Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 7 nº 14 (outubro/2007 - março/2008) - pág. 213-232
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

ECUACIONES DIFERENCIALES Y CONTEMPORANEIDAD

Juan E. Nápoles Valdes

Universidad de la Cuenca del Plata y UTN - Argentina

(aceito para publicação em dezembro de 2006)

Resumen

En este trabajo presentamos algunas ideas matemáticas, en conexión con ciertas tendencias de la Física y la Filosofía presentes desde los griegos, y cómo científicos de disciplinas afines -y no tan afines- han encontrado en los últimos decenios, un área de trabajo común donde lo impredecible, lo aleatorio, el caos -como se quiera bautizar aquello que durante siglos escapó a una descripción determinista- se ha convertido en objeto de estudio.

Palabras-clave: Caos, determinismo, morfogénesis, atractor extraño

Abstract

In this work we present some mathematical ideas, in connection with certain tendencies of the Physics and the Philosophy from the Greeks, and how scientific of related disciplines - and not so related - have found in the last decades, an area of common work where the unpredictable thing, the random thing, the chaos - as it wants to be baptized what for centuries escaped to a deterministic description - has turned into an object of study.

Keywords: Chaos, deterninism, morphogenesis, strange attractor.

> "En esta época de contraste entre los estudios antiguos y los modernos es necesario hablar de uno que no empezó con Pitágoras ni terminará con Einstein, pero que es el más antiguo y, a la vez, el más moderno de todos."
>
> G.H.Hardy ("A Mathematicians's Apology")

1. Aproximación al Problema. En los últimos 50 años hemos presenciado, un notable desarrollo de un campo de la Física-Matemática, designado con el nombre de Mecánica No Lineal. Este término, probablemente, no es del todo correcto, los cambios no han ocurrido en la propia Mecánica, sino mayormente, en las técnicas de resolución de sus problemas, sobre todo los tratados con ayuda de las ecuaciones diferenciales, que ahora utilizan ecuaciones diferenciales no lineales.

1892 es un annus mirabalis en la formalización de métodos generales para la teoría de las ecuaciones diferenciales no lineales y la mecánica no lineal. Liapunov y Poincaré[1], convirtieron la nolinealidad en su objeto de estudio y aportaron métodos y conceptos fundamentales en el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales y no lineales.

Ese año se publicó la famosa memoria de Liapunov "Problema General de la Estabilidad del Movimiento" (en ruso), y el primer volumen del celebrado "Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste" de Poincaré, que marcaron un hito en el desarrollo de las ecuaciones diferenciales, en particular, cuando sus resultados son combinados con las nuevas técnicas matemáticas desarrolladas durante la pasada centuria[2]. Más estricto, algunos aspectos de estos trabajos han mostrado su conexión con la Teoría del Caos, el nuevo paradigma de las Matemáticas y la Física, por ejemplo, los resultados de Poincaré sobre movimientos cercanos a órbitas homoclínicas y heteroclínicas y el concepto de Liapunov de números característicos, hoy llamados Exponentes de Liapunov[3]. Después de una centuria de totalitarismo, se ha descubierto que las Matemáticas pueden ser en ocasiones el estudio de estructuras y que la Física puede ser la Física Cuántica. Y el común denominador de esta liberalización es la Nolinealidad.

En nuestro trabajo, estamos interesados en mostrar el desarrollo de algunas ideas matemáticas en conexión con ciertas tendencias de la Física y la Filosofía presentes desde los griegos y cómo científicos provenientes de disciplinas afines (y no tan afines) han encontrado en los últimos decenios, un área de trabajo común donde lo impredecible, lo aleatorio, el caos -como se quiera bautizar aquello que durante siglos escapó a una descripción determinista- se ha convertido en objeto de estudio[4].

---

[1] Para mayores detalles biográficos de Poincaré y Liapunov puede consultar, por ejemplo, G. Darboux-"Eloge historique d'Henri Poincaré lu dans la séance publique annuelle du 15 décembre 1913", Gauthier-Villars, París, 1913; A. T. Grigorian-"Lyapunov, Alexandr Mijailovich", Dictionary of Scientific Biography 8, New York (1970-1990), 559-563 y A M Lukomskaya and V I Smirnov (eds.)-"Aleksandr Mikhailovich Lyapunov", Bibliografía, Moscow-Leningrad, 1953. Ver también http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Lyapunov.html.

[2] Para una mayor información técnica, consulte por ejemplo J. Mawhin-"The centennial legacy of Poincaré and Lyapunov in Ordinary Differential Equations", Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, N.34 (1994), 9-46 y J. E. Nápoles y C. Negrón-"De la Mecánica Analítica a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias", Revista LLULL (España), Vol.17 (No.32) 1994, 190-206; un resumen de este último trabajo fue publicado en el Bol. Soc. Cub. Mat. Comp., No.15, 1993, 1-9.

[3] Esta medida de caos, fue introducida por el matemático ruso Liapunov a principios del siglo XX, los Exponentes de Liapunov, como ahora se les conoce, son un conjunto de números que se emplean usualmente para detectar la presencia del caos en sistemas dinámicos. La idea en general es medir qué tan rápido se alejan o difieren las configuraciones globales contiguas con respecto al tiempo. La importancia práctica de estos indicadores, trasciende en mucho los propósitos de este trabajo, queremos apuntar solamente que si fuera posible estimar estos indicadores en tiempo real se podría determinar, de manera no invasiva, las características de performance humana, evitando con ello, probables accidentes (ver Anexo 1).

[4] En un marco general sobre las perspectivas actuales en Filosofía e Historia de las Matemáticas sobre el conocimiento matemático, se deben destacar los ensayos de Morris Kline-"Matemática. La pérdida de la certidumbre", Madrid: Siglo XXI, 1985 y de R. Hersh-"Experiencia matemática", Barcelona: Labor, 1988 así como los trabajos de Mark Steiner-"Mathematical Knowledge", Ithaca: Cornell University Press, 1975 por su agudeza crítica; Raymond L. Wilder-"Mathematics as a Cultural System", New York/Oxford: Pergamon Press, 1981 una visión próxima (aunque un tanto superficial) a un sentir hoy común sobre los

2. Del Mito a los Orígenes. Desde sus inicios el pensamiento griego se preguntó por el origen de las cosas. El mundo visible, a través de su permanencia y a pesar de su multiplicidad, manifestó una unidad matemática y una belleza y grandiosidad tal, que el

paso del mito al logos fue inevitable. Durante el siglo V a.C. el pensamiento mítico dejó su sitio a las causas naturales.
Durante mucho tiempo, la Ciencia ha hecho suyo el credo de que detrás de los desórdenes aparentes de la Naturaleza siempre existe un orden escondido. Predecesores de esta filosofía son los pitagóricos y Platón[5]. Para este último, el estado ideal del Cosmos[6] es cuando cada cosa está en su lugar.
El mundo es matemáticamente ordenado y el trabajo del hombre de ciencia consiste en encontrar las estructuras racionales que sirvieron de modelo al Demiurgo. Hay algo que se resiste, que impide a las estructuras matemáticas realizarse perfectamente, pues la Naturaleza emergida de las manos del Demiurgo es sede de una agitación permanente.
Podemos, por tanto, afirmar que la Ciencia ha estado influida durante muchos siglos por los conceptos de Platón, quien delinea tres niveles principales de jerarquización. En el nivel superior se encuentran las ideas y formas matemáticas que constituyen los modelos ideales de todas las cosas. Es el dominio del Orden. Al otro extremo se encuentra el Caos, estado primordial carente de orden y desorden, que escapa a toda descripción.
Entre esos dos niveles está nuestro mundo, resultado del trabajo del Demiurgo, que tiene un poco de orden y desorden. Aunque idealmente es ordenado y obedece a leyes deterministas, no está exento de carácter aleatorio. Como afirma A. Rosenblueth[7], este principio es la esencia del determinismo o la causalidad, puesto que implica que es posible predecir el futuro de un sistema si se conocen en un momento dado las condiciones de los elementos que lo constituyen. Las ecuaciones que empleaba la Física clásica para expresar sus leyes, tanto las que se referían a los equilibrios como las que expresaban los procesos dinámicos,

---

aspectos culturales, sociales e históricos del desarrollo de las Matemáticas; Philip Kitcher-"The Nature of Mathematical Knowledge", New York/Oxford: Oxford University Press, 1983 como perspectiva general del campo temático con singular atención a algunos puntos (e.g. la discusión del presunto estatuto a priori del conocimiento matemático, el cambio histórico en Matemáticas, la rigorización) y Mary Tiles-"Mathematics and the Image of Reason", London/ New York: Routledge, 1991 una síntesis histórica-filosófica apropiada.

