : 2) \times (4 : 3) = 2 : 1$. E uma forma alternativa de se obter a oitava é pela composição de duas quartas intercaladas por um tom: $(4 : 3) \times (9 : 8) \times (4 : 3) = 2 : 1$.

A classificação dos intervalos

Na introdução da *Sectio canonis*, Euclides associa os intervalos musicais a três relações numéricas, em que o termo maior precede sempre o menor. São elas:

i-) *múltipla (pollaplasion)*, onde o termo menor é uma parte do maior[3], representada como $n : 1$, com $n > 1$;

ii-) *superparticular (epimorion)*, em que os termos diferem por uma unidade, representada como $n + 1 : n$, com $n > 1$;

iii-) *superdividida (epimeres)*, em que o excesso do termo maior é "partes" do menor, isto é, a diferença entre o maior e o menor não divide este[4], representada como $n + m : n$, com $n > m > 1$.

Algumas relações são *múltiplas* ou *superparticulares*, e obedecem a intervalos específicos: a oitava é chamada um intervalo *duplo*; a quinta, um "*hemiólico"*; a quarta, um "*epítrito"*; e o tom, um "*epogdóico"*. Com excessão do adjetivo grego *hemiolios*, que tem correspondente em língua portuguesa como *sesquiáltero*, os outros termos usados acima entre aspas não têm equivalente no português. Os autores das traduções por nós cotejadas valem-se da transliteração, e, de nossa parte, seguimos o mesmo processo. Vale destacar os significados daquelas palavras: sobre *sesquiáltero*, o dicionário nos faz saber que "diz-se de duas quantidades das quais uma contém a outra vez e meia"[5]. O que é expresso pelo intervalo de quinta, $3 : 2$. Do mesmo modo, *epitritos* significa, em grego, o que "contém um inteiro e um terço $(1 + 1/3)$"[6], e, portanto, o intervalo de quarta, $(4 : 3)$. Por fim, *epogdoos* exprime o que contém um inteiro mais um oitavo $(1 + 1/8)$, no caso, o tom, $(9 : 8)$. Cabe ao leitor, para um melhor proveito na leitura da *Sectio canonis*, ter em mente as respectivas relações quando encontrar tais palavras ao longo do texto.

Das proposições

---

[3] Ver *Elementos*, VII, Def. 3.
[4] Ver *Elementos*, VII, Def. 4.
[5] Ver Dicionário Priberam da Língua Portuguesa. In: https://www.priberam.pt/dlpo/sesqui%C3%A1ltero.
[6] Ver LIDDELL; SCOTT, 1940. In: http://www.perseus.tufts.edu/hopper/morph?l=epitritos&la=greek - lexicon.

Após a introdução seguem-se vinte proposições, das quais as nove primeiras derivam da teoria euclidiana dos números. Nelas são demonstradas propriedades a partir dos intervalos fundamentais, e o seu entendimento depende de resultados estabelecidos nos *Elementos*, como mostram as notas de rodapé. Somente na décima proposição é que os conceitos estritamente musicais são introduzidos. As quatro primeiras (10–13) identificam os intervalos musicais fundamentais (oitava, quarta, quinta e o tom) com as relações correspondentes. As três proposições seguintes (14–16) provam desigualdades imediatamente derivadas das precedentes. As proposições 17 e 18 mostram como localizar certas notas não harmônicas e as duas últimas possuem natureza geométrico construtiva. Por meio de divisões sucessivas são determinadas as notas fixas (19), e depois as móveis (20).

A edição de referência, os textos de apoio e a tradução

Segundo Acerbi (2008, p. 691), dos 33 manuscritos em que é atestada a *Sectio canonis*, 21 o atribuem a Euclides, 11 são anônimos, e a versão contida no documento *Vat. Gr, 191* não possui qualquer indicação de autor[7]. O primeiro editor crítico da obra, Karl Jan, propôs que a *Sectio canonis* fosse um compêndio de uma obra mais ampla[8].

Ptolomeu, na qualidade de intérprete mais próximo de Euclides, apresenta em sua própria obra (*Harmonica* I.5) o princípio de consonância estabelecido na introdução da *Sectio canonis*. Citando os “líderes da escola Pitagórica”, o nome de Euclides não vem mencionado, não obstante Ptolomeu retome resultados encontrados na *Sectio canonis*.

Porfírio, que viveu menos de um século após Ptolomeu, ao comentar a obra deste, faz a associação explícita com a *Sectio canonis*. Porfírio observa ainda que diferentemente dos *Elementos*, onde Euclides recorre ao termo *logos*, na *Sectio canonis* o mesmo não aparece, sendo substituído por *diastema* (alternativo para *razão*, mas também *intervalo*).

A tradução trazida aqui a lume foi feita a partir do texto grego de Karl Jan (JANUS, 1895), e cotejada com outras três diferentes traduções: a de Barker (2004); a de Acerbi (2008); e a de Domené (2016), cada uma em uma língua diferente: inglês, italiano e espanhol, respectivamente. Tanto a primeira, quanto a última obra referida traz as traduções dos textos de outros autores importantes para a história da musica, como Ptolomeu e Porfírio; ao passo que a obra de Acerbi é restrita a Euclides, e talvez represente o trabalho mais completo em volume único sobre este obscuro personagem da história da matemática.

Não poderíamos deixar de manifestar aqui o nosso débito para com a versão brasileira dos *Elementos* (EUCLIDES, 2009), bem como para com seu tradutor, o Prof. Dr. Irineu Bicudo. Em primeiro lugar, mencionamos as muitas semelhanças entre o texto da *Sectio canonis* e dos *Elementos*, desde a estrutura da redação das proposições, ao modo como Euclides relaciona os termos. Como explicamos no parágrafo acima, o entendimento de grande parte da *Sectio canonis* depende da matemática determinada nos *Elementos*. Tendo, pois, à disposição uma obra já traduzida do antigo autor, a conversão de outras tem as dificuldades atenuadas. É sempre mais fácil seguir o caminho já aberto por um

[7] Esta versão pode ser verificada em: https://digi.vatlib.it/view/MSS_Vat.gr.191 .
[8] Id., p. 692.

desbravador do que fazê-lo por meio dos próprios esforços, a menos que se queira afastar-se de tais escolhas prévias, o que com certeza não foi o caso aqui. Pelo contrário, nossas decisões foram pautadas tomando-se como base a tradução dos *Elementos*, onde é estabelecido o estilo da escrita da matemática grega. Uma vez feita a difícil tarefa de escolha e negociação por seu tradutor, coube a nós nos aproximarmos do mesmo estilo, sempre que possível. Em segundo lugar, agradecemos pelos aprendizados obtidos das línguas grega e latina junto ao Prof. Irineu, que com paciência e persistência vem transmitindo os seus conhecimentos a um pequeno, mas assíduo grupo de interessados.

Por fim, como preferimos ser óbvios a herméticos, declaramos que os todos os erros e imperfeições contidas na tradução da *Sectio canonis* a seguir são de responsabilidade única de seu tradutor.

Esperamos que o leitor faça um bom proveito.

Bibliografia

ACERBI, Fabio. 2008. *Euclide. Tutte le opere*, Milano, Il edizione Bompiani.

ARISTÓTELES. 2002. *Metafísica*. *Volume II: texto grego com tradução ao lado*, São Paulo, Edições Loyola.

BARKER, Andrew. 2004. *Greek Musical Writings. Volume II: Harmonics amd Acoustic Theory*, Cambridge, CUP.

DOMENÉ, Fuensanta Garrido. 2016. *Los teóricos menores de la música griega. Euclides el Geómetra, Nicómaco de Gerasa y Gaudencio el Filósofo*, Barcelona, Editorial Cérix.

EUCLIDES. 2009. *Os Elementos.* Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo, Editora UNESP.

JANUS, Carolus (Karl von Jan). 1895. *Musici Scriptores Graeci: Aristoteles*, *Euclides*, *Nicomachus*, *Bacchius*, *Gaudentius*, *Alypius Et Melodiarum Veterum Quidquid Exstat*, Leipzig, B. G. Teubner.

KAHN, Charles. 2007. *Pitágoras e os Pitagóricos – uma breve história*, São Paulo, Edições Loyola.

Gustavo Barbosa
Departamento de Educação Matemática – UNESP – campus de Rio Claro - Brasil

E-mail: gvbarbosa@gmail.com

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

Κατατομὴ κανόνος.

Εἰ ἡσυχία εἴη καὶ ἀκινησία, σιωπὴ ἂν εἴη· σιωπῆς δὲ οὔσης καὶ μηδενὸς κινουμένου οὐδὲν ἂν ἀκούοιτο· εἰ ἄρα μέλλει τι ἀκουσθήσεσθαι, πληγὴν καὶ κίνησιν πρότερον δεῖ γενέσθαι. ὥστε ἐπειδὴ πάντες οἱ φθόγγοι γίνονται πληγῆς τινος γινομένης, πληγὴν δὲ ἀμήχανον γενέσθαι μὴ οὐχὶ κινήσεως πρότερον γενομένης, — τῶν δὲ κινήσεων αἱ μὲν πυκνότεραί εἰσιν, αἱ δὲ ἀραιότεραι, καὶ αἱ μὲν πυκνότεραι ὀξυτέρους ποιοῦσι τοὺς φθόγγους, αἱ δὲ ἀραιότεραι βαρυτέρους, — ἀναγκαῖον τοὺς μὲν ὀξυτέρους εἶναι, ἐπείπερ ἐκ πυκνοτέρων

Variae lectiones. *Εἰςαγωγὴ ἁρμονικὴ Εὐκλείδου* subscriptum Cleonidis introductioni M. *Εὐκλείδου κατατομὴ κανόνος* huius libelli titulus in MU. nullus tit. in VW. *περὶ φθόγγων* NB, repetit foliorum tit. *Κλεονείδου εἰςαγωγὴ ἁρμονική* B.

3 *ἡσυχίας οὔσης καὶ ἀκινησίας* W. 4 *οὐδὲ* N. 5 *πληγὴν ἄρα καὶ* W. 6 *ὥστε ἐπει*] *οἵ γε* W.

Ad prooemium cf. commentarium Ps.-Porphyri in Ptolemaei harmonica p. 266 et Adrastum apud Theonem de musica c. 6 (p. 50).

Tradução

EUCLIDES

Divisão do cânone.

Se houvesse quietude e imobilidade, então haveria silêncio: e havendo silêncio, e nada se movendo, então nada seria ouvido: se, portanto, alguma coisa está para ser ouvida, é preciso que antes ocorram impacto e movimento. De modo que todas as notas ocorrem quando ocorre um impacto, de modo que é impossível ocorrer um impacto sem que ocorra antes um movimento, — e dos movimentos, uns são os mais frequentes, outros os mais intermitentes; os mais frequentes produzem as notas agudas, e os intermitentes, as graves, — e é necessário que algumas <notas> sejam agudas, visto que são compostas de *καὶ πλειόνων σύγκειται κινήσεων, τοὺς δὲ βαρυτέρους ἐπείπερ ἐξ ἀραιοτέρων καὶ ἐλασσόνων σύγκειται κινήσεων. ὥστε τοὺς μὲν ὀξυτέρους τοῦ δέοντος ἀνιεμένους ἀφαιρέσει κινήσεως τυγχάνειν τοῦ δέοντος, τοὺς δὲ βαρυτέρους ἐπιτεινομένους προσθέσει κινήσεως τυγχάνειν τοῦ δέοντος. διόπερ ἐκ μορίων τοὺς φθόγγους συγκεῖσθαι φατέον, ἐπειδὴ προσθέσει καὶ ἀφαιρέσει τυγχάνουσι τοῦ δέοντος. πάντα δὲ τὰ ἐκ μορίων συγκείμενα ἀριθμοῦ λόγῳ λέγεται πρὸς ἄλληλα, ὥστε καὶ τοὺς φθόγγους ἀναγκαῖον ἐν ἀριθμοῦ λόγῳ λέγεσθαι πρὸς ἀλλήλους· τῶν δὲ ἀριθμῶν οἱ μὲν* (p. 24 Meib.) *ἐν πολλαπλασίῳ λόγῳ λέγονται, οἱ δὲ ἐν ἐπιμορίῳ, οἱ δὲ ἐν ἐπιμερεῖ, ὥστε καὶ τοὺς φθόγγους ἀναγκαῖον ἐν τοῖς τοιούτοις λόγοις λέγεσθαι πρὸς ἀλλήλους. τούτων δὲ οἱ μὲν πολλαπλάσιοι καὶ ἐπιμόριοι ἑνὶ ὀνόματι λέγονται πρὸς ἀλλήλους.*

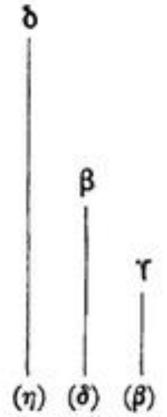
Γινώσκομεν δὲ καὶ τῶν φθόγγων τοὺς μὲν συμφώνους ὄντας, τοὺς δὲ διαφώνους, καὶ τοὺς μὲν συμφώνους μίαν κρᾶσιν τὴν ἐξ ἀμφοῖν ποιοῦντας, τοὺς δὲ διαφώνους οὔ. τούτων οὕτως ἐχόντων εἰκὸς τοὺς συμφώνους φθόγγους, ἐπειδὴ μίαν τὴν ἐξ ἀμφοῖν ποιοῦνται κρᾶσιν τῆς φωνῆς, εἶναι τῶν ἐν ἑνὶ ὀνόματι πρὸς ἀλλήλους λεγομένων ἀριθμῶν, ἤτοι πολλαπλασίους ὄντας ἢ ἐπιμορίους.

---

1 a *κινήσεων* ad l. 2 *κινήσεων* aberravit M¹. addit mg. M². 3 *ἀνειμένους* W. 4 *κινήσεων* libb., sed cf. l. 5. 5 *προθέσει* M¹N, item lin. 7. 10 *ἐν*] *ἐπ'* N. 12 *π. πλασίῳ* W, *π.πλασίονι* MN. 14 *λόγοις* M² supra lin. 18 post *συμφώνους* addit *συμφώνου* W, simile quid habebat M¹. 19 *κρᾶσιν*] *πράξιν* W. 20 *οὔ* M² in ras. 22 *ποιοῦντα* N.

movimentos mais frequentes e numerosos, e outras graves, visto que são compostas de movimentos mais intermitentes e menos numerosos. De modo que as mais agudas que o preciso, por um lado, afrouxam pela subtração de movimento, atingindo o que é preciso; as mais graves, por outro lado, se estendem por soma de movimento, atingindo o que é preciso. Por isso, deve-se dizer que as notas se compõem de partes, uma vez que pela soma ou subtração obtêm-se o que é preciso. E todas as coisas que são compostas de partes se dizem em relação numérica recíproca, de modo que é necessário também às notas estarem em relação numérica recíproca. E dos números, alguns se dizem em relação múltipla, outros em superparticular, outros em superdividida, de modo que é necessário também às notas estarem em tais relações. E destas, as múltiplas e superparticulares se dizem em relação com um só nome.

E sabemos também que das notas, algumas são consonantes, outras dissonantes, e as consonantes, por um lado, fazem uma única combinação de ambas, as dissonantes, por outro lado, não. Em vista disso, é razoável que as notas consonantes, uma vez que fazem uma única combinação de som, estejam entre os números que se dizem em relação recíproca com um só nome, ou múltiplos ou superparticulares.



α. Ἐὰν διάστημα πολλαπλάσιον δὶς συντεθὲν ποιῇ τι διάστημα, καὶ αὐτὸ πολλαπλάσιον ἔσται.

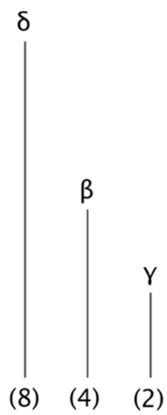
Ἔστω διάστημα τὸ βγ, καὶ ἔστω πολλαπλάσιος ὁ β τοῦ γ, καὶ γεγενήσθω ὡς ὁ γ πρὸς τὸν β ὁ β πρὸς τὸν δ. φημὶ δὴ τὸν δ τοῦ γ πολλαπλάσιον εἶναι. ἐπεὶ γὰρ ὁ β τοῦ γ πολλαπλάσιός ἐστι, μετρεῖ ἄρα ὁ γ τὸν β. ἦν δὲ καὶ ὡς ὁ γ (p. 25) πρὸς τὸν β ὁ β πρὸς τὸν δ, ὥστε μετρεῖ ὁ γ καὶ τὸν δ. πολλαπλάσιος ἄρα ἐστὶν ὁ δ τοῦ γ.

1 Hinc quae sequuntur ad p. 161, 14. 15 leguntur etiam apud Porphyrium vel potius auctorem commentarii ad Ptolemaei harmonica (Prol. p. 116 ann. 1) p. 272 ss.

Numeros quibus singulae protases distinguantur omittunt M¹W, asteriscis et numeris Graecis αβ notant M²V, Arabum numeros 1 2 ascribit N.

Diagrammatum veterum lineis ad horizontem directis neglegenter pictorum (qualia vides ad prot. 2) exigua exstant vestigia in MW p. 151, 1—3. 152, 7. 11. 153, 5. 154, 7. 158, 7, quae reiecta esse solent ad posteriores protases. — Novas ascripsit figuras M² marg., quorum lineae ad perpendiculum sunt directae (v. fig. 1. 3 sqq.). neglecta tamen M²V vera longitudine lineas omnes exaequaverunt. diligentius veram linearum mensuram observant N et Par. 2535, diligentius etiam Barb. II 86, id quod Euclidis sententia intellecta fieri facile potuit. recta haec linearum mensura cum ad voluntatem Euclidis cognoscendam videretur necessaria, ego in illis delineandis recentiorum codicum rationem amplexus sum; si quid praeter longitudinem in M² discrepabat, semper notavi. rettulit autem N diagrammata in locos iusto superiores, ut fig. 15 inveniatur apud prot. 8. — Exstat hoc diagramma suo loco in M² mg., VU, (de NPB qui ad duas protases demonstrandas uno utuntur diagrammate vide infra). aliud habent diagramma una linea ad horizontem porrecta numerisque 4 8 16 signata M¹W inter verba prot. 2. quo enim quaeque sit revocanda figura, clare elucet e quattuor lineis diagrammatis 3.

4 π.πλάσιος ὁ Porph. (scil. ἀριθμός), π.πλάσιον τὸ libri Eucl. 6 πρὸς τὸ β MN. τὸ δ WNU. 8 π.πλάσιον MN. 10 μετρεῖ] καὶ add. libri. γ καὶ τὸν Porph., γ πρὸς τὸν WV, γ///τὸν M. γ τὸν rel.

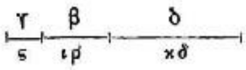


1. Caso um intervalo[9] múltiplo duas vezes composto faça um intervalo, este será também múltiplo.

Seja o βγ um intervalo, e seja o β múltiplo de γ, e fique posto, assim como o γ para o β, o β para o δ. Digo então que o δ é múltiplo de γ. Pois, como o β é múltiplo de γ, o γ, portanto, mede o β. E como o γ estava para o β, o β está para o δ, de modo que o γ também mede o δ. Portanto, o δ é múltiplo de γ.

[9] O termo *intervalo (diastema)* possui aqui conotação mais ampla do que a estritamente musical, sendo aplicado de modo indistinto à relação entre duas magnitudes quaisquer (que podem ser segmentos ou números), uma vez que a palavra tem o significado geral de "distância" ou "separação". Cf. Barker, 2004, p. 194, n. 9.

β. *Ἐὰν διάστημα δὶς συντεθὲν τὸ ὅλον ποιῇ πολλαπλάσιον, καὶ αὐτὸ ἔσται πολλαπλάσιον.*



Ἔστω διάστημα τὸ βγ *καὶ γεγενήσθω ὡς ὁ* γ *πρὸς τὸν* β *οὕτως ὁ* β *πρὸς τὸν* δ, *καὶ ἔστω ὁ* δ *τοῦ* γ *πολλαπλάσιος. φημὶ καὶ τὸν* β *τοῦ* γ *εἶναι πολλαπλάσιον. ἐπεὶ γὰρ ὁ* δ *τοῦ* γ *πολλαπλάσιός ἐστι, μετρεῖ ἄρα ὁ* γ *τὸν* δ. *ἐμάθομεν δὲ ὅτι, ἐὰν ὦσιν ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὁποσοιοῦν, ὁ δὲ πρῶτος τὸν ἔσχατον μετρῇ, καὶ τοὺς μεταξὺ μετρήσει. μετρεῖ ἄρα ὁ* γ *τὸν* β, *πολλαπλάσιος ἄρα ὁ* β *τοῦ* γ.

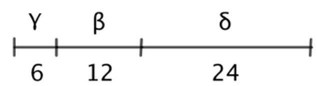
---

1 *συντεθὲν τὸ* M^2, *συντεθῇ* γ β δ *ὅθεν τὸ* WM^1. *ποιεῖ* W. 2 *ποιῇ πολλα* δ η ις *πλάσιον* M. eandem figurae partem W post *ὡς ὁ* γ lin. 5. 2 *καὶ αὐτὸ ἔσται π. πλάσιον* om. WN^1, add. *καὶ αὐτῷ ἑ. ππ.* N^2. 3 hanc habent figuram M^1W in protasi 3. (exstat enim p. 152, 1–2 post *μέσοι* in M, post *διαστήματος* in W linea tripartita cum litteris *γ β δ* et leguntur super *οὔτε πλείους* in W numeri *ς ιβ* et post *πλείους* num. *κδ*, eosdem inserunt numeros post *πλείους* VU. in M *μέσοι* in ras., post *πλείους* rasura. ad illam autem protasin longe alia opus erat figura.) simile diagramma atque ad prot. 1 M^2, numeri tamen *ις η δ*. hanc figuram cum numeris *δ η ις* ad prot. 1 rettulerunt NPB, qui ad 2 dant fig. 3. 7 *φημὶ δὴ* M^4. 8 *ππ. φημί ἐστιν* N^1, delet *φημί* N^2. 9 *ὁ* γ] *ὁ* β W. *ἐμάθομεν* W et Porph., *ἔμαθον* rel. 10 post *ἀριθμοὶ* add. *ἐφεξῆς* M^5 mg. *πρῶτος* corr. M, *πρὸς* VN. 11 *μετρῇ* B, *μετρεῖ* rel. *μετρεῖ καὶ τοὺς μεταξὺ μετρήσει* N^2 mg.