[5] (hacia 428 a.C. al 347 a.C.), filósofo griego, uno de los pensadores más originales e influyentes en toda la historia de la filosofía occidental. La figura de Platón resulta indispensable para la comprensión de la historia del pensamiento occidental así, tras el regreso a Atenas, después de su primer viaje, Platón funda en el año 387 a.C. la Academia, en un bosque cercano a Atenas dedicado al héroe *Akademos*, la Academia está pensada según el modelo de las sedes pitagóricas de las cuales es heredera. La Academia se convirtió en la sede de la matemática griega donde brillaron hombres como Teeteto y Eudoxo de Cnido (400-347 a.C.). En su frontispicio figuraba la siguiente inscripción: «Nadie entre aquí sin saber geometría». El estudio de las diferentes partes de las matemáticas (geometría, aritmética y teoría de los números) constituía la propedéutica necesaria a la dialéctica.

[6] Ver la nota 8, para una mejor comprensión de las palabras de Platón.

[7] **"Mente y cerebro"**, Siglo XXI, 1985, México.

tenían una forma que implicaba relaciones causales precisas y rigurosa entre sus variables; eran, por lo tanto, compatibles con las formulaciones filosóficas del principio de causalidad. El mundo era entonces un enorme sistema, magnífico organismo en el que sus partes se entretejían hacia la totalidad. Dicha idea, el orden, tuvo en Anaximandro[8] su principal expositor.

Para éste, el principio de todas las cosas está en el apeirón, lo indeterminado; de él surge el mundo, al que por primera vez llama cosmos[9], orden, término que hasta entonces había tenido un sentido social o, como en Homero, a la formación de hermandades en la lucha armada. Esta noción de orden había surgido después que varias generaciones, en todo el mundo antiguo, habían presenciado el carácter cíclico de los movimientos celestes. Todo esto despertó en el hombre antiguo, la creencia de una certeza en los acontecimientos de los cielos y la búsqueda de un lenguaje que la describa y de principios que la expliquen.

"De la naturaleza de las cosas", obra cumbre de Lucrecio[10], se presenta como un tratado de física atomista. Usualmente hemos visto en él un texto donde prima lo absurdo y, por tanto, sólo es posible una lectura metafórica, interpretándolo como un poema filosófico. Hoy esta conclusión no es tan categórica, se trata de suspender la oposición entre ciencia y poesía.

El universo lucreciano se inicia en el caos, un estado donde sólo existe el desorden en la materia y la energía, un paisaje donde sólo existen elementos sólidos que se desplazan en un medio fluido. Dos modelos coexisten: la catarata de átomos que caen libremente en el vacío, fluyendo a lo largo de trayectorias paralelas, y la nube caótica,

---

[8] Anaximandro de Mileto, hijo de Praxíades, compañero y discípulo de Tales, según las *Crónicas* de Apolodoro (D. Laercio-"Vidas de los filósofos más ilustres", Ed. Biblioteca Clásica (trad. José Ortiz), 1972, Ed. Orbis, Barcelona 1985) tenía sesenta y cuatro años en el segundo año de la Olimpíada 58 (547-46 a.C.) y murió poco después. De acuerdo con esta datación, Anaximandro habría nacido en torno al año 610-609, fecha que coincide con la noticia de Hipólito ("Hippolyti Refutationis Omnium Haeresium Librorum Decem quae supersunt", Ed. L. Duncker - F.G. Schneidewind, Gotinga 1859, Ed. Patricius Cruice, Paris 1860) que fija su nacimiento en el tercer año de la Olimpíada 42. Se puede pues, situar la vida de Anaximandro entre el 610-609 y el 545 a.C..

[9] Pudiera suscitar algunas dudas el uso del término cosmos en Anaximandro, dado que los textos a él atribuidos proceden de comentadores muy posteriores, a partir de Aristóteles, sin embargo lo mantenemos apoyándonos en los helenistas que suelen suponer que este término ha pasado por la siguiente evolución en filosofía: (i) orden y disposición, ornamento (siglo VI a.C.); (ii) el orden en el mundo; (iii) el mundo con un orden (siglo V a.C.); (iv) el mundo o el universo en general (2da mitad del siglo V a.C.), de modo que el lenguaje de la época de Anaximandro más bien consideraría el (i), mientras que los otros sentidos irían apareciendo posteriormente, e.g. a partir de Heráclito y de Anaxágoras.

[10] Tito Lucrecio Caro fue un poeta y filósofo romano (hacia 98 a.C. al 55 a.C.), contemporáneo de Julio Cesar y Cicerón. Fue un seguidor de Epicuro y de los atomistas griegos y en su poema "De rerum natura" (De la naturaleza ...) expuso una visión mecánica del Universo recogiendo y embelleciendo las ideas de estos. Aunque el interés de Lucrecio no era el problema físico, sino la exposición de una filosofía determinada, en su obra hace una descripción de la Naturaleza y expone sus teorías sobre el comportamiento de la materia: el viento el calor, el frío, el fuego, el color de las cosas, el trueno y los relámpagos, los volcanes, etc. Brevemente, para Lucrecio, toda la Naturaleza se compone de dos cosas *"... los cuerpos y el vacío en el que estos están situados y en cuyo seno se mueven..."*. Siguiendo las ideas de Demócrito, Lucrecio además sostuvo que todos los cuerpos estaban formadas por átomos. De forma que todo el Universo estaría formado exclusivamente por átomos y espacio vacío, y así *"las cosas no pueden surgir de la nada y, si han surgido, no pueden volver a la nada"*.

masa desordenada, fluctuante, de disimilitudes y oposiciones, de intervalos sin eventos, de colisiones al azar.

La Mecánica es la más antigua de las ciencias físicas. Los escritos más antiguos que se registran acerca de esta materia, son los de Arquímedes (287-212 a.C.) referentes al principio de la palanca y al principio del empuje[11]. A la formulación de las leyes de la composición vectorial de fuerzas dada por Stevin (1548-1620), aguardaba un progreso sustancial y el mismo autor enunció la mayoría de los principios de la Estática. El primer estudio de un problema dinámico se debe a Galileo (1564-1642) y se refiere a los experimentos sobre la caída de los cuerpos, aunque debemos considerar un precursor importante Copérnico (1473-1543), quien con su sistema heliocéntrico, sentó las bases de una nueva ciencia la Mecánica Celeste[12].

Históricamente, la integración antecedió a la diferenciación por, prácticamente, dos mil años. El antiguo método griego de exhaución y las medidas infinitesimales de Arquímedes[13],

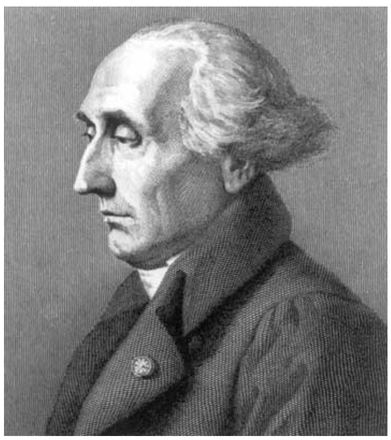
[11] Puede que un "rigorista" alegara que Arquímedes trata más bien con la estática matemática y puede que si se tomara "mecánica" en un sentido genérico, serían anteriores algunas ideas de Aristóteles y quizás un escrito de la escuela aristotélica sobre "Problemas -o cuestiones- físicos -o mecánicos"-, nuestra afirmación se basa en que Arquímedes es el principal sistematizador de estos estudios en la antigüedad y la aplicación de estos a problemas geométricos y estáticos (¡mecánicos!); puede consultar al respecto Arquímedes-"El Método", Alianza Editorial 1151, Madrid, 1986 (introducción y notas de Luis Vega). Por otra parte, no soy el único en proclamar la existencia de un mecánico en los tiempos griegos, en J. R. Pastor y J. Babini-"Historia de la Matemática", Vol.I, Editorial Gedisa, Barcelona, p.62 se afirma: *"...Arquitas de Taras (Tarento), estadista y científico que se ocupó de Mecánica Teórica y práctica (autómatas), de aritmética (progresiones y proporciones) y de geometría…"*; si faltaran otras razones para clasificar a Arquímedes como el primer mecánico, puede consultar detalles adicionales en J.R. Pastor y J. Babini- Ob. Cit., pp.89-97.

[12] Sir Arthur Eddington observaba que uno de los grandes misterios del Universo consiste en que todo en él rota. En la época del astrónomo polaco, la astronomía geocéntrica llevaba reinando más de mil años, cierto es que prelados instruidos advertían que la Semana Santa llegaba demasiado pronto en el calendario anual y unos pocos astrólogos sabían que la posición de los planetas divergía a veces, en varios grados, de la que podía preverse con las tablas de Ptolomeo. El sistema heliocéntrico (que se remonta a Aristarco de Samos en el siglo III a.C.) resolvió estas y otras dificultades y la publicación de la obra de Copérnico "De revolutionibus orbium coelestium" (1543), abrió el camino de la verdad celeste por la que transitarían más adelante Kepler, Galileo, Newton, Poincaré y muchos más.