---

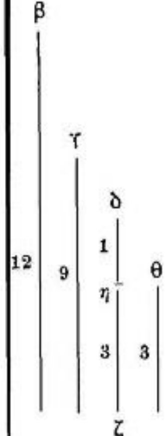
9 *ἐμάθομεν* haec quidem verba in Euclidis elementis non inveniuntur (cf. Heiberg, litterargesch. Studien über Euklid, S. 53). Habes tamen in El. 8, 7 haec: *ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ* [*ἑξῆς*] *ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν ἔσχατον μετρῇ, καὶ τὸν δεύτερον μετρήσει.* ex quibus etiam quae hoc loco demonstraturus est Euclides facillime sequuntur.

2. Caso um intervalo duas vezes composto faça um todo múltiplo, este também será múltiplo.



Seja o βγ um intervalo, e fique posto, assim como o γ para o β, do mesmo modo o β para o δ, e seja o δ múltiplo de γ: digo que o β também é múltiplo de γ. Pois, como o δ é múltiplo de γ, o γ, portanto, mede o δ. E aprendemos[10] que caso números, em uma quantidade qualquer, estejam em proporção, e o primeiro meça o último, medirá também os do meio. Portanto, o γ mede o β, e o β é, portanto, múltiplo de γ.

[10] A referência é aos *Elementos* VIII. 7, onde o enunciado da proposição é muito semelhante ao da *Sectio canonis*. Cf. Barker, 2004, p. 194, n. 11.



γ. *Ἐπιμορίου διαστήματος οὐδεὶς μέσος, οὔτε εἷς οὔτε πλείους ἀνάλογον ἐμπεσεῖται ἀριθμός.* (p. 26.)

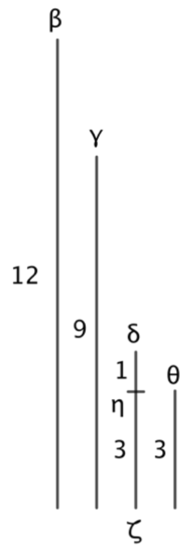
Ἔστω γὰρ ἐπιμόριον διάστημα τὸ βγ· *ἐλάχιστοι δὲ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τοῖς* βγ *ἔστωσαν οἱ* δζ θ. *οὗτοι οὖν ὑπὸ μονάδος μόνης μετροῦνται κοινοῦ μέτρου. ἄφελε ἴσον τῷ* θ *τὸν* ηζ. *καὶ ἐπεὶ ἐπιμόριός ἐστιν ὁ* δζ *τοῦ* θ, *ἡ ὑπεροχὴ ὁ* δη *κοινὸν μέτρον τοῦ τε* δζ *καὶ τοῦ* θ *ἐστί· μονὰς ἄρα ὁ* δη· *οὐκ ἄρα ἐμπεσεῖται εἰς τοὺς* δζ θ *μέσος οὐδείς. ἔσται γὰρ ὁ ἐμπίπτων τοῦ* δζ *ἐλάττων, τοῦ δὲ* θ *μείζων, ὥστε τὴν μονάδα διαιρεῖσθαι, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐμπεσεῖται εἰς τοὺς* δζ θ *τις.*

---

1 de diagrammatis 2. partibus huc insertis v. supra. *οὐδεὶς μέσος* W, *μέσος οὐδείς* V, post *μέσοι* add. supra lin. *οὐδείς* N, sed delet., om. *οὐδείς*, sed habet *μέσοι οὔτε* in ras. M. *μέσοι* U. (*μέσος* Wallis, *μέσοι* codd.) 3 *ἐμπεσεῖται* W et Porph. *ἐμπεσοῦνται* rel. *ἀριθμοί* Porph., *ἀριθμός* libri Eucl. Appicta est haec figura ad protasin 2 in N, similis (sed in duas partes discerpta) ad prot. 3 in M^2, exigua exstant figurae vestigia in M^1W (vide ad lin. 7 et 11). addit autem N lineis δζ θ rationes *δ γ* et parti δη numerum *α*, lineas β γ idem signat numeris *η* ϛ. etiam M^2 habet illas numerorum rationes, nisi quod ponit lin. β : γ = *ιβ* : *ϑ*, et lineae ηζ dat numerum γ. hi tamen omnes numeri cum prohibeant quominus linearum rationes celeriter perspiciantur, nolui litteris Graecis eos signare. 5 βγ Porph., β *τοῦ* γ libb. Eucl. *ἐν* VN Porph.

---

1 cf. Elem. 8, 8: *ἐὰν δύο ἀριθμῶν μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅσοι εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας [αὐτοῖς] μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.*

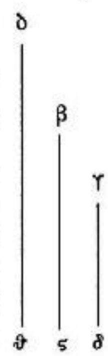


3. Nenhum número médio em proporção[11] cairá de um intervalo superparticular, nem um nem muitos.

Seja, pois, o βγ um intervalo superparticular: e sejam δζ, θ, os menores na mesma razão dos β, γ. Estes, de fato, são medidos apenas pela unidade como medida comum. Subtraia o ηζ igual ao θ. E como o δζ é superparticular de θ, o excesso δη é medida comum, tanto de δζ, quanto de θ: o δη, portanto, é uma unidade: portanto, nenhum médio cairá entre os δζ, θ. Pois o <número> que cai será menor do que o δζ e maior do que o θ, de modo a dividir a unidade, o que é impossível. Portanto, nenhum médio cairá entre os δζ, θ.

[11] A despeito dessa relação, ver *Elementos* VIII. 11, 12.

ὅσοι δὲ εἰς τοὺς ἐλαχίστους μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσι, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται. οὐδεὶς δὲ εἰς τοὺς δζ θ ἐμπεσεῖται, οὐδὲ εἰς τοὺς βγ ἐμπεσεῖται.

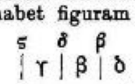


δ. Ἐὰν διάστημα μὴ πολλαπλάσιον δὶς συντεθῇ, τὸ ὅλον οὔτε πολλαπλάσιον ἔσται, οὔτε ἐπιμόριον.

Ἔστω γὰρ διάστημα μὴ πολλαπλάσιον, τὸ βγ, καὶ γεγενήσθω ὡς ὁ (p. 27) γ πρὸς τὸν β ὁ β πρὸς τὸν δ. λέγω ὅτι ὁ δ τοῦ γ οὔτε πολλαπλάσιος οὔτε ἐπιμόριός ἐστιν. Ἔστω γὰρ πρῶτον ὁ δ τοῦ γ πολλαπλάσιος. οὐκοῦν ἐμάθομεν, ὅτι ἐὰν διάστημα δὶς συντεθὲν τὸ ὅλον ποιῇ πολλαπλάσιον, καὶ αὐτὸ πολλαπλάσιόν ἐστιν. ἔσται ἄρα ὁ β τοῦ γ πολλαπλάσιος. οὐκ ἦν δέ. ἀδύνατον ἄρα τὸν δ τοῦ γ εἶναι πολλαπλάσιον.

ἐπὶ W, perfossum in M. P. 152, 7 ὑπὸ] ἀπὸ N. ιβ ιγ (reliquiae figurae) post μόνης M¹, post μέτρου (lin. 8) WU. 8 τὸν ηζ] τὸν ζ W, τὸν δ' ηζ V. 9 καὶ ἐπεὶ W, om. rel., λοιπὸν μόνον V·N. post τὸν (8) rasura et ηζ καὶ ἐπίλοιπον μον̃ν i. e. μονάς M³. post ἐστιν addunt ἄρα M²N. 10 ὁ δη] ὁ δ W. 11 post καὶ inserit ιδ ιζ ιθ ex fig. W. 12 ὁ δη] N, ἡ δη M, ἡ δ W. 16 δζ θ] δ θζ W.

1 post ὅσοι δὲ lacuna 7 litt. W. 4 οὐδὲ εἰς τοὺς βγ ἐμπεσεῖται om. W. 5 μὴ supra l. M². μὴ πολλαπλάσιον om. W. post οὔτε habet πολλαπλα supra lin. M. post δὶς συντεθῇ M¹ hanc habet figuram falsis numeris ornatam:



cui addit M² in margine figuram veriorem ex aequalibus lineis et ipsam compositam, veris tamen numeris instructam. a W deest figura (translata ad prot. 5). 14 ποιεῖ W. 16 τὸν] τὸ libb.

---

13. ἐμάθομεν in prot. 2.

E quantos médios caiam em proporção entre os menores, tantos cairão em proporção também entre aqueles que tem a mesma razão[12]. E nenhum cairá entre os δζ, θ, nem cairá entre os β, γ.

4. Caso um intervalo não múltiplo tenha sido duas vezes composto, o todo não será nem múltiplo, nem superparticular.

Seja, pois, o βγ um intervalo não múltiplo, e fique posto, como o γ para o β, o β para o δ. Digo que o δ não é nem múltiplo de γ nem superparticular. Seja, pois, em primeiro lugar, o δ múltiplo de γ. Aprendemos, por conseguinte, que caso um intervalo duas vezes composto faça um todo múltiplo, então este também é múltiplo[13]. Portanto, o β será múltiplo de γ. Mas não era. É impossível, portanto, o δ ser múltiplo de γ.

[12] Provado em *Elementos* VIII. 8.
[13] Ver Proposição 2.

ἀλλὰ μὴν οὐδ' ἐπιμόριον. ἐπιμορίου γὰρ διαστήματος μέσος οὐδεὶς ἀνάλογον ἐμπίπτει. εἰς δὲ τοὺς δγ ἐμπίπτει ὁ β. ἀδύνατον ἄρα τὸν δ τοῦ γ ἢ πολλαπλάσιον ἢ ἐπιμόριον εἶναι.

ε. Ἐὰν διάστημα δὶς συντεθὲν τὸ ὅλον μὴ ποιῇ πολλαπλάσιον, οὐδ' αὐτὸ ἔσται πολλαπλάσιον.

Ἔστω γὰρ διάστημα τὸ βγ, καὶ γεγενήσθω ὡς ὁ γ πρὸς τὸν β ὁ β πρὸς τὸν δ, καὶ μὴ ἔστω ὁ δ τοῦ γ πολλαπλάσιος. λέγω, ὅτι οὐδὲ ὁ β τοῦ γ ἔσται πολλαπλάσιος. εἰ γάρ ἐστιν ὁ β τοῦ γ (p. 28) πολλαπλάσιος, ἔσται ἄρα ὁ δ τοῦ γ πολλαπλάσιος. οὐκ ἔστι δέ. οὐκ ἄρα ὁ β τοῦ γ ἔσται πολλαπλάσιος.

ς. Τὸ διπλάσιον διάστημα ἐκ δύο τῶν μεγίστων ἐπιμορίων συνέστηκεν, ἔκ τε τοῦ ἡμιολίου καὶ ἐκ τοῦ ἐπιτρίτου.

Ἔστω γὰρ ὁ μὲν βγ τοῦ δζ ἡμιόλιος, ὁ δὲ δζ τοῦ θ ἐπίτριτος. φημὶ τὸν βγ τοῦ θ διπλάσιον εἶναι. ἀφεῖλον γὰρ ἴσον τῷ θ τὸν ζκ καὶ τῷ δζ τὸν γλ.

---

3 δγ VN, in ras. M, δγθ W. τὸν] ὁ libb. 4 π. πλάσιος et ἐπιμόριος libb. 6 οὐδ'] οὐ δι' W. 7 πολλαπλάσιον γ | β | δ M^1. πολλα ιγ ιβ ια πλάσιον W (reliquiae figurae 4). M^2 repetit fig. 4, N om. 15 δύο om. M^1W. 16 ἔκ τε τοῦ ἐπιτρίτου μορίου καὶ ἡμιολίου W. in figura M plures habet litteras (scriptas manu 3), sunt enim in prima linea partes indicatae δ et η (hoc bis scr.), in altera linea inter δ et κ scriptum e (i. e. β). in M^1W nulla figurae vestigia. 20 ζκ M^3N^2U, ζ M^1VN^1, β W. γλ WNM^3, γ M^1V.

---

2 οὐδεὶς ἀν. ἐμπ. prot. 3.

E tampouco superparticular. Pois nenhum médio em proporção cai de um intervalo superparticular[14]. Mas o β cai em δγ. Portanto, é impossível o δ ser ou múltiplo de γ ou superparticular.

5. Caso um intervalo duas vezes composto não faça um todo múltiplo, nem mesmo o próprio será múltiplo.

Seja, pois, o βγ um intervalo, e fique posto, como o γ para o β, o β para o δ, e não seja o δ um múltiplo de γ. Digo que nem mesmo o β será múltiplo de γ. Pois se o β é múltiplo de γ, o δ será, portanto, múltiplo de γ. Mas não é. Portanto, o β não será múltiplo de γ.

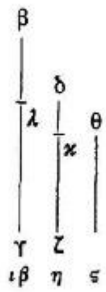
6. O intervalo duplo é composto de dois superparticulares maiores, tanto do hemiólico, quanto do epítrito.

Seja, pois, por um lado, o βγ hemiólico de δζ, e de outro, o δζ epítrito de θ. Digo que o βγ é duplo de θ. Subtraí, pois, o ζκ igual ao θ, e o γλ <igual> ao δζ.

[14] Ver Proposição 3.

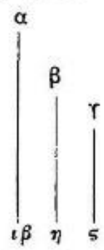
Prot. 5. 6. p. 27—29 M. 155

οὐκοῦν ἐπεὶ ὁ βγ τοῦ δζ ἡμιόλιος, ὁ βλ ἄρα τοῦ βγ τρίτον μέρος ἐστὶν, τοῦ δὲ δζ ἥμισυ. πάλιν ἐπεὶ ὁ δζ τοῦ θ ἐπίτριτός ἐστιν, ὁ δκ τοῦ μὲν δζ τεταρτημόριον, τοῦ δὲ θ τριτημόριον. οὐκοῦν ἐπεὶ ὁ δκ τοῦ δζ ἐστι τεταρτημόριον, ὁ δὲ βλ τοῦ δζ ἥμισυ, τοῦ ἄρα βλ ἥμισυ ἔσται ὁ δκ. ἦν δὲ ὁ βλ τοῦ βγ τρίτον μέρος· ὁ ἄρα δκ τοῦ βγ ἕκτον μέρος ἐστίν. ἦν δὲ ὁ δκ τοῦ θ τρίτον μέρος· ὁ ἄρα βγ τοῦ θ διπλάσιός ἐστιν.



Ἄλλως. Ἔστω γὰρ ὁ μὲν α τοῦ β ἡμιόλιος, ὁ δὲ β τοῦ γ ἐπίτριτος. λέγω ὅτι (p. 29) ὁ α τοῦ γ ἐστι διπλάσιος.

Ἐπεὶ γὰρ ἡμιόλιός ἐστιν ὁ α τοῦ β, ὁ α ἄρα ἔχει τὸν β καὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ. δύο ἄρα οἱ α ἴσοι εἰσὶ τρισὶ τοῖς β. πάλιν ἐπεὶ ὁ β τοῦ γ ἐστιν ἐπίτριτος, ὁ β ἄρα ἔχει τὸν γ καὶ τὸ τρίτον αὐτοῦ. τρεῖς ἄρα οἱ β ἴσοί εἰσι τέτταρσι τοῖς γ. τρεῖς δὲ οἱ β ἴσοί εἰσι δυσὶ τοῖς α. δύο ἄρα οἱ α ἴσοί εἰσι τέτταρσι τοῖς γ. ἄρα ὁ α ἴσός ἐστι δυσὶ τοῖς γ· διπλάσιος ἄρα ἐστὶν ὁ α τοῦ γ.

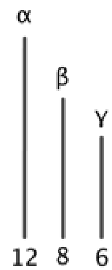


---

1 post ἡμιόλιος addunt καὶ (hoc om. W) ἐκ τοῦ τριπλοῦ καὶ ἐπιτρίτου τὸ τετραπλάσιον ὁμοίως δείκνυται καὶ ἐκ τοῦ τετραπλοῦ καὶ ἐπιτετάρτου τὸ πενταπλοῦν καὶ ἀεὶ ὁμοίως M^1W, perfodit M^2, om. VN. 3 ἐπεὶ om. N. ἐστιν] ἔσται WV. ὁ ante δκ] ὁ δὲ VN. δκ VM^3, δ WM^1V, item lin. 8. 4 τεταρτημόριόν ἐστι M^3. 6 βλ M^4U, β WM^1VN. 7 βλ M^4N β M^1RV, item bis. (τοῦ δζ ἥμισυ — ἦν δὲ ὁ βλ om. U.) 8 γ (ante τρίτον) om. W. κ om. W, item lin. 9. 14 ὁ α (post β) om. M^1W. 15 τὸν ἥμισυν MWN. 16 α M^2 supra lin. εἰσι τοῖς β τρισὶ W. 17 γ WM^2, τρίτου M^1, δ VN. 19 β] δύο W. εἰσιν ἴσοι W. 21 in. γ] αγ W. δυσὶ] δύο libb.

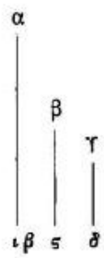
Então, como o βγ é hemiólico de δζ, o βλ, portanto, é a terça parte do βγ, e a metade de δζ. De novo, como o δζ é epítrito de θ, o δκ é, por um lado, uma quarta parte do δζ, e, por outro lado, uma terça parte de θ. Então, como o δκ é uma quarta parte do δζ, e o βλ é a metade de δζ, o δκ será, portanto, metade de βλ. E o βλ era uma terça parte do βγ: portanto, o δκ é uma sexta parte do βγ. E o δκ era uma terça parte de θ: portanto, o βγ é duplo de θ.

De um outro modo. Seja, pois, por um lado, o α hemiólico de β, e, por outro lado, o β epítrito de γ. Digo que o α é duplo de γ.



Pois, como o α é hemiólico de β, o α, portanto, contém o β e sua metade. Dois α, portanto, são iguais a três β. De novo, como o β é epítrito de γ, o β, portanto, contém o γ e seu terço. Três β, portanto, são iguais a quatro γ. E três β são iguais a dois α. Dois α, portanto, são iguais a quatro γ. Portanto, o α é igual a dois γ. Portanto, α é o duplo de γ.

156 III. Euclidis sectio canonis.



ζ. Ἐκ τοῦ διπλασίου διαστήματος καὶ ἡμιολίου τριπλάσιον διάστημα γίνεται.

Ἔστω γὰρ ὁ μὲν α *τοῦ* β *διπλάσιος, ὁ δὲ* β *τοῦ* γ *ἡμιόλιος. λέγω ὅτι ὁ* α *τοῦ* γ *ἐστι τριπλάσιος.*

Ἐπεὶ γὰρ ὁ α *τοῦ* β *ἐστι διπλάσιος, ὁ* α *ἄρα ἶσός ἐστι δυσὶ τοῖς* β. *πάλιν ἐπεὶ ὁ* β *τοῦ* γ *ἐστιν ἡμιόλιος, ἄρα ὁ* β *ἔχει τὸν* γ *καὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ. δύο ἄρα οἱ* β *ἶσοί εἰσι τρισὶ τοῖς* γ. *δύο δὲ οἱ* β *ἶσοί εἰσι τῷ* α. *καὶ ὁ* α *ἄρα ἶσός ἐστι τρισὶ τοῖς* γ. *τριπλάσιος ἄρα ἐστὶν ὁ* α *τοῦ* γ (p. 30).

η. *Ἐὰν ἀπὸ ἡμιολίου διαστήματος ἐπίτριτον διάστημα ἀφαιρεθῇ, τὸ λοιπὸν καταλείπεται ἐπόγδοον.*

Ἔστω γὰρ ὁ μὲν α *τοῦ* β *ἡμιόλιος, ὁ δὲ* γ *τοῦ* β *ἐπίτριτος. λέγω ὅτι ὁ* α *τοῦ* γ *ἐστὶν ἐπόγδοος.*

Ἐπεὶ γὰρ ὁ α *τοῦ* β *ἐστὶν ἡμιόλιος, ὁ* α *ἄρα ἔχει τὸν* β *καὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ. ὀκτὼ ἄρα οἱ* α *ἶσοί εἰσι δώδεκα τοῖς* β. *πάλιν ἐπεὶ ὁ* γ *τοῦ* β *ἐστὶν ἐπίτριτος, ὁ* γ *ἄρα ἔχει τὸν* β *καὶ τὸ τρίτον αὐτοῦ. ἐννέα ἄρα*

---

4 ὁ ad α om. W. 7 α ἄρα W, α om. M[1], ἄρα α M[2]. β] δύο W. 9 τὸν ἥμισυν W. 10 δύο δὲ — τοῖς γ om. W. α post ὁ add. M[2]. 14 ἐπόγδοον M[2], τὸ ὄγδοον W. ad figuram M[2]N habent ascriptos hos numeros:

ϑ ϛ η
η ιβ ϑ
οβ οβ οβ.

---

1 Hic aliam protasin insert Commentarius ad Ptol. p. 274, 13, qua demonstratur praeter duplicem rationem ex superparticularibus componi multiplicem nullam.

7. De um intervalo duplo e um hemiólico gera-se um intervalo triplo.

Seja, pois, por um lado, o α duplo de β, e, por outro, o β hemiólico de γ. Digo que o α é o triplo de γ.

Pois, como o α é duplo de β, o α, portanto é igual a dois β. De novo, como o β é hemiólico de γ, o β, portanto, contém o γ e a sua metade. Dois β, portanto, são iguais a três γ. E dois β são iguais a α. Também o α é igual a três γ. Portanto, o α é o triplo de γ.

8. Caso de um intervalo hemiólico seja subtraído um intervalo epítrito, o resto deixado é um epogdóico.

Seja, pois, por um lado, o α epimórico de β, e, por outro, o γ epítrito de β. Digo que o α é epogdóico de γ.

Pois, como o α é hemiólico de β, o α, portanto, contém β e sua metade. Oito α, portanto, são iguais a doze β. De novo, como o γ é epítrito de β, o γ, portanto, contém o β e seu terço. Nove γ, portanto, Prot. 7—9. p. 29—31 M. 157

οἱ γ *ἴσοί εἰσι δώδεκα τοῖς* β. *δώδεκα δὲ οἱ* β *ἴσοί εἰσιν* ὀκτὼ *τοῖς* α· ὀκτὼ *ἄρα οἱ* α *ἴσοί εἰσιν ἐννέα τοῖς* γ. ὁ α *ἄρα ἴσός ἐστι τῷ* γ *καὶ τῷ* ὀγδόῳ *αὐτοῦ, ἄρα* ὁ α *τοῦ* γ *ἐστὶν ἐπόγδοος*.