[13] Para detalles adicionales recomendamos el sitio de Historia de la Matemática de la Universidad de St Andrews en Escocia http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/The_rise_of_calculus.html; el sitio http://www.math.unifi.it/archimede/archimede_inglese/mostra_calcolo/prima.html donde se muestra el desarrollo del calculus según los libros de Matemática; la página personal de Don Allen http://www.math.tamu.edu/~don.allen/history/transit/transit.html; y los textos Baron, Margaret E.-"The origins of the infinitesimal calculus", Pergamon-Press, Oxford-Edinburgh-New York, 1969; Howard, A.-"Calculus: A New Horizon", 6th ed., New York: Wiley, 1999; Apostol, Tom M.; Chrestenson, H.E.; Ogilvy, C.S.; Richmond, D.E.; and Schoonmaker, N.J.-"A Century of Calculus", Part I: 1894-1968. Washington, DC: Math. Assoc. Amer., 1992; Apostol, Tom M.; Mugler, D.H.; Scott, D.R.; Sterrett, A. Jr.; and Watkins, A.E.-"A Century of Calculus", Part II: 1969-1991. Washington, DC: Math. Assoc. Amer., 1992; Boyer, Carl B.-"A History of the Calculus and its Conceptual Development", New York: Dover, 1989; Edwards, Charles Henry-"The Historical Development of the Calculus", New York: Springer-Verlag, 1994; Hahn, Alexander-"Basic Calculus: From Archimedes to Newton to Its Role in Science", New York: Springer-Verlag, 1998; Simmons, George Finlay-"Calculus Gems: Brief Lives and Memorable Mathematics", New York: McGraw-Hill, 1992; Toeplitz, Otto-"The Calculus: A Genetic Approach", Chicago, IL: University of Chicago Press, 1963;

representan ejemplos antiguos de procesos límites de sumas integrales, pero no fue hasta el siglo XVII que Fermat, encontró las tangentes y los puntos críticos por métodos equivalentes a la evaluación de cocientes incrementales. El descubrió la naturaleza inversa de estos dos procesos, junto con la consecuente explicación de la anti-derivación en la determinación límite de sumas. La diferenciación, tanto inversa como directa, convirtió el algoritmo básico en una nueva y poderosa parte de la matemática. La integración fue tomada como "la memoria de la derivación" y no fue hasta 150 años más tarde, que la atención se dirigió directamente al concepto de sumación en el cálculo[14].

Hacia finales del siglo XVII y principios del siglo XVIII, la concepción que se tenía del Universo cambia, debido en gran medida, a los aportes tanto matemáticos como metodológicos, de ese genio singular que fue Isaac Newton (1642-1727). Se ve que la Naturaleza tiene una serie de regularidades que se pueden analizar y predecir; de hecho, la ciencia en el siglo XVIII estableció tantas leyes que gobiernan fenómenos naturales, que muchos pensaron que era poco lo que quedaba por descubrir. La tarea de los científicos era, dilucidar las repercusiones de estas leyes en el ámbito de los fenómenos particulares.



En 1750 Lagrange[15] tomó las ideas dinámicas de Euler y produjo una reformulación de la Dinámica. Dos ideas importantes se desprenden de su trabajo: la primera, fue el principio de conservación de la energía y la segunda, el introducir coordenadas generalizadas en el formalismo de la Mecánica, formalismo que le permitió interpretar la Mecánica desde diversos puntos de vista de la Matemática, posibilitándole obtener sus famosas ecuaciones diferenciales para describir la evolución de los sistemas mecánicos. Más tarde, William Rowan Hamilton (1805-1865) reformuló la Dinámica de un sistema, logrando una mayor generalidad, para ello, utilizó los principios del cálculo variacional y dotó a la Mecánica Teórica de una concepción intrínseca que superaba a la desarrollada antes por Lagrange. La Formulación Hamiltoniana de la Mecánica, tiene como referente a la anterior Formulación Lagrangiana, considerando como variables independientes no solamente las coordenadas generalizadas, sino también los momentos o ímpetus asociados, definiendo lo que Hamilton llamó el Espacio de la Fases.

La función principal de Hamilton, o hamiltoniana, tiene una forma relacionada con la función principal de Lagrange, suma de los productos de cada ímpetu por la velocidad menos la función lagrangiana, pudiendo, con ella obtener unas ecuaciones de evolución de los sistemas mecánicos mucho más potentes que las ecuaciones de Lagrange, es decir,

[14] Thomas Hawkins-"Lebesgue's theory of integration. Its origins and development", The University of Wisconsin Press, Madison, Wis.-London, 1970.

[15] Detalles de la vida y obra de Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) matemático francés, considerado uno de los dos matemáticos más grande del siglo XVIII, pueden ser encontrados en http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Lagrange.html principalmente.

definió nuevas variables, los momentos, a partir del lagrangiano; luego reescribió el lagrangiano en términos de las variables originales y los momentos, tomándolas como variables independientes.

Este doble carácter de la Mecánica Analítica, teoría de los sistemas mecánicos y ciencia puramente matemática[16], la convierte en medio natural donde resulta posible el proceso de conversión de "lo mecánico" en "lo matemático". De esta manera, los estímulos `externos', provenientes de la Mecánica, del desarrollo de la matemática, se convierten en factores `internos' de este desarrollo. Se pensó entonces, que la Naturaleza era posible describirla con un conjunto pequeño de leyes. Estas leyes, como regla general, eran establecidas en términos de ecuaciones diferenciales. Dado un estado natural del sistema en un tiempo determinado y las leyes que lo describen, se consideraba que en principio se podía determinar con toda precisión, todo estado futuro.

Por desgracia, estas consideraciones de carácter general, pronto mostraron su debilidad al intentar reducir las divergencias entre la teoría y la práctica. El uso de la teoría newtoniana para calcular las órbitas planetarias, requirió mucho trabajo y esfuerzo, por parte de los más grandes científicos de los siglos XVIII y XIX, desde Euler a Lagrange, pasando por Laplace y Hamilton, y culminando con Poincaré. Todos estos aportes vinieron a conformar lo que se conoció con el nombre de Mecánica Celeste y que como decíamos antes, fue anticipada por Copérnico[17]. Esta disciplina tendría como objetivo, estudiar uno de los problemas más difíciles de la Física y las Matemáticas, el llamado Problema de los N Cuerpos (en nuestro caso el Sol y los planetas) que interactúan gravitacionalmente[18].

Retornemos a Newton ...éste presentó sus leyes en forma matemática, las llamadas Leyes (más bien, ecuaciones) de Newton que, junto con la ley de la gravitación universal, fueron suficientes para describir el movimiento de los cuerpos del Sistema Solar.

---

[16] Cornelius Lanczos, matemático y físico húngaro, nacido el 2 de Febrero de 1893 en Székesfehérvár, y fallecido el 25 de Junio de 1974 en Budapest. Detalles adicionales de su vida y obra se encuentran en http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Lanczos.html), para detalles más técnicos es conveniente "Cornelius Lanczos: Collected Published Papers and Commentaries", editors: W.R. Davis, M. Chu, P. Dolan, J. R. McConnell, L. K. Norris, E. Ortiz, R. J. Plemmons, D. Ridgeway, B. K. P. Scaife, W. J. Stewart, J. W. York, Jr., W. O. Doggett, B. M. Gellai, A. A. Gsponer, C. A. Prioli, North Carolina State University, Raleigh, 1998.

[17] Ver nota 12.

[18] La presentación completa del problema, excede los propósitos de este trabajo, no obstante, los lectores interesados pueden consultar (entre otros) Abraham, R. and Marsden, J.-"Foundations of Mechanics", Benjamin/Cummings, Reading, MA, 1978; Arnold, V.I.-"Mathematical Methods of Classical Mechanics", Springer Verlag, New York, Graduate Texts in Mathematics, vol 60, 1978; Brouwer, D. and Clemence, G.M.-"Methods of Celestial Mechanics", Academic Press, New York, 1961; Devaney, R.-"Collision orbits in the anisotropic Kepler problem", Inventions Math. 45 (1978), 221-251; Devaney, R.-"Singularities in Classical Mechanics Systems", In Ergodic Theory and Dynamical Systems I, Birkhauser, Boston, 1981, 211-333; Devaney, R.-"Transverse heteroclinic orbits in the anisotropic Kleper problem", in the Structure of Attractor in Dinamical Systems, Springer-Verlag Lecture Notes in Math. Nº 668, New York Springer-Verlag (1978), 67-87; Devaney, R.-"Morse-Smale singularities in simple mechanical systems", J. Differential Geom., 15 (1980), 285-305; Siegel, C.L., and Moser, J.K.-"Lectures on Celesteial Mechanics", Springer-Verlag, Berlin, 1971; Szebehely, V.-"Theory of orbits, the restricted problem of three bodies", Academic Press, New York, 1967; Wodnar, K.-"New formulations of the Sitnikov problem, Predictability, Stability, and chaos" in N-Body Dynamical Systems (A.E. Roy, ed.), Plenum Press, 1991 y Wodnar, K.-"Analytical aproximations for Sitnikov's problem. From Newton to Chaos", Edited by A.E. Roy and B.A. Steves, Plenum Press, New York, 1995.