θ. *Τὰ ἓξ ἐπόγδοα διαστήματα μείζονά ἐστι διαστήματος ἑνὸς διπλασίου.*

Ἔστω γὰρ εἷς ἀριθμὸς ὁ α. *καὶ τοῦ μὲν* α *ἐπόγδοος ἔστω* ὁ β, *τοῦ δὲ* β (p. 31) *ἐπόγδοος* ὁ γ, *τοῦ δὲ* γ *ἐπόγδοος* ὁ δ, *τοῦ δὲ* δ *ἐπόγδοος* ὁ ε, *τοῦ* ε *ἐπόγδοος* ὁ ζ, *τοῦ* ζ *ἐπόγδοος* ὁ η. *λέγω, ὅτι* ὁ η *τοῦ* α *μείζων ἐστὶν ἢ διπλάσιος.*

Ἐπεὶ ἐμάθομεν εὑρεῖν ἑπτὰ ἀριθμοὺς ἐπογδόους ἀλλήλων, εὑρήσθωσαν οἱ α β γ δ ε ζ η, *καὶ γίνεται* ὁ *μὲν* α κϛ *μύρια* ,βρμδ,

---

(ϑ ϛ η medias ad lineas, η ιβ ϑ imum ad finem positos). N^{2} rubro colore addit *ἢ γὰρ ὀκτάκις* θ οβ,
καὶ δωδεκάκις τὰ ἓξ οβ,
καὶ ἐννάκις τὰ η οβ.
P. 156, 15 *ὁ δὲ* γ — 18 *ἐστιν ἡμιόλιος* om. W. 16 γ M^{3}, *τρίτος* M^{1}. β M^{2} in ras. 18 *ὁ ἄρα* α M^{1}. 20 α] δ W. *τοῖς* β M^{2} ras. *δωδεκάτοις* β W.

1 *οἱ* γ M^{2} supra. *δώδεκα τοῖς — τοῖς* α om. W. *δὲ* M^{3}. 2 α] δ M^{1}. 3 γ M^{2} ras., β W. *ὁ ἄρα* α VN, (α M^{2} supra). 4 *ὁ* α *ἄρα* WN. *ἐπόγδοός ἐστιν* W. 5 *ἐστι*] *εἰσὶ* W. 8 *τοῦ δὲ* γ om. N^{1}. 9 *τοῦ δὲ* ε N. 10 *τοῦ δὲ* (om. ζ) *ἐπογδ.* V, *τοῦ δὲ* ζ *ἐ.* N. 12 *ἀριθμοὺς ἐφεξῆς ἐπ.* M^{3}. 14 $\overset{\kappa\varsigma}{M}$ libri, item in seqq. (κϛ M^{2}).

---

12 Heiberg Littergesch. Studien comparat El. 8, 2: *ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἀνάλογον ἐλαχίστους, ὅσους ἂν ἐπιτάξῃ τις, ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ.* Numeri sunt:

	α 262 144		
β	294 912	ε	419 904
γ	331 776	ζ	472 392
δ	373 248	η	531 441.

são iguais a doze β. E doze β são iguais a oito α: portanto, oito α são iguais a nove γ. Portanto, o α é igual ao γ e ao seu oitavo, portanto, o α é epogdóico de γ.

9. Seis intervalos epogdóicos são maiores do que um intervalo duplo.

Seja, pois, o α um número. E, seja, por um lado, o β epogdóico de α, e, por outro, o γ epogdóico de β, e o δ epogdóico de γ, e o ε epogdóico de δ, e o ζ epogdóico de ε, e o η epogdóico de ζ. Digo que o η é maior do que o duplo de α.

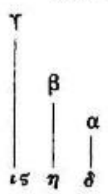
Como prendemos a achar sete números epogdóicos entre si, sejam achados os α, β, γ, δ, ε, ζ, η, e torna-se o α 26 miríade[15] 2144,

[15] O substantivo feminino grego *myrias* (que dá origem a *miríade*, em português) tem valor numérico definido como dez mil. Sendo assim, deve-se ler as linhas onde este encontra-se antecedido por um número como uma multiplicação. Então, a expressão "26 miríade" significa 26 x 10.000. O sinal (vírgula) que segue na expressão (ver texto grego) representa a adição do número seguinte. Portanto, temos: α = 26 x 10.000 + 2144 = 262.144; β = 29 x 10.000 + 4912 = 294.912, e assim por diante.

ὁ δὲ β κθ μύρια ,δϡιβ,
ὁ δὲ γ λγ μύρια ,αψος
ὁ δὲ δ λζ μύρια ,γϲμη,
ὁ δὲ ε μα μύρια ,θϡδ,
ὁ δὲ ζ μζ μύρια ,βτϟβ,
ὁ δὲ η νγ μύρια ,αυμα καὶ ἔστιν ὁ η τοῦ α μείζων ἢ διπλάσιος.

ι. Τὸ διὰ πασῶν διάστημά ἐστι πολλαπλάσιον.

Ἔστω γὰρ νήτη μὲν ὑπερβολαίων (p. 32) ὁ α, μέση δὲ ὁ β, προσλαμβανόμενος δὲ ὁ γ. τὸ ἄρα α γ διάστημα δὶς διὰ πασῶν ὂν ἐστὶ σύμφωνον. ἤτοι οὖν ἐπιμόριόν ἐστιν, ἢ πολλαπλάσιον. ἐπιμόριον μὲν οὐκ ἔστιν· ἐπιμορίου γὰρ διαστήματος μέσος οὐδεὶς ἀνάλογον ἐμπίπτει. πολλαπλάσιον ἄρα ἐστίν. ἐπεὶ οὖν δύο ἴσα διαστήματα τὰ αβ βγ συντεθέντα ποιεῖ πολλαπλάσιον τὸ ὅλον, καὶ τὸ αβ ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον.



ια. Τὸ διὰ τεσσάρων διάστημα καὶ τὸ διὰ πέντε ἑκάτερον ἐπιμόριόν ἐστιν.

---

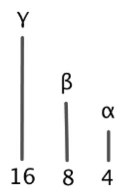
1 ϡ] ↑ M, ɽ WVN. item in seqq. 2 λγ et ,α M². 3 numeri M². 4 μα M². ϡ] ψ W. 6 ,αυ M². 7 M¹ habet reliquias figurae | α | β | γ | δ | ε | ζ | η. post διπλάσιος add. W: ια ιβ ιγ ιδ ιε ιζ ιη. om. fig. M²N. 8 διὰ M². Hanc figuram habet N, om. numeros M². 11 ὂν M⁴, ὢν M¹N. 12 ἢ] ἡ M. 16 ἴσα Meibom. 18 ἐστι πολλαπλάσιον et q. seq. — prot. 18 incl. om. W. alia manus ad mg. scribit λείπει ὧδε. 19 ια V, ιβ M², om. N. nec iam sequuntur protaseon numeri in codd. Figura vera in N apud prot. 6, M² om.

---

14 οὐδεὶς ἀν. ἐμπ. prot. 3. 17 συντεθέντα ποιεῖ πλλασ. prot. 2.

e o β 29 miríade 4912,
e o γ 33 miríade 1776,
e o δ 37 miríade 3248,
e o ε 41 miríade 9904,
e o ζ 47 miríade 2392,
e o η 53 miríade 1441, e o η é maior do que o duplo do α.

10. O intervalo de oitava é múltiplo.



Seja, pois, por um lado, o α *nete hyperbolaion*, e, por outro lado, o β *mese*, e o γ *proslambanomenos*. O intervalo αγ, sendo duas vezes a oitava, é portanto consonante[16]. De fato, ou é superparticular, ou múltiplo[17]. Superparticular certamente não é: pois, nenhum médio em proporção cai de um intervalo superparticular[18].

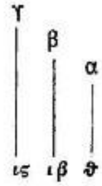
Portanto, é múltiplo.

Como, de fato, dois intervalos iguais, os αβ, βγ, tendo sido compostos fazem um todo múltiplo, também o αβ, portanto, é múltiplo[19].

11. O intervalo de quarta e o de quinta, cada um dos dois, é superparticular.

[16] A *nete hyperbolaion* é a nota mais alta do sistema harmônico grego, que é composto por duas oitavas. A oitava mais baixa é a *proslambamenos*, e a oitava mais alta, a *nete*. A localização delas no Cânone está representada na figura da Proposição 19. Cf. Barker, 2004, p. 199, n. 23.
[17] Conforme estabelecido no final da introdução.
[18] Ver Proposição 3.
[19] Ver Proposição 2.

Ἔστω γὰρ νήτη μὲν συνημμένων ὁ α, μέση δὲ ὁ β, ὑπάτη δὲ μέσων ὁ γ. τὸ ἄρα αγ διάστημα δὶς διὰ τεσσάρων ὂν ἐστὶ διάφωνον· οὐκ ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον. ἐπεὶ οὖν δύο διαστήματα ἴσα τὰ αβ βγ συντεθέντα τὸ ὅλον μὴ ποιεῖ πολλαπλάσιον, οὐδὲ ἄρα τὸ αβ ἐστὶ πολλαπλάσιον. καὶ ἔστι σύμφωνον· ἐπιμόριον ἄρα. ἡ αὐτὴ δὲ ἀπόδειξις καὶ ἐπὶ τοῦ διὰ πέντε. (p. 33.)



12. Τὸ διὰ πασῶν διάστημά ἐστι διπλάσιον.

Ἐδείξαμεν γὰρ αὐτὸ πολλαπλάσιον. οὐκοῦν ἤτοι διπλάσιόν ἐστιν — ἢ μεῖζον ἢ διπλάσιον. ἀλλ' ἐπεὶ ἐδείξαμεν τὸ διπλάσιον διάστημα ἐκ δύο τῶν μεγίστων ἐπιμορίων συγκείμενον, ὥστε εἰ ἔσται τὸ διὰ πασῶν μεῖζον διπλασίου, οὐ συγκείσεται ἐκ δύο μόνων ἐπιμορίων, ἀλλ' ἐκ πλειόνων, — σύγκειται δὲ ἐκ δύο συμφώνων διαστημάτων, ἔκ τε τοῦ διὰ πέντε καὶ τοῦ διὰ τεσσάρων· οὐκ ἄρα ἔσται τὸ διὰ πασῶν μεῖζον διπλασίου. διπλάσιον ἄρα.

Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ διὰ πασῶν ἐστι διπλάσιον, τὸ δὲ διπλάσιον ἐκ τῶν μεγίστων ἐπιμορίων δύο συνέστηκε, καὶ τὸ διὰ πασῶν ἄρα ἐξ ἡμιολίου καὶ ἐπιτρίτου συνέστηκε, ταῦτα γὰρ μέγιστα. συνέστηκε δὲ ἐκ τοῦ

---

2 δὶς M² supra. 3 ὂν M² ex ὢν. 10 12. Libri om et numeros et partium signa, pergunt in linea. 11 αὐτὸ] αὐτῷ M. 22 καὶ τὸ διὰ π. — 23 γὰρ μέγιστα om. Porph. 23 δὲ Porph., γὰρ libri Eucl. post δὲ ἐκ insert τε M⁴.