Las ecuaciones de Newton, al tomar en cuenta las fuerzas gravitacionales entre tres cuerpos, no han podido ser resueltas en forma exacta hasta el día de hoy. Por tanto, no se puede describir y precisar la trayectoria que seguirá cada cuerpo, con precisión ilimitada y durante todo el tiempo.

El problema se vuelve mucho más complicado si se añade otro planeta más; y cada vez que se añade otro el asunto se complica todavía más. Lo mejor que se ha podido hacer es calcular, en primer lugar, los efectos más importantes, como el de la influencia preponderante del Sol, y luego, paso a paso, ir tomando en cuenta las influencias, menos importantes, de los demás planetas. Se tiene la esperanza de que este tipo de aproximaciones vaya llevando gradualmente a la solución exacta. Sin embargo, al aplicar este procedimiento al Sistema Solar resulta que se requieren cantidades extraordinarias de cálculos, lo que limita su utilidad como instrumento matemático. Por ejemplo, si se desea saber qué ocurriría con el Sistema Solar dentro de algunos miles de millones de años o mirar hacia atrás, para tratar de descubrir sus orígenes.

No obstante, para fines del siglo XIX se había alcanzado un grado tal de precisión en estos estudios, que el descubrimiento de una discrepancia de menos de un minuto a lo largo del siglo, en el movimiento aparente de Mercurio[19], provocó una crisis de tal magnitud, que desembocó, a los pocos años, en la Teoría Especial de la Relatividad[20].

A fines del siglo XIX la Ciencia se mueve entre dos distintos paradigmas para la modelación matemática. Uno, el ya conocido, era el del análisis por medio de las ecuaciones diferenciales que en un principio determinan la evolución del Universo, pero que en la práctica sólo se aplica a problemas simples y bien estructurados. El segundo era el análisis estadístico que representaba una aproximación burda del movimiento de sistemas complejos. Estos dos paradigmas habían alcanzado respetabilidad en el mundo científico de la época.

Y sin embargo, en la práctica había ciertos problemas que rehusaban someterse a este esquema, ya sea porque la ecuación diferencial no tenía solución en cuadraturas y

---

[19] A fines del siglo XIX, el matemático francés Urbain Jean Joseph Le Verrier (1811-1877) se interesó en calcular el movimiento de precesión del perihelio de Mercurio usando las leyes de Newton, y encontró que sumando las perturbaciones ocasionadas por los demás planetas, éste debía ser de 574 segundos de arco por siglo. Sin embargo, las mediciones demostraban que la precesión del perihelio de Mercurio era de 531 segundos de arco por siglo. ¿A qué atribuirle, entonces, la diferencia de 43 segundos de arco por siglo? Le Verrier rápidamente se convenció que la explicación de esa diferencia era la existencia de otro planeta aún no descubierto en la vecindad inmediata del Sol. La búsqueda de ese hipotético planeta, al que se denominó Vulcano, fue muy distinta a la que se llevó a cabo en el caso de Neptuno, planeta al que Johann Gottfried Galle y Louis d'Arrest localizaron basándose en los cálculos realizados independientemente por Le Verrier y el inglés John Couch Adams, tomando en cuenta las perturbaciones que causa en la órbita de Urano. Vulcano, de cuya existencia poco se dudaba por entonces, fue buscado persistentemente en la posición predicha por los cálculos de Le Verrier. En más de una ocasión se reportó su descubrimiento, pero en ningún caso esto pudo confirmarse. La infructuosa búsqueda prosiguió hasta principios del siglo veinte, cuando finalmente se encontró una explicación inesperada, no para Einstein, de la precesión del perihelio de Mercurio.

[20] Por todo lo señalado antes, mantengo esta posición a pesar que hay historiadores que piensan que la anomalía del perihelio de Mercurio sólo alcanzó a tener cierta significación crucial a la luz de la Teoría de la Relatividad, i.e., como confirmación predictiva empírica de esta teoría frente a la mecánica celeste clásica, sin tener en cuenta que fue uno de los tantos hechos acumulados que reflejaban el "indeterminismo" de la mecánica determinística en boga.

había que conformarse con soluciones aproximadas, o porque la gran cantidad de ecuaciones involucradas hacía imposible el conocimiento de la solución del sistema. Esto apuntaba a que posiblemente nuestro conocimiento y predicción de los fenómenos podían estar vedados en ciertas situaciones que no correspondieran a simplificaciones de la realidad, lo cual es la mayoría de los modelos estudiados. Así ocurrió con la Astronomía y su intento de predecir con toda exactitud eclipses y movimientos de planetas. Afortunadamente, Poincaré y Liapunov apuntaron, la dirección en que muchos de estos problemas debían ser tratados: la Teoría Cualitativa.

Ocurre en la práctica, que numerosos problemas pueden ser matematizados por medio de ecuaciones diferenciales periódicas (o bien autónomas) -pensar por ejemplo en oscilaciones de electrones, latidos de corazón, satélites artificiales, pulsaciones de objetos estelares,...- para los cuales se desea producir o impedir la aparición de fenómenos periódicos.

El estudio de la existencia de soluciones periódicas, incluso en el caso lineal, está lejos de ser trivial y se encuentra íntimamente ligado a numerosos problemas interesantes de la Matemática y que sobrepasan con creces los límites de la teoría de las ecuaciones diferenciales. Estas consideraciones justifican la gran cantidad de trabajos dedicados, por parte de muchos matemáticos, al estudio del problema antes planteado.

Queremos apuntar aquí, la célebre frase de Poincaré: *"Lo que hace que estas soluciones periódicas sean tan apreciadas es que son, por así decirlo, la única brecha por donde podemos intentar penetrar en un lugar considerado hasta aquí inabordable"*.

Si volvemos al Problema de los N Cuerpos, vemos que antes del advenimiento de las computadoras modernas, se partía de suponer aproximaciones plausibles que daban las predicciones de las posiciones planetarias con un nivel de precisión deseado. Sin embargo, si se quería lograr una mayor precisión había que hacer un número mayor de cálculos. En la actualidad, teniendo a nuestra disposición una capacidad de cálculo impresionante, se pueden obtener resultados antes imposibles.

Sin embargo, estos cálculos han demostrado también lo que Poincaré entendió pero no pudo probar: que las ecuaciones formuladas por Newton contienen una riqueza tal que el mismo Newton y los científicos que le siguieron no fueron capaces de extraer; se ha demostrado que engloban no sólo lo predecible sino también comportamientos caóticos. La naturaleza de las ecuaciones de Newton refleja el comportamiento de los sistemas físicos, en los que se puede pasar de un tipo de movimiento aparentemente ordenado, periódico y predecible a uno irregular e impredecible, esto es, caótico. Las ecuaciones que rigen los movimientos de un sistema de 3 cuerpos son no lineales. También lo son en el caso de 4, 5 o más cuerpos.

Una primera mirada a la historia del problema de la Estabilidad del Sistema Solar nos lleva hasta Pierre-Simon Laplace (1749-1827) quien dedicó mucha parte de su vida a estudiar la estabilidad de los planetas. Su "Treatise on Celestial Mechanics" es un compendio del conocimiento sobre la dinámica planetaria en su tiempo. Utilizó la teoría de las perturbaciones para mostrar que el movimiento de los planetas era cuasiperiódico, i.e., si se graficaba en el espacio de fases las trayectorias estaban sobre la superficie de un toro. Sin embargo, la solución obtenida por Laplace era en forma de series y, para que fuera una

demostración rigurosa, válida y utilizable, se requería demostrar la convergencia de las series[21].
Años después, Poincaré demostró que para la mayoría de los casos las series divergen[22]. Pese a esto, Poincaré perseveró en el estudio introduciendo el concepto de Espacio de Fases, diferente de la concepción lagrangiana, en el cual las soluciones son representadas por órbitas. Como innovación adicional, analizó "cortes" del espacio de fases en lugar de analizar el espacio completo. Con esta aproximación, Poincaré estableció los principios para una nueva aproximación a los sistemas dinámicos, que posteriormente permitiría el estudio de caos.
Una de las pocas personas que se preocuparon por explorar el abismo que Poincaré había develado fue George David Birkoff, quien dio pruebas rigurosas de muchas de las conjeturas de Poincaré Más aún, fue el primero en explorar las propiedades de los atractores.
Vladimir Arnold, de la antigua URSS, realizó una contribución muy importante al problema de la estabilidad del Sistema Solar demostrando que un sistema solar ideal, compuesto exclusivamente por planetas pequeños, es estable. Desdichadamente, nuestro Sistema Solar no satisface estas condiciones, sin embargo su trabajo, junto al de Kolmogorov y Moser, han permitido arrojar luz sobre ésta y otras cuestiones.
Sin embargo, todas estas aproximaciones eran analíticas. Se basaban en el uso de expresiones algebraicas. Sin embargo, con la aparición de la computación, se abrió la posibilidad de trabajar con un nuevo enfoque: los métodos numéricos. En este nuevo enfoque, se parte de ecuaciones analíticas, pero el trabajo se realiza numéricamente utilizando el computador como herramienta principal. De esta manera los investigadores pudieron simular millones de años en el futuro.
A pesar de esto, la capacidad computacional disponible no permitía un estudio muy detallado del Sistema Solar y los primeros estudios se limitaban a trabajar con los planetas exteriores solamente. Sin embargo, antes de 1983 habían logrado proyectar el Sistema Solar 5 millones de años al futuro.
En 1980 Gerald Sussman, Ingeniero Eléctrico del MIT, quien en 1971 había tomado un curso de *Dinámica estelar y estructura de galaxias* con Alar Toomre, viaja a Caltech durante su sabático para trabajar con Peter Goldreich. El interés de Goldreich en esa época era la dinámica de los objetos del sistema solar. Jack Wisdom, estudiante de Goldreich, había terminado su tesis sobre la resonancia 3:1 del cinturón de asteroides y, afortunadamente, había conseguido trabajo en el MIT y se había trasladado allí cuando Sussman llegó.
Sussman leyó la tesis de Wisdom y, como experto en computación, le preocupó la aproximación que había sido utilizada. Decidió realizar el proceso de integración el mismo,

[21] Con este tratado, monumental obra en 5 volúmenes publicados entre 1799 y 1825, se culmina el trabajo de más de un siglo de duración durante el cual los científicos intentaron dar una explicación matemática de la teoría de la gravitación universal basada en los principios de Newton. Laplace reúne en un sólo cuerpo, de doctrina homogénea, todos los trabajos dispersos de Newton, Halley, Clairaut, D'Alembert, Euler, etc.
[22] En realidad, esa fue la respuesta de Poincaré a un llamado a concurso convocado por el Rey Oscar II de Suecia, en 1885. Hubo que esperar hasta mediados del siglo XX, con la Teoría KAM (ver más adelante) para tener una respuesta completa de este asunto.

pero se encontró con el problema del acceso a la capacidad de cómputo requerida. Aprovechando sus conocimientos, diseño un computador de propósito específico: calcular órbitas planetarias. Lo denominó *Digital Orrery*.

El primer proyecto fue revisar el trabajo de Wisdom sobre la resonancia 3:1 del cinturón de asteroides. Gracias al Digital Orrery confirmaron el trabajo de Wisdom rápidamente. Decidieron repetir los cálculos para Plutón durante un intervalo de tiempo más largo. Para esto debieron corregir errores de redondeo y estimar un tamaño de paso que minimice el error. Encuentran que 32.7 días es el más adecuado y proyectan el Sistema Solar 845 millones de años al futuro, utilizando 5 meses para realizar los cálculos.

En esta nueva proyección, los planetas gigantes conservan su regularidad, pero descubren nuevas resonancias en la órbita de Plutón. Descubren cambios periódicos que ocurren cada 3.4, 34, 150 y 600 millones de años. Sin embargo, Plutón permanece en su órbita alrededor del Sol y no hay cambios significativos en la excentricidad.

Con el fin de tener una estimación de la caoticidad más precisa, se calcularon los Exponente de Lyapunov. Encontraron que la distancia entre dos órbitas con condiciones iniciales muy similares se duplica cada 20 millones de años, un intervalo de tiempo muy corto en términos astronómicos. Esto indica que Plutón es caótico.

Contrario a la interpretación intuitiva de la noción de caos, esta no implica una catástrofe. Simplemente significa que no es posible predecir a mediano y largo plazo la evolución del sistema. Plutón, independiente del hecho de que esté en una zona de caos, es muy probable que sobreviva muchos años en el futuro sin cambios significativos.

En 1989 un grupo en la universidad de Londres utilizó una Cray para simular la evolución de los planetas exteriores 100 millones de años hacia el futuro. Dicho proyecto se conoció como LONGSTOP. Nuevamente los gigantes gaseosos se mostraron estables.

El Digital Orrery fue utilizado hasta 1990 y luego lo donaron al Smithsonian donde se exhibe actualmente. Posteriormente, en 1991, Wisdom y Holman corrieron el modelo para 1.000 millones de años y confirmaron que Plutón es caótico.

Mientras Sussman y Wisdom hacían sus primeros trabajos, Jacques Laskar, del *Bureau des Longitudes* de Francia, estaba trabajando con una aproximación diferente. Él estaba interesado en las variaciones que había sufrido la órbita de la Tierra. Rápidamente decidió que era imposible continuar con una aproximación analítica y generó un modelo simplificado con 150.000 términos algebraicos.

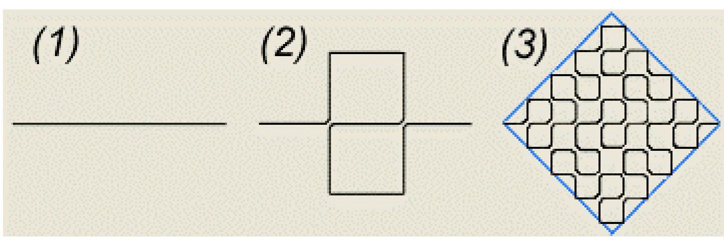
En su simulación incluyó todos los planetas menos Plutón y sorpresivamente encontró que el Sistema Solar era caótico. El exponente de Lyapunov indicaba que la distancia entre dos trayectorias se duplicaba cada 3.5 millones de años, lo que quiere decir que en un intervalo de 100 millones de años dos trayectorias con condiciones iniciales muy similares son totalmente diferentes. Nuevamente, esto no implica catástrofes, sólo problemas para predecir a mediano y largo plazo.

La publicación de los resultados de Laskar fue muy criticada y se vio en la necesidad de proponer explicaciones a la caoticidad del Sistema Solar. Propuso que las resonancias causantes del problema son Marte-Tierra y Mercurio-Venus-Júpiter.

El trabajo de Laskar fue parcialmente corroborado por Martin Duncan (Queen’s University, Canadá), Tomas Quinn (Oxford) y Scott Tremaine (Universidad de Toronto), quienes

utilizaron una aproximación completamente diferente obteniendo los mismos resultados para los primeros seis millones de años. En particular, encontraron las mismas resonancias.
En su simulación involucraron los nueve planetas y realizaron correcciones relativistas y correcciones debido al tamaño finito de la Tierra y la Luna. Debido a la magnitud del problema no pudieron simular más tiempo.
En 1992 Sussman y Wisdom, quienes contaban con un sucesor de Digital Orrery llamado Toolkit, realizan una simulación que involucra los 9 planetas sin simplificaciones. Confirmaron el resultado de Laskar: el sistema solar es caótico, de una manera más precisa, en el Sistema Solar hay regímenes de orden y de caos. La conclusión de estos estudios es que más allá de varios miles de años no se puede predecir las posiciones que tendrán los planetas, y en particular la Tierra. Este tema es de activa investigación en la actualidad. Entre las cuestiones que se estudian se halla la relación entre caos y estabilidad. Puede ser posible que, a pesar de que no se puedan hacer predicciones precisas para muchos millones de años, la caoticidad de los movimientos de los cuerpos del Sistema Solar sea limitada.
Retornando a los inicios de la Teoría Cualitativa, tenemos que Poincaré y Bendixon demostraron que para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de dos dimensiones, el comportamiento de las soluciones se puede clasificar geométricamente en cuatro casos relativamente sencillos. En nuestros días, y gracias al uso de las computadoras, al intentar clasificar y entender las representaciones gráficas de la dinámica de un sistema que se mueve en tres dimensiones aparece ante nosotros una fuente de formas exóticas que se han denominado fractales, entes con dimensión fraccionaria, no entera[23].

3. Presencia Actual. Euclides en el siglo III a.C., edificó su geometría a partir de la intuición. Los conceptos básicos se adaptaban a la experiencia sensible, dependiendo del grado de aproximación de las formas y extensiones que el hombre podía percibir directamente.