---

3 οὐκ ἄρα πλλασ. p. 149, 21. 5 μὴ ποιεῖ πλλάσ. prot. 5. 11 ἐδείξαμεν prot. 10. 13 ἐδείξαμεν prot. 6, accedit Comm. in Ptol. p. 274, 13. 16 πλειόνων prot. 7. 21 συνέστηκε prot. 6.

Seja, pois, tanto o α *nete synemmenon*, quanto o β *mese*, e o γ *hypate meson*[20]. O intervalo αγ, sendo duas vezes a quarta, é, portanto, dissonante: portanto, não é múltiplo. Como, de fato, os dois intervalos iguais, αβ, βγ, tendo sido compostos, não fazem um todo múltiplo, tampouco o αβ é múltiplo[21]. E é consonante: portanto, é superparticular. A mesma demonstração <vale> também para a quinta.

12. O intervalo de oitava é duplo.

Pois demonstramos que o mesmo é múltiplo[22]. Então, ou é duplo ou maior do que duplo. Mas como demonstramos, o intervalo duplo é composto de dois superparticulares maiores[23], de modo que se a oitava for maior do que um duplo, não será composta de só dois <intervalos>, mas de mais. E é composta de dois intervalos consonantes, da quinta e da quarta: portanto, a oitava não será maior do que um duplo. Portanto, é um duplo.

Mas, como a oitava é um duplo, e o duplo é construído sobre dois superparticulares maiores, também a oitava é construída, portanto, sobre um hemiólico e um epítrito, pois estes são maiores. E é construído sobre

[20] A *nete synemmenon* é uma quarta acima da *mese*, que, por sua vez, é uma quarta acima da *hypate meson*. Cf. Barker, 2004, p. 200, n. 27.
[21] Ver Proposição 5.
[22] Ver Proposição 10.
[23] Ver Proposição 6.

διὰ πέντε καὶ ἐκ τοῦ διὰ τεσσάρων, ὄντων ἐπιμορίων· τὸ μὲν ἄρα διὰ πέντε, ἐπειδὴ μεῖζόν ἐστιν, ἡμιόλιον ἂν εἴη, τὸ δὲ διὰ τεσσάρων ἐπίτριτον.

Φανερὸν δή, ὅτι καὶ τὸ διὰ πέντε καὶ διὰ πασῶν τριπλάσιόν ἐστιν. ἐδείξαμεν γάρ, ὅτι ἐκ διπλασίου διαστήματος καὶ ἡμιολίου τριπλάσιον διάστημα γίνεται, ὥστε καὶ τὸ διὰ πασῶν καὶ τὸ διὰ πέντε τριπλάσιον.

Τὸ δὲ δὶς διὰ πασῶν τετραπλάσιόν ἐστιν.

Ἀποδέδεικται ἄρα τῶν συμφώνων ἕκαστον, ἐν τίσι λόγοις (p. 34) *ἔχει τοὺς περιέχοντας φθόγγους πρὸς ἀλλήλους.*

13. *Λοιπὸν δὴ περὶ τοῦ τονιαίου διαστήματος διελθεῖν, ὅτι ἐστὶν ἐπόγδοον.*

Ἐμάθομεν γάρ, ὅτι ἐὰν ἀπὸ ἡμιολίου διαστήματος ἐπίτριτον διάστημα ἀφαιρεθῇ, τὸ λοιπὸν καταλείπεται ἐπόγδοον. ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ διὰ πέντε τὸ διὰ τεσσάρων ἀφαιρεθῇ, τὸ λοιπὸν τονιαῖόν ἐστι διάστημα· τὸ ἄρα τονιαῖον διάστημά ἐστιν ἐπόγδοον.

14. *Τὸ διὰ πασῶν ἔλαττον ἢ ἓξ τόνων.*

Δέδεικται γὰρ τὸ μὲν διὰ πασῶν διπλάσιον, ὁ δὲ

---

3 *ἐπὶ τρίτον* N. (4 *δὴ* cf. Eucl. El. VII 36 med. [II 262, 24 Hb.], *δὲ* Porph.). 10 post *ἄρα* add. *ὅτι* M². *ἕκαστον*] *ασ* corr. M². 11 *λόνοις* M, *λόγοις* V. 13 *δὴ* ego cum B et Porph., *δὲ* NU, *δεῖ* M, cf. mira illa *δὴ* in Eucl. Elem. 7, 2 et 36 (p. 192 et 262 H) 8, 4 (282). 10, 3 (282). 14 *ἐπόγδοον*] *δ* ras. M. 15 *ἐὰν μὲν* N (M³ ras.), *ἐάν ἐστιν* V, om. *μὲν* Porph. 20 *ἔλαττόν ἐστιν ἢ* NM³.

---

1 *ἐπιμορίων* prot. 11. 5 *ἐδείξαμεν* prot. 7. 15 *ἐμάθομεν* prot. 8. 21 *δέδεικται* prot. 12 et 13.

a quinta e a quarta, que são superparticulares: a quinta, por lado, é maior, portanto, será hemiólico, e a quarta, por outro lado, epítrito[24].

É evidente, então, que tanto a quinta, quanto a oitava, são um <intervalo> triplo. Pois demonstramos, então, que de um intervalo duplo e de um hemiólico gera-se um intervalo triplo[25], de modo que tanto a oitava, quanto a quinta, são um triplo.

E duas vezes a oitava é um <intervalo> quádruplo.

Está, portanto, demonstrado em quais razões cada uma das consonantes têm as notas contidas entre si.

13. Resta, então, considerar o intervalo de um tom, que é epogdóico.

Aprendemos, pois, que caso de um intervalo hemiólico seja subtraído um intervalo epítrito, o restante é um epogdóico[26]. E, caso da quinta seja subtraída a quarta, o restante é um intervalo de um tom: portanto, o intervalo de um tom é epogdóico.

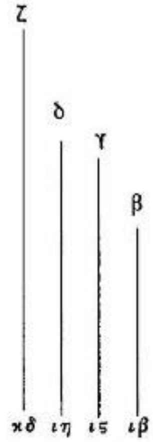
14. A oitava é menor do que seis tons.

Pois está provado, tanto que a oitava é um duplo[27],

[24] Ver Proposição 11.
[25] Ver Proposição 7.
[26] Ver Proposição 8.
[27] Ver Proposição 12.

τόνος ἐπόγδοος· τὰ δὲ ἓξ ἐπόγδοα διαστήματα μείζονα διαστήματός [ἐστι] διπλασίου. τὸ ἄρα διὰ πασῶν ἔλαττόν ἐστιν ἓξ τόνων.

15. Τὸ διὰ τεσσάρων ἔλαττον δύο τόνων καὶ ἡμιτονίου, καὶ τὸ διὰ πέντε ἔλαττον τριῶν τόνων καὶ ἡμιτονίου.



Ἔστω γὰρ νήτη μὲν διεζευγμένων ὁ β, παραμέση δὲ ὁ γ, μέση δὲ ὁ δ, (p. 35) ὑπάτη δὲ μέσων ὁ ζ. οὐκοῦν τὸ μὲν γδ διάστημα τόνος ἐστὶ, τὸ δὲ βζ, διὰ πασῶν ὂν, ἔλαττον ἓξ τόνων. τὰ λοιπὰ ἄρα, τό τε βγ καὶ τὸ δζ ἶσα ὄντα ἐλάττονά ἐστι πέντε τόνων. ὥστε τὸ ἐν τῷ βγ ἔλαττον δύο τόνων καὶ ἡμιτονίου, ὃ ἐστι διὰ τεσσάρων, τὸ δὲ βδ ἔλαττον τριῶν τόνων καὶ ἡμιτονίου, ὃ ἐστι διὰ πέντε.

16. Ὁ τόνος οὐ διαιρεθήσεται εἰς δύο ἶσα οὔτε εἰς πλείω.

Ἐδείχθη γὰρ ὢν ἐπιμόριος· ἐπιμορίου δὲ διαστήματος μέσοι οὔτε πλείους οὔτε εἷς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν. οὔκ ἄρα διαιρεθήσεται ὁ τόνος εἰς ἶσα.

---

7 Hanc figuram habet N ad § 6, rubro ibi colore additur in marg. διὰ πασῶν ὁ βζ. recto loco habent M²V quattuor lineas aequales signatas ζ δ γ β sine numeris. 11 ad ἔλαττον add. ἐστὶν M⁴ supra. 14 ὃ M¹VN, ὂν M⁴. item lin. 16. 18 ἶσα Jan, ἴσους libb. (cf. 162, 14.) πλείω Porph., πλείους libb. Eucl. 19 ὢν M⁴, ὂν M¹, ἂν N. 20 μέσοι N, μέσος V, om. Porph. et M.

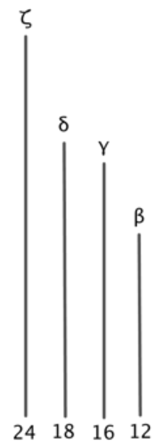
---

1 μείζονα prot. 9. 12 ἶσα, nam $\beta : \gamma = 3 : 4 = \delta : \zeta$. 19 ἐδείχθη § 15. ἐμπίπτουσι prot. 3.

quanto o tom é um epogdóico[28]: e seis intervalos epogdóicos são maiores do que um intervalo duplo[29]. Portanto, a oitava é menor do que seis tons.

15. A quarta é menor do que dois tons e um semiton, e a quinta é menor do que três tons e um semiton.

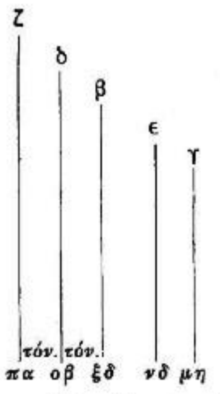
Seja, pois, tanto o β *nete diezeugmenon*, quanto o γ *paramese*, como o δ mese, e o ζ *hypate meson*[30]. Então, tanto o intervalo γδ é um tom[31], quanto o βζ, que é uma oitava, é menor do que seis tons[32]. Portanto, os restantes, tanto o βγ, quanto o δζ, que são iguais, são menores do que cinco tons. De modo que o <intervalo> em βγ, que é uma quarta, é menor do que dois tons e um semitom, e o βδ, que é uma quinta, é menor do que três tons e um semitom.



16. O tom não poderá ser dividido em dois nem em mais <intervalos> iguais.

Pois, foi provado ser superparticular[33]: e nem um nem muitos médios em proporção caem de um intervalo superparticular[34]. Portanto, o tom não poderá ser dividido em iguais.

[28] Ver Proposição 13.
[29] Ver Proposição 9.
[30] *Nete diezeugmenon* é uma quarta acima da *paramese*, que por sua vez é um tom acima da *mese*; *hypate meson* é uma quarta abaixo da *mese* e uma oitava abaixo da *nete diezeugmenon*. Nesse esquema, as quintas são aquelas da *hypate* até a *paramese*, e da *mese* até a *nete*. Barker, 2004, p. 202, n. 46.
[31] O intervalo *paramese-mese* corresponde à diferença entre a quinta e a quarta. Ver Proposição 13.
[32] Ver Proposição 14.
[33] Ver Proposição 13.
[34] Ver Proposição 3.