Curva de Peano

Las ideas simples de recta y plano, o de otras figuras elementales de la geometría tradicional, no tendrían interpretación en la Naturaleza vista con detalles más amplios, como tampoco existiría la regularidad y la armonía de los movimientos de los cuerpos celestes si se pudieran contemplar, condensados, a través de miles o millones de años. Si se mide la longitud de una costa en kilómetros, despreciando pequeñas irregularidades, se obtiene un valor finito y una forma dibujable en un mapa corriente a una escala no

[23] En 1975, Benoit B. Mandelbrot publicó un ensayo titulado “Les objets fractales: Forme, hasard et dimension” Editorial Flammarion. Paris. En la introducción de la citada monografía se puede leer *"El concepto que hace de hilo conductor será designado por uno de los dos neologismos sinónimos “objeto fractal” y “fractal”, términos que he inventado, ..., a partir del adjetivo latino “fractus”,..."*

demasiado grande. Pero si se intenta medir o dibujar la misma costa con precisión de milímetros o unidades menores, teniendo en cuenta todos los pequeños entrantes y salientes, se obtiene una curva completamente irregular, es decir, lo que en un mapa ordinario es una curva regular y simple, en la realidad, si se toma una escala mucho mayor, resulta un continuo de zig-zags con pequeños segmentos de longitud tendiente a cero, y con una longitud total tendiente a infinito[24].

Todo esto hace que hoy se piense en una nueva geometría, cuyos objetos se presentan muy irregulares y los sucesos poco o nada predecibles (sistemas caóticos). Es la llamada *geometría fractal*, de la que vamos a dar algunas ideas generales. El nombre de fractal procede de que estudia conjuntos de puntos para los cuales se puede definir, de cierta manera, una dimensión fraccionaria, dimensión que-permite medir el, grado de complejidad del conjunto, variando desde las curvas corrientes de dimensión uno, hasta curvas que llenan áreas del plano, de dimensión dos. También se han estudiado fractales en espacios de más dimensiones, pero aquí no los vamos a considerar[25].

Los fractales aparecen muchas veces como iteración de procesos geométricos regulares, al estilo clásico, pero que al repetirse sucesivamente van complicando su forma. Los modelos de estas repeticiones son solamente realizables a través de computadoras, que pueden operar con números grandes y con muchas cifras decimales. Por esto los fractales están muy unidos al uso de las computadoras y es a través de ellas que se están estudiando en su gran variedad de forma que, a su vez, dan lugar a muchos interesantes y difíciles problemas teóricos.

No es casual que la propiedad fractal, resulte ser una medida de la complejidad de la órbita, de un movimiento. Lo interesante radica en que dicha complejidad, aunque asociada a un sistema completamente determinado por una regla matemática, hace que sea, prácticamente imposible, predecir el comportamiento del sistema a largo plazo. Recordemos, que en 1955 el matemático americano Hassler Whitney (1907-1989) publicó el artículo “Mappings of the plane into the plane”, donde expuso las bases de una nueva teoría matemática- La teoría de Singularidades de Aplicaciones Suaves[26], ésta no es una teoría axiomática como otras en las que se considera un cierto espacio que verifica unos ciertos axiomas. Por el contrario, el término "singularidad" se utiliza a menudo en distintas ramas de las Matemáticas como Análisis, Topología Diferencial, Sistemas Dinámicos, Geometría Algebraica... para designar cosas distintas, por ejemplo, singularidad de una aplicación diferenciable, singularidad de una ecuación diferencial, singularidad de una variedad algebraica... Sin embargo, en todos los casos, la palabra singular refleja una situación que es contraria a algo que se entiende como regular.

A mediados de los años 60, comienza a hablarse del libro de René Thom (1923-2002) “Stabilité Structulle et Morphogénèse”, que apareció en forma acabada en 1972 y que

---

[24] Este es el primer ejemplo de "fractal" propuesto por Mandelbrot, ver la traducción castellana “Los objetos fractales”, Editorial Tusquets, Barcelona, 1988 y “The fractal geometry of Nature”, W. F. Freeman, N. York, 1983.

[25] Ver Mandelbrot (1983).

[26] Detalles sobre la vida y obra de Whitney pueden consultarlos en http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Whitney.html.

rápidamente despertó la atención e interés de todos por una teoría conocida ahora como Teoría de las Catástrofes. La teoría de las catástrofes de Thom representó a su vez, un vigoroso intento de integrar el desorden del cambio y la ruptura en el orden, según lo describe el propio creador *"Se trata de una metodología o acaso de una especie de lenguaje (que) se esfuerza por describir las discontinuidades, que pudieran presentarse en la evolución del sistema".*

La necesidad de la Teoría de las Catástrofes de dar explicación y razón de las discontinuidades, provenía de la experiencia de las discontinuidades en el comportamiento y evolución de los sistemas vivos. La teoría de catástrofes es una teoría eminentemente cualitativa, que sólo pretende obtener un orden de comprensión en el desorden de la discontinuidad. En esta misma línea de ambivalencia con relación al determinismo está la teoría de los objetos fractales de Benoit Mandelbrot, que pretende construir una geometría de la discontinuidad y las turbulencias, una morfología del caos.

Thom propuso utilizar la teoría topológica de los sistemas dinámicos, para la modelación de diversos fenómenos de crecimiento y desarrollo en diversas ramas, principalmente la biología. El señaló que bajo algunas condiciones exigidas, se deduce que el estudio de diversos sistemas se puede describir, localmente, mediante algunas formas elementales standard llamadas, catástrofes elementales.

Desde los años setenta este discurso de Rene Thom que apuntaba a una nueva ciencia, a la que él llamó Semiofísica, la física de las formas significantes, cobró gran impulso sobre todo porque buscó dotar de sentido al observador que contempla la evolución de las formas que ocurren en la Naturaleza: seres estables -o formas emergentes- y entidades no visibles, las llamadas pregnancias, especies de semillas de donde surge la forma. Esta metodología hace una crítica a la ruptura galileana, acusándola de haber abandonado algunas intuiciones fundamentales que formaban parte importante del discurso científico de los antiguos.

De acuerdo con Thom el término Teoría de las Catástrofes, es debido a su discípulo E. C. Zeeman[27]. Desde un punto de vista de trabajo, podemos decir que la Teoría de las Catástrofes no es más que la Teoría de la Bifurcación desde un punto de vista topológico, o sea, es el estudio, desde un punto de vista cualitativo de las formas en que las soluciones de las ecuaciones diferenciales pueden variar. La primera información sobre esta apareció, en la prensa occidental, hace alrededor de 20 años. En **"Newsweek"** reportaron una revolución en las matemáticas, comparable quizás, al descubrimiento del Cálculo Diferencial e Integral. Ellos afirmaron que la nueva ciencia, la Teoría de las Catástrofes, era mucho más importante que el Análisis Matemático: mientras este sólo considera procesos suaves, continuos, la otra provee un método universal para el estudio de todas las transiciones de salto, discontinuidades y cambios cualitativos súbitos. Aparecieron cientos de científicos y publicaciones sobre el tema y sus aplicaciones a variados campos que van, desde el estudio del corazón al estudio de la teoría de partículas elementales, pasando por el estudio de los desórdenes mentales y la censura policial a la literatura erótica.

---

[27] "The geometry of catastrophe", Times Lit Supp, 1556-1557, 1971.

El punto "filosófico" es que el conjunto de los puntos catástrofes K son los que contienen el comportamiento significativo del proceso, es decir, donde se trabaja es el lugar geométrico de los puntos de equilibrio del sistema. El es el esqueleto, del cual el resto de la morfología depende. Ahora se tienen clasificados (casi) completamente las siete catástrofes elementales, Pliegue, Cúspide, Cola de Milano, Mariposa, Ombligo Elíptico, Ombligo Hipérbolico y Ombligo Parabólico. Estos nombres son escogidos por una gran variedad de razones y deben ser tratados meramente como mnemotécnicos[28].

Estas catástrofes elementales, poseen una propiedad de estabilidad muy fuerte: la estabilidad estructural. Esta noción se remonta al trabajo de Andronov y Pontriaguin de 1937[29], concepto desarrollado posteriormente, en conexión con la topología dinámica, por Smale[30]. Esta es una propiedad muy deseada y Thom (junto a Lefschetz y Arnold) la trata como un requerimiento esencial.

Es importante destacar, que la estabilidad estructural debe considerarse en un contexto determinado. El contexto comprende: a) una clase de sistemas matemáticos C , b) una clase de perturbaciones P, c) una relación de equivalencia R. En este contexto, un sistema es estructuralmente estable si demostramos que toda perturbación en P, lleva a un sistema en C que es equivalente, con respecto a R, al original.