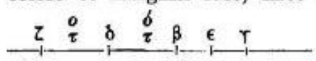


17. *Αἱ παρανῆται αἱ καὶ λιχανοὶ ληφθήσονται διὰ συμφωνίας οὕτως.* Ἔστω γὰρ μέση ὁ β. ἐπιτετάσθω (p. 36) διὰ τεσσάρων ἐπὶ τὸ γ, καὶ ἀπὸ τοῦ γ ἀνείσθω διὰ πέντε ἐπὶ τὸ δ. τόνος ἄρα ὁ βδ. πάλιν δὲ ἀπὸ τοῦ δ διὰ τεσσάρων ἐπιτετάσθω ἐπὶ τὸ ϵ, καὶ ἀπὸ τοῦ ϵ ἀνείσθω ἐπὶ τὸ ζ διὰ πέντε. τόνος ἄρα τὸ ζδ. δίτονος ἄρα τὸ ζβ. λιχανὸς ἄρα τὸ ζ. ὁμοίως ἂν καὶ αἱ παρανῆται ληφθήσονται.

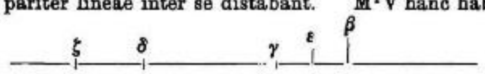
18. *Αἱ παρυπάται καὶ αἱ τρίται οὐ διαιροῦσι τὸ πυκνὸν εἰς ἴσα.*

---

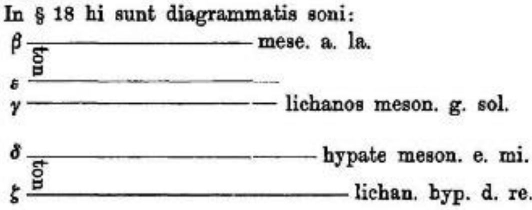
1 Exstant in N[1] ad prot. 7 hae quinque lineae diversa longitudine pariter inter se distantes, adsunt hi numeri haeque litterae. sed *τόν.* ascripsi ego, quod MV (M[2] videtur ex colore et marginis loco) haec habent diagrammatis vestigia:

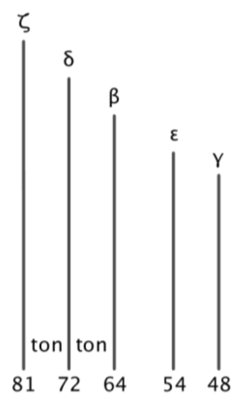


Addidit etiam N[2] rubro colore *τόνος* super β, eademque manus procedens e loco ζ toti figurae inscripsit *διὰ πέντε ἀπὸ τοῦ* γ *μέχρι τοῦ* δ et *διὰ τεσσάρων* inde ab ϵ. 6 δ M[3]N, *τέταρτον* M[1]. 10 ζδ M[3]N, ζ M[1]. *δίτονος* NM[5], *διάτονος* M[1]VU. Figuram 18 dedi ut erat in N, nisi quod pariter lineae inter se distabant. M[2]V hanc habent figuram:



In § 18 hi sunt diagrammatis soni:





17. As *paranetai* e as *lichanoi* serão tomadas por meio de concordâncias.

Seja, pois, o β *mese*. Fique estendida uma quarta até o γ, e de γ fique reduzida uma quinta até o δ. O βδ, portanto, é um tom[35]. De novo, fique estendida uma quarta, de δ até ε, e fique reduzida uma quinta, de ε até ζ. O ζδ, portanto, é um tom. O ζβ, portanto, é um dítono. O ζ, portanto, é *lichanos*[36]. E do mesmo modo são tomadas as *paranetai*.

18. As *parypatai* e as *tritai* não dividem o *pyknon* em <intervalos> iguais.

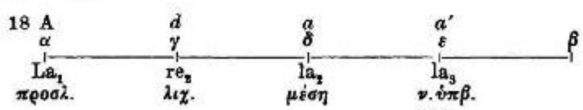
[35] Ver Proposição 13.
[36] O *lichanos* está dois tons abaixo da *mese*.

Ἔστω γὰρ μέση μὲν ὁ β, λιχανὸς δὲ ὁ γ, ὑπάτη δὲ ὁ δ. ἀνείσθω ἀπὸ τοῦ β διὰ πέντε ἐπὶ τὸ ζ. τόνος ἄρα ὁ ζδ. καὶ ἀπὸ τοῦ ζ διὰ τεσσάρων ἐπιτετάσθω ἐπὶ τὸ ε. τόνος ἐστὶν ἄρα τὸ ζδ διάστημα καὶ τὸ βε. κοινὸν προσκείσθω τὸ δγ. τὸ ἄρα ζε ἴσόν ἐστι τῷ δβ. διὰ τεσσάρων δὲ τὸ ζε· οὐκ ἄρα μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει τις τῶν ζε· ἐπιμόριον γὰρ τὸ διάστημα. καὶ ἔστιν ἴσος ὁ δβ τῷ ζε· οὐκ ἄρα τοῦ δγ μέσος ἐμπεσεῖται, ὅ ἐστιν ἀπὸ ὑπάτης ἐπὶ λιχανόν. οὐκ ἄρα ἡ παρυπάτη διελεῖ τὸ πυκνὸν εἰς ἴσα. ὁμοίως οὐδὲ ἡ τρίτη. (p. 37.)

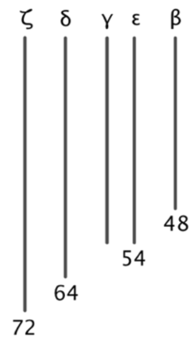
19. *Τὸν κανόνα καταγράψαι κατὰ τὸ καλούμενον ἀμετάβολον σύστημα.*

Ἔστω τοῦ κανόνος μῆκος, ὃ καὶ τῆς χορδῆς τὸ αβ, καὶ διῃρήσθω εἰς τέσσαρα ἴσα κατὰ τὰ γδε. ἔσται ἄρα ὁ βα βαρύτατος ὢν φθόγγος βόμβυξ. οὗτος δὲ ὁ αβ τοῦ γβ ἐπίτριτός ἐστιν, ὥστε ὁ γβ τῷ αβ συμ-

6 *καὶ* M^2 supra. βε ego, γε libri. (βε tonus est, quia dia tessaron εζ subtrahitur a diapente βζ.) 7 *προσκείσθω* Meib., *προκείσθω* libri. ζε ego, ζγ libri. 8 δβ ego, δε libri. 10 *ἐπιμόριον* M^2N, *ἐπιμόριος* M^1. 11 δβ *τῷ* ζε ego, δζ *τῷ* γε libri. 16 in N schol. *κανὼν ἀμετάβολος, ὃς καὶ φθόγγος ὢν βαρύτατος βόμβυξ λέγεται.* 18 *διαιρείσθω* W. *κατὰ* MVN (qui postea expunxit), om. W. 19 *ὁ* om. N. *ὢν* M^2WN, *ὧν* M^1V.



11*



Seja, pois, tanto o β mese, quanto o γ lichanos, e o δ hypate. Fique reduzida uma quinta, de β até ζ. O ζδ, portanto, é um tom. E, fique estendida uma quarta, de ζ até ε. Portanto, o intervalo ζδ, e também o βε, é um tom. Fique adicionado o δγ comum. O ζε, portanto, é igual ao δβ. E o ζε é uma quarta: portanto, nenhum médio em proporção cai de ζε: pois o intervalo é superparticular[37]. E o δβ é igual ao ζε: portanto, nenhum médio cai de γδ, que é o <intervalo> de hypates até lichanos. Portanto, a parypate não dividirá a pykton em <intervalos> iguais. Do mesmo modo, tampouco a trite.

19. Descrever o cânone segundo a chamada escala imutável.

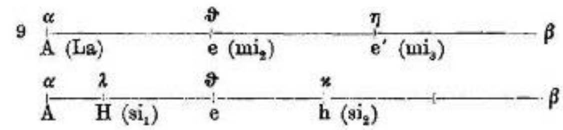
Seja um comprimento do cânone, o mesmo da corda αβ, e fique dividido em quatro <intervalos> iguais, segundo os γ, δ, e ε. Portanto, sendo o βα mais grave, será a nota mais baixa. E este αβ é epítrito de γβ, pois o γβ será consonante

[37] Assim como se faz na música em nossos dias, pode-se ler a expressão como “uma quarta acima”. Denota-se um sentido ascendente quando o comprimento do segmento de corda que vibra (e emite som) torna-se menor, de modo que um som mais agudo do que outro é considerado mais alto do que este.

φωνήσει διὰ τεσσάρων ἐπὶ τὴν ὀξύτητα. καὶ ἔστιν ὁ αβ προσλαμβανόμενος· ὁ ἄρα γβ ἔσται ὑπάτων διάτονος. πάλιν ἐπεὶ ὁ αβ τοῦ βδ ἐστὶ διπλοῦς, συμφωνήσει τῇ διὰ πασῶν καὶ ἔσται ὁ βδ μέση. πάλιν ἐπεὶ τετραπλάσιός ἐστιν ὁ αβ τοῦ εβ, ἔσται ὁ εβ νήτη ὑπερβολαίων. ἔτεμον τὸν γβ δίχα κατὰ τὸ ζ. καὶ ἔσται διπλάσιος ὁ γβ τοῦ ζβ, ὥστε συμφωνεῖν τὸν γβ πρὸς τὸν ζβ διὰ πασῶν· ὥστε εἶναι τὸν ζβ νήτην συνημμένων. ἀπέλαβον τοῦ δβ τρίτον μέρος τὸ δη. καὶ ἔσται ἡμιόλιος ὁ δβ τοῦ ηβ, ὥστε συμφωνήσει ὁ δβ πρὸς τὸν ηβ ἐν τῷ διὰ πέντε· ὁ ἄρα ηβ νήτη ἔσται διεζευγμένων. ἔθηκα τῷ ηβ ἴσον τὸν ηθ, ὥστε ὁ θβ πρὸς τὸν ηβ συμφωνήσει διὰ πασῶν, ὡς εἶναι τὸν θβ ὑπάτην μέσων. ἔλαβον τοῦ θβ τρίτον μέρος τὸ θκ. καὶ ἔσται ἡμιόλιος ὁ θβ τοῦ κβ, ὥστε εἶναι τὸν κβ παράμεσον. (p. 39.) ἀπέλαβον τῷ κβ ἴσον τὸν λκ καὶ γενήσεται ὁ λβ ὑπάτη βαρεῖα. ἐσονται ἄρα

1 τῇ διὰ. τ. M^5N. 2 γβ] βγ W. ὑπάτων M^1V, ὑπατῶν M^3WN. 3 καὶ πάλιν W. διπλοῦς M^1VW, διπλάσιος M^3N. 4 τῇ MN, αὐτῇ W. 6 ad ὑπερβολαίων $M^{3?}$ in mg. νόει τὸ λεγόμενον ἐπὶ τοῦ ἐμμεταβόλου συστήματος, dein multa erasa. ad l. 11 idem νόει τὸ λ. ἐπὶ τοῦ ἀμεταβόλου συστ. et iterum multa erasa. ἔτεμον γὰρ M^5N. τὸν MN, τὸ corr. ex τοῦ W. 11 ὁ ἄρα ὁ M^1N. 14 τοῦ θβ W, τὸν θβ M^1N. 16 παράμεσον MW, παραμέσην N.

P. 165, 1. ἑστῶτες ego. 3 hoc habet diagramma M^2 mg., sed παραμέση κ et νήτη συν. ζ perverse mutaverunt locos. bis illud repetit V nominibus non ascriptis, sed omittit bis λ, altero loco etiam η. WN omittunt figuram.



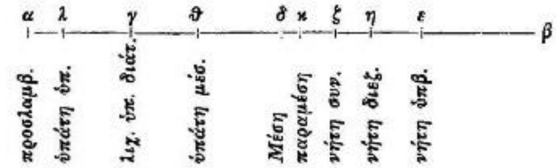
com o αβ de quarta mais aguda[38]. E o αβ é *proslambanomenos*: portanto, o γβ será *hypaton* diatônico[39]. De novo, como o αβ é duplo de βγ, será consonante de oitava, e o βγ será *mese*. De novo, como o αβ é quádruplo de εβ, o εβ será *nete hyperbolaion*. Cortei o γβ em dois, segundo o ζ. E o γβ será duplo de ζβ, de modo que o γβ é consonante com o ζβ de oitava: de modo que o ζβ será *nete synemmenon*. Tomei de δβ uma terça parte, o δη, e o δβ será hemiólico de ηβ, de modo que o δβ será consonante com o ηβ de quinta: portanto, o ηβ será *nete diezeugmenon*. Pus o ηθ igual ao ηβ, de modo que o θβ será consonante com o ηβ de oitava, de modo a ser o θβ *hypate meson*. Tomei de θβ uma terça parte, o θκ. E o θβ será hemiólico de κβ, de modo a ser o κβ *parameson*. Tomei de κβ um igual ao λκ, e o λβ formará

[38] Assim como se faz na música em nossos dias, pode-se ler a expressão como "uma quarta acima". Denota-se um sentido ascendente quando o comprimento do segmento de corda que vibra (e emite som) torna-se menor, de modo que um som mais agudo do que outro é considerado mais alto do que este.

[39] Isto é, será um tom abaixo da *hypate meson*.

§ 19. 20. p. 37—39 M. 165

εἰλημμένοι ἐν τῷ κανόνι πάντες οἱ ἑστῶτες φθόγγοι τοῦ ἀμεταβόλου συστήματος.

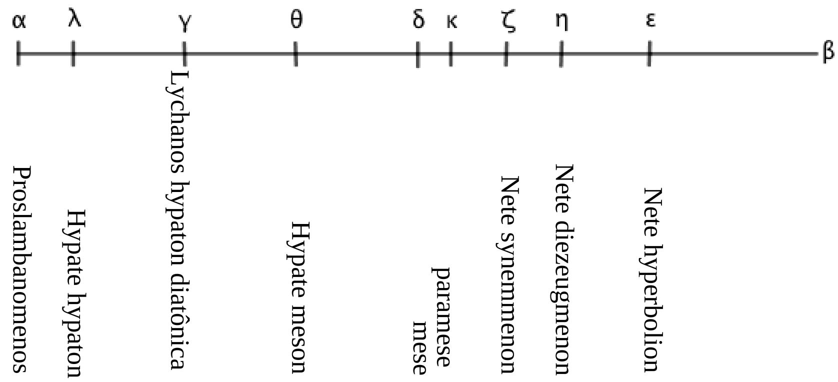


20. *Λοιπὸν δὴ τοὺς φερομένους λαβεῖν.*

Ἔτεμον τὸν ϵβ *εἰς ὀκτὼ καὶ ἑνὶ αὐτῶν ἶσον ἔθηκα τὸν* ϵμ, *ὥστε τὸν* μβ *τοῦ* ϵβ *γενέσθαι ἐπόγδοον. καὶ πάλιν διελὼν τὸν* μβ *εἰς ὀκτὼ ἑνὶ αὐτῶν ἶσον ἔθηκα τὸν* νμ· *τόνῳ ἄρα βαρύτερος ἔσται ὁ* νβ *τοῦ* βμ, *ὁ δὲ* μβ *τοῦ* βϵ, *ὥστε ἔσται μὲν ὁ* νβ *τρίτη ὑπερβολαίων, ὁ δὲ* μβ *ὑπερβολαίων διάτονος. ἔλαβον τοῦ* νβ *τρίτον μέρος καὶ ἔθηκα τὸν* νξ, *ὥστε τὸν* ξβ *τοῦ* νβ *εἶναι ἐπίτριτον καὶ διὰ τεσσάρων συμφωνεῖν ἐπὶ τὴν βαρύτητα καὶ γενέσθαι τὸν* ξβ *τρίτην διεζευγμένων. πάλιν τοῦ* ξβ *λαβὼν ἥμισυ μέρος ἔθηκα τὸν* ξο, *ὥστε διὰ πέντε συμφωνεῖν τὸν* οβ *πρὸς τὸν* ξβ· *ὁ ἄρα* οβ *ἔσται παρυπάτη μέσων. καὶ τῷ* ξο *ἶσον ἔθηκα τὸν* οπ, *ὥστε γενέσθαι τὸν* πβ *παρυπάτην ὑπάτων. ἔλαβον δὴ τοῦ* βϒ *τέταρτον μέρος τὸν* ϒρ, *ὥστε γενέσθαι τὸν* ρβ *μέσων διάτονον.*

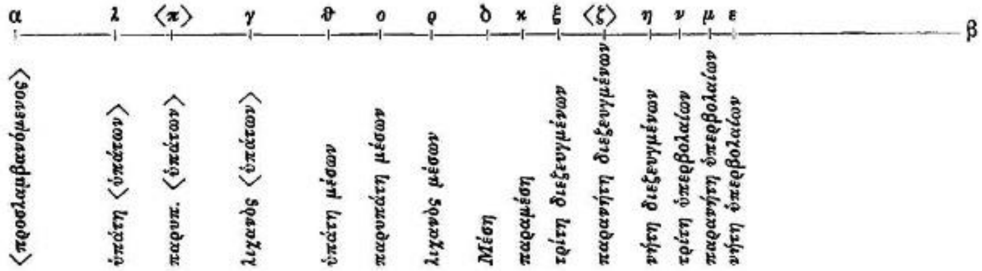
4 *δὴ* ego, *δεῖ* libri, cf. p. 34, 4. 5 *τὸν* W, *τὸ* MN. 6 *τὸν* MN, *τὸ* W. 9 inter *ὑπερβολαίων* et 17 *ὑπερβολαίων* interposita habet M^2 in mg. 10 *τοῦ* WM^3N, *τὸν* M^1. 11 *καὶ ἑνὶ αὐτῶν ἶσον* M^3N, om. haec, habet *ἔθηκα* M^1V. *νξ*] ξ W. *τοῦ* νβ M^3, *τὸν* νβ M^1V. 12 *καὶ* om. libri. 14 *ἶσον αὐτῷ* M^3 supra, *ἴσον αὐτῶν* N. 15 *ἄρα* ο cum charta periit in W, item aliae litterae. 16 *τῷ* M^3 esc *τὸ*. 17 *τὸν*] *τὸ* W. *ὑπατῶν* W. *δὴ* cf. el. VII, 36 (II p. 262, 24 H). 18 *τὸν* W, *τὸ* MN. ϒο W. 19 *μέσον* MN.

uma *hypate* grave. Portanto, ficarão descritas sobre o cânone todas as notas fixadas da escala imutável.



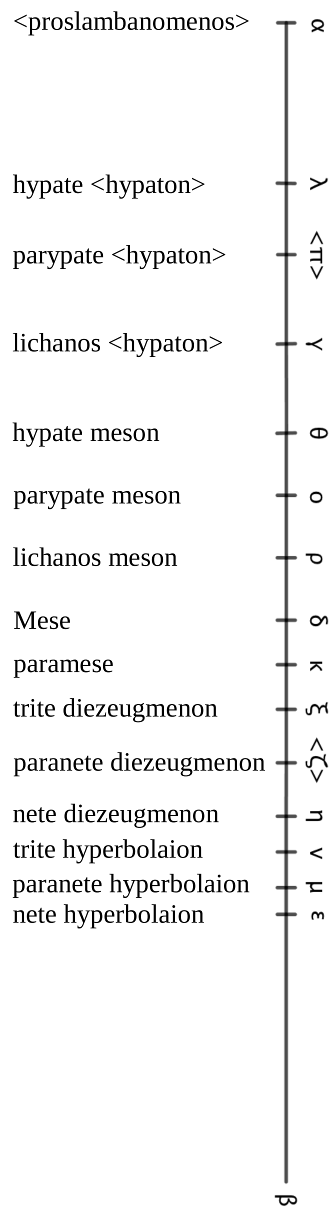
20. Resta, por fim, encontrar as <notas> móveis.

Cortei o εβ em oito, e, igual a um destes, pus o εμ de modo que o μβ seja epogdóico de εβ. E, de novo, dividindo o μβ em oito, igual a um destes pus o νμ: portanto, o νβ será um tom mais grave do que o βμ, e o μβ do que o βε, de modo que tanto o νβ será *trite hyperbolaion*, quanto o μβ *hyperbolaion* diatônico. Tomei do νβ uma terça parte e <igual a um destes> pus o νξ, de modo que o ξβ será *epítrito* de νβ e consonante de quarta mais grave, e o ξβ *trite diezeugmenon*. De novo, tomei de ξβ uma metade, e <igual a ela> pus o ξο, de modo a ser o οβ consonante com o ξβ de quinta: portanto, o οβ será *parypate meson*. E pus o οπ igual ao ξο, de modo a ser o πβ *parypate hypaton*. Tomei de βγ uma quarta parte, o γρ, de modo a ser o ρβ *meson* diatônica.



Descriptum hoc est diagramma manu 2 in imo margine fol. 16^v cod. M. litteras *π* et *ζ* librarius omisit, reliqua quae uncinis ⟨ ⟩ inclusi perierunt cum margine membranae. Alterum est diagramma in summo margine eiusdem folii neglegenter descriptum, litterarum ordo hic: *α λ γ ϑ δ ρ κ κ η ε μ ν ξ ο π β*, sonorum nomina non addita. utramque repetit figuram V omissis tamen sonorum nominibus. similem canonem sine nominibus exhibent N et Vat. 221, litterae sunt in utroque: *α λ γ ϑ ρ π δ κ ο ζ η ξ ε β*. W nullam habet canonis figuram.

Addit M^1 *εὐκλείδου κανόνος κατατομή ζώσιμος διώρθου ἐν κωνσταντινουπόλει εὐτυχῶς*; eadem U, Lips. Bonon. 2048, Monac. Urbin 77. Schol. N^2 rubro colore: *Κλεονείδου εἰσαγωγὴ ἁρμονικὴ τέλος. φύλλα ιδ.* carent titulo subscripto RVBBerol.


<proslambanomenos> α
hypate <hypaton> λ
parypate <hypaton> <π>
lichanos <hypaton> γ
hypate meson θ
parypate meson ο
lichanos meson ρ
Mese δ
paramese κ
trite diezeugmenon ξ
paranete diezeugmenon <ζ>
nete diezeugmenon η
trite hyperbolaion ν
paranete hyperbolaion μ
nete hyperbolaion ε
β