Para concluir, digamos como Ascher y Poston que *"las Matemáticas son algo así como un cincel. Cuando se utilizan como martillo, los resultados son usualmente notables y de vez en cuando fatales".*

Sabemos que la descripción matemática del mundo depende, sobretodo, de una delicada interrelación entre la continuidad y discontinuidad, `fenómenos discretos'. Singularidades, bifurcación y catástrofe son términos diferentes para la descripción del surgimiento de estructuras discretas a partir de otras suaves, continuas.

La Teoría de las Singularidades es una generalización del estudio de funciones en sus puntos de máximo y de mínimo. En la teoría de Whitney las funciones son reemplazadas por aplicaciones, i.e., colección de varias funciones de varias variables. Whitney observó que, genéricamente, sólo dos tipos de singularidades pueden aparecer. Todas las demás, se transforman en una de estas, bajo pequeñas perturbaciones del cuerpo o de la dirección de proyección, mientras que estos dos tipos, pliegue y cúspide, como él los llamó, son estables y persisten después de pequeñas deformaciones de la aplicación.

En los últimos 30 años esta teoría ha adquirido un sofisticado nivel, principalmente debido a los trabajos del propio Whitney, de Thom (1959) y J. Mather (1965). Se ha convertido en una poderosa herramienta con un amplio rango de aplicaciones, principalmente vinculada con la Teoría de la Bifurcación.

El término bifurcación como entendemos ahora, significa rompimiento y es usado en un sentido amplio para designar toda suerte de reorganización cualitativa o metamorfosis de varias entidades que resultan de un cambio de los parámetros de los cuales ellas dependen.

---

[28] Puede consultarse V. I. Arnold-"Catastrophe Theory", Springer-Verlag, 1986 e I. Stewart-"Elementary Catastrophe Theory", IEEE Trans. on Circuits and Systems, Vol. cas 30, no.8, 1983, 578-586.

[29] "Sistèmes grossiers", DAN, vol.14, 247- 251.

[30] "Differentiable dynamical systems", Bull. AMS, vol.73, 747- 817, 1967.

Catástrofes, son entonces los cambios bruscos que surgen como una respuesta súbita del sistema a un cambio suave en las condiciones externas.

En la Teoría de la Bifurcación como teoría de las singularidades, los resultados fundamentales y aplicaciones fueron obtenidos sin la ayuda de la Teoría de las Catástrofes. La contribución de esta, fue la introducción del término atractor y el conocimiento sobre la bifurcación de atractores. Una variedad de atractores ha sido descubiertos ahora en todas las áreas de la Teoría de Oscilaciones; por ejemplo, ha sido sugerido que los variados fenómenos del lenguaje, son diferentes atractores de un sistema dinámico "productor de sonidos".

Ahora es claro que muchas de estas oscilaciones complejas, están conectadas con la esencia misma de la materia, con la presencia del caos y atractores extraños, quizás determinado por las ecuaciones fundamentales del problema y no por los variados efectos externos; ellas pueden ser estudiadas a un nivel superior de los modos estacionarios clásicos y los modos periódicos de comportamiento de los procesos[31].

Estas oscilaciones caóticas y la presencia de atractores en diferentes fenómenos de variados campos, ilustran bien a las claras, hasta donde ha penetrado hoy la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias, que no se detiene, por supuesto, en lo que hemos señalado en este trabajo. Por otra parte, la característica común de las trayectorias en un régimen caótico es el tener una estructura geométrica altamente irregular y que ante cierto tipo de enfoque -estudiar la sección de Poincaré, por ejemplo- da lugar a ciertos conjuntos fractales. Algo extraordinario es que los fractales resultaron ser ubicuitos en la Naturaleza, tanto al nivel de las formas de algunos elementos naturales -hojas, costas marinas, copo de nieve, etc- como en las formas geométricas generadas siguiendo reglas relativamente sencillas, rompiendo así con el viejo adagio de que *natura non facit saltus*[32].

La idea de Poincaré sobre las órbitas periódicas como *"la mejor herramienta para entender el problema de tres cuerpos"*[33] ha sido ampliamente explotada a lo largo de éste siglo.

El monumental trabajo de Elis Strömgren (1870-1947) sobre el cálculo efectivo de las familias de soluciones periódicas del problema, realizado con la ayuda de integradores mecánicos entre 1900 y 1935, constituye la fuente más valiosa en la que adquirir una idea del comportamiento cuantitativo sobre la mayor parte de éste tipo de soluciones[34].

Entre 1966 y 1970 Michel Henón[35] publicó una serie de 6 artículos, con el título genérico "Exploración Numérica del Problema Restringido" que complementan el trabajo de

---

[31] Puede consultar los trabajos de V. C. García C.-"O Caos", Publicações do Instituto de Matemática de UFRGS, Serie C, No.6, 1988 y J. E. Nápoles V.-"Una nota sobre el teorema de Sarkovskii", Lecturas Matemáticas Vol.16, No.2, 1995, 211-214 (http://hydra.icfes.gov.co/socolmat/revistas/lecturas/95160203.html).

[32] Es lectura indispensable el ya citado "The Fractal Geometry of Nature", de B. Mandelbrot.

[33] "Les Métodes Nouvelles de la Mécanique Céleste", vol 1, p 82.

[34] Matemático sueco-danés, doctorado en la Universidad de Lunds en 1898. Detalles de su vida y obra pueden ser consultados en http://www.udstillinger.dnlb.dk/astroweb/Astronomer/StromgrenElis.html, http://www.math.ku.dk/ths/stromgren_s_e/index.htm.

[35] Michele Henon matemático francés nacido en 1931, es astrónomo en el observatorio de Niza en Francia meridional. Por muchos años, durante los años 60 particularmente, estudió la dinámica de las estrellas que se movían dentro de las galaxias, usando las computadoras como manera de entender la estabilidad de sus movimientos. Su trabajo estaba muy inspirado en el acercamiento de Poincare al Problema de los Tres Cuerpos: ¿Qué estructuras geométricas importantes, gobiernan su comportamiento? El atractor de Henón es auto-similar, es decir, acercamientos sucesivos nos muestran más y más capas, como la pasta de un pastel o un croissant, ver

Strömgren e ilustran de forma cuantitativa el papel de las soluciones periódicas (estables) dentro de las soluciones acotadas. En sus exploraciones numéricas Henón encontró de forma efectiva tres tipos de comportamientos cualitativamente distintos para las soluciones del problema restringido de tres cuerpos: movimientos cuasi-periódicos, semi-ergódicos y de escape, de acuerdo con su nomenclatura.

Una parte de los comportamientos puestos de manifiesto en sus cálculos es el que ya había quedado descrito de forma cualitativa por Poincaré (en el tercer volumen de la obra anteriormente citada) y, por lo que se refiere a los movimientos cuasi-periódicos, demostrado por Vladimir I. Arnold en 1963 en el contexto de los sistemas hamiltonianos próximos a integrables.

La idea básica del método es la siguiente. De acuerdo con el Teorema KAM (por los matemáticos Kolmogorov, Arnold y Moser), en el espacio de fases de un sistema conservativo, suficientemente próximo a uno integrable, persisten todavía muchos toros invariantes. Las trayectorias con condiciones iniciales sobre uno de estos toros permanecen indefinidamente sobre el, con un movimiento cuasi-periódico con un vector de frecuencias fijo y que depende exclusivamente del toro. La familia de toros está parametrizada sobre un conjunto de vectores de frecuencias con estructura cantoriana, y en los vacíos del conjunto de Cantor aparecen los llamados movimientos caóticos. La representación numérica de los toros invariantes puede hacerse con relativa facilidad (hasta un cierto grado de precisión numérica) utilizando métodos de análisis de Fourier refinados (y, por tanto, sin necesidad de buscar transformaciones a variables acción-ángulo). A pesar que las frecuencias sólo están definidas sobre los toros invariantes, el algoritmo de Fourier puede calcular para un intervalo de tiempo dado, un vector de frecuencias asociado a cualquier condición inicial, entonces los valores de las frecuencias variaran con el intervalo de tiempo que se tome. En éste caso la variación de los valores de las frecuencias proporciona información sobre la difusión.

Los estudios relacionados con este sistema tan apasionante han dado lugar a ramas completas de los sistemas dinámicos, entre ellas la llamada Teoría KAM. Esta teoría estudia el carácter estable de movimientos y es utilizada, entre otras, para permitir la construcción de inmensos aceleradores de partículas atómicas. Estas deben quedar confinadas, moviéndose con gran velocidad (o sea con gran energía), en tubos de unos pocos centímetros de diámetro y centenares de metros de longitud. Es fácil comprender que la estabilidad de los movimientos de esas partículas es incluso un problema de vida o muerte. De hecho lo que sucede en dichos aceleradores en pocas horas simula la evolución de algunos sistemas astronómicos por centenares de millones de años. La teoría KAM predica la existencia de movimientos periódicos como los de las partículas del acelerador. Esta combinación de trayectorias estables e inestables se manifiesta gráficamente en figuras que ya fueron dibujadas groseramente por Arnold, a comienzos de los ´60. La hermosura de esas figuras se percibió cabalmente cuando se consolidaron los progresos de la computación.

---

algunos detalles en http://www.dma.fi.upm.es/docencia/segundociclo/sistdin/sdplanos.html#henon y http://fractales.org/html/henon.shtml.

En realidad, los sistemas Hamiltonianos puros no existen, pues sólo se conserva la energía en sistemas aislados, y es imposible aislar una porción del universo del resto del mismo. Por eso tiene importancia ver como afectan pequeñas perturbaciones a sistemas integrables. Por ejemplo, en una primera aproximación podemos suponer que la Tierra se mueve en su órbita bajo la acción de la atracción gravitatoria solar. Pero sabemos que en realidad está sujeta a las perturbaciones del resto de los planetas y especial-mente de Júpiter y Marte, sin mencionar el hecho de que la Tierra va acompañada de un satélite cercano de masa no despreciable.

Entonces, si el movimiento de los planetas no es integrable, podría suceder que el caos los alejara progresivamente de sus órbitas, y el sistema solar acabara desintegrándose.

En 1954, Andrei Nikolaevich Kolmogorov propuso un teorema que unos pocos años después fue terminado de demostrar por Vladimir Ivanovich Arnold y Jurgen Moser. Este teorema afirma que al introducir una pequeña perturbación en un sistema integrable, de forma que la nueva hamiltoniana sea $H(\Theta,l)=H_0(l)+\varepsilon H_1(\Theta,l)$, es decir, asumamos que tenemos un sistema integrable y que generamos una perturbación. La pregunta es ¿qué pasa con la integrabilidad para pequeños valores de ε? Por ejemplo, este problema es de real relevancia en sistemas gravitatorios, en los que H es periódico en q.

Si las frecuencias del problema inicial son racionalmente dependientes, entonces se generan órbitas cerradas denominadas "resonant tori". Si las frecuencias son racionalmente independientes, entonces se generan "non-resonant tori". Es posible expandir, y resolver el problema, sucesivamente en ordenes de ε. Podemos demostrar el siguiente Teorema de KAM.

Teorema KAM: Si las frecuencias del problema inicial son racionalmente independientes (con ciertas restricciones) entonces el sistema H tiene soluciones predominantemente cuasiperiodicas que no se diferencian mucho de las soluciones del sistema H_0. Casi todos los "non-resonant-tori" son deformados, pero muy poco. Así que el sistema tiene "non-resonant-tori", donde las órbitas son densas.

En el caso del Sistema Solar, el teorema KAM permite asegurar que existen órbitas regulares próximas a elipses de Kepler, aunque no podamos asegurar que nos encontremos en una de ellas.

4. Epílogo. Esta pequeña discusión ha mostrado algunas líneas de desarrollo actuales de las ecuaciones diferenciales, desde mucho antes del surgimiento de la matemática actual, no sólo por la contribución de matemáticos y físicos de la talla de Poincaré y Liapunov, sino también de los filósofos, factor ineludible en estos estudios.

Así, hemos visto cómo el estado actual de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, se nutre de diversas fuentes, entre las que hay que destacar las siguientes:

- Las concepciones del caos y la morfogénesis provenientes de la Matemática Griega, en este sentido sería conveniente añadir que el mismo René Thom ha reconocido que el esquema hülemorfista, que utiliza en el formalismo de las catástrofes, tiene su origen en la obra de Aristóteles[36].

[36] "Esbozo de una Semiofísica. Física aristotélica y teoría de las catástrofes", Gedisa, Barcelona, 1990.

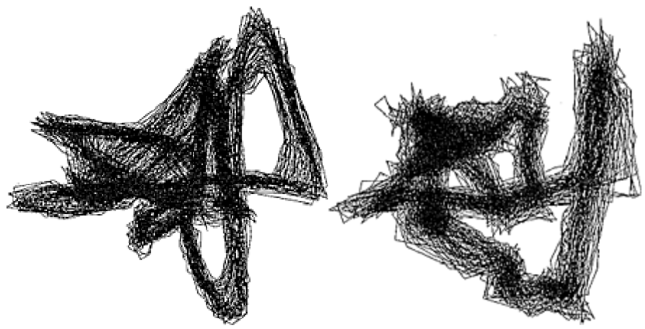
- El resquebrajamiento del paradigma determinístico que durante siglos imperó en el pensamiento científico y su sustitución paulatina, desde fines del siglo XIX, por una concepción cualitativa en la cual la dinámica está permeada por lo aleatorio, lo impredecible y donde se entrelazan en la complejidad, el orden y el desorden. El establecimiento del *principio de indeterminación* en la Mecánica Cuántica puso de manifiesto la inconsistencia de tal determinismo en el Universo.
- La pérdida de arraigadas evidencias y certezas físico-matemáticas, sobre todo a partir del desarrollo de las Geometrías no Euclidianas; con ellas se fue diluyendo la fe del pensamiento moderno de los siglos XVII-XVIII en una suerte de armonía preestablecida entre la geometría euclidiana y la configuración real del espacio físico o bien la confirmación mental de nuestra percepción del espacio; tras ellas creció la sospecha de que las Matemáticas serían más seguras si se refirieran a sus modelos teóricos antes que a la Naturaleza. Esta última parte se ha ido diluyendo, tras la aparición de los fractales como modelos matemáticos de una geometría "no euclideana".
- La superación, en el nuevo paradigma que parece abrirse paso en las ciencias, de las antiguas nociones de ley científica, de causa, de razón suficiente, de reversibilidad, de determinismo, de previsión del futuro, no es expresión de un retroceso en el terreno científico o de una invasión de éste por una total irracionalidad. La capacidad científica de previsión que fuera conquistada no cesa de acrecentarse y aún la física newtoniana, -por la parte de verdad que ella contiene dentro de ciertos límites de precisión- es utilizada para los cálculos con que se lanzan las naves espaciales.
- La aceptación mayoritaria de una concepción dinámica de la Ciencia, que ha venido a reemplazar la postura platónica sobre la generación, difusión y aceptación de los conocimientos científicos.

Por otra parte, el determinismo laplaciano no hizo sino responder a los reclamos más profundos de la intuición y al ansia casi metafísica por vivir en un mundo ordenado y predecible, es como si las palabras de Omar Khayyan *"Y la primera Mañana de la Creación escribió / lo que la Última Alborada del Juicio leerá"* fueran la máxima de la Ciencia. Extraña paradoja resulta que hayan sido las ecuaciones diferenciales, que como hemos visto son la máxima expresión matemática del determinismo en la Ciencia, donde aparecieron los fenómenos caóticos y más contradictorio aún resulta, que haya sido el Sistema Solar, que aportó las primeras nociones de orden, el que a su vez exhibiera los primeros visos de comportamiento caótico. Se esperaba que las ecuaciones donde se presentaban estos fenómenos fuesen raras, pero resultó todo lo contrario. Lejos de ser la excepción, el caos permea la Naturaleza, y este nuevo conocimiento nos remite a aceptar que esta contiene secretos y que el determinismo a lo Laplace resultó una fantasía.

A pesar del reciente progreso en el estudio del caos determinístico, con sensibilidad ante las condiciones iniciales, soluciones parciales sobre el origen de la turbulencia en fluidos y otros problemas, muchas cuestiones antiguas permanecen y otras preguntas surgen. En el caos determinístico se considera en un principio, que el futuro viene completamente determinado por el pasado, aunque en la practica es casi imposible predecirlo en un mundo altamente complejo y caótico. Pero aunque es verdad que el caos impone límites fundamentales de predicción, también es cierto que sugiere relaciones causales donde nadie las había sospechado.

Cabe entonces preguntarnos ¿vamos hacia un nuevo (des)orden?

ANEXO 1



Mostramos aquí dos atractores extraños, el primero, al vocalizar la letra "a" en estado normal de relajación, con el primer exponente de Liapunov igual a 145, y el segundo, en estado de fatiga, con un primer exponente de Liapunov de 367.

Por esto, los investigadores infieren que los exponentes de Liapunov de los atractores extraños de la voz humana son buenos indicadores de las condiciones mentales y físicas de un sujeto.

Para mayores detalles consultar http://www.aerospace.nasa.gov/%20library/chicago/fcp.htm y Clark Robinson-"Dynamical systems, stability, symbolic dynamics, and chaos", CRC Press (1995).

Juan E. Nápoles Valdes
Universidad de la Cuenca del Plata, Lavalle 50, (3400) Corrientes, Argentina, (idic@ucp.edu.ar) y Universidad Tecnológica Nacional, French 414, (3500) Resistencia, Chaco, Argentina (jnapoles@frre.utn.edu.ar).