Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 4 nº 8 (outubro/2004 - março/2005) - pág. 189 - 214
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

UM ESTUDO SOBRE ÁREAS EM UM CURSO DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES TOMANDO COMO PONTO DE PARTIDA A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA INDIANA NO PERÍODO DOS *SULBASUTRAS*

Maria Terezinha Jesus Gaspar

UnB - Brasil

(aceito para publicação em maio de 2004)

Resumo

Este artigo tem como objetivos apresentar métodos o método utilizado pelos indianos para resolver problemas sobre áreas de figuras planas, refletir sobre a importância de sua inserção no estudo da geometria em um curso de formação de professores, discutir os recursos didáticos que podem ser utilizados no ensino fundamental e médio para tratar este assunto, tecer considerações sobre a importância da dimensão histórica no ensino-aprendizagem da matemática e contribuir para uma melhor compreensão de como a dimensão histórica pode ser utilizada como um facilitador no processo de ensino-aprendizagem da matemática.

Palavras-chave: Educação Matemática, Geometria, História da Geometria.

Abstract

This work has as its objectives to present the methods used by the Indians to solve a problems about areas of plane figures, to reflect on the importance of including it in a teacher training course, to discuss the materials which could be used to teach this topic in primary and secondary education, to consider the importance of the historical dimension in the learning- teaching of mathematics and to contribute to a better understanding of how the historical dimension can be used to facilitate the learning-teaching of mathematics.

Keywords: Mathematical Education, Geometry, History of geometry.

1. Introdução

Uma pesquisa sobre em que situações, em que culturas e quando se deu a interação do homem com alguns conhecimentos geométricos que são trabalhados no ensino fundamental e médio como, por exemplo, o círculo, o quadrado, o trapézio e métodos, métodos para calcular áreas de figuras planas me levou a perceber que podemos identificar formas geométricas, alguns conceitos e propriedades geométricas no artesanato e nos artefatos de diversas culturas, na construção de altares, na arquitetura, etc. Assim, acredito que muito do conhecimento geométrico que é ensinado no ensino fundamento e médio surge das relações que o homem teve com estas formas e dos problemas significativos para diversas culturas que procuraram resolver.

Assim, a história da Matemática e a etnomatemática permitem perceber alguns conhecimentos matemáticos como resultados das atividades de trabalho de certos grupos motivados por necessidades rituais ou das relações do homem com a natureza, levando à descoberta e ao aprimoramento constante deste conhecimento para lidar com tais relações.

Esta pesquisa se restringiu a uma análise das informações encontradas em livros e artigos sobre a história da matemática egípcia, babilônica, chinesa e indiana procurando refletir sobre como tais informações poderiam levar a propostas pedagógicas para o ensino-aprendizagem da geometria em um curso de formação de professores, que tipo de questionamentos com relação ao trabalho do professor e sua concepções podem ser levantadas a partir do conhecimento dos modos como cada uma das civilizações lidou com tais conhecimentos e como este conhecimento pode levar a propostas pedagógicas para o ensino-aprendizagem da geometria no ensino fundamental e médio.

2. Quadrados e Retângulos

Quando discutimos a questão do ensino-aprendizagem de áreas devemos considerar dois aspectos importantes:

i) O cálculo da área utilizando uma determinada unidade de medida.

ii) O cálculo da área através do processo de decomposição e recomposição da figura dada.

Este segundo aspecto é muito encontrado na história da matemática das civilizações citadas e consiste em transformar a figura que desejamos calcular a área em uma outra figura, de mesma área que a figura dada, cujo método para calcular sua área seja conhecido.

Todas essas civilizações utilizavam para o cálculo da área de um retângulo o produto dos comprimentos de dois dos seus lados adjacentes. Assim, dada uma região do plano que se deseje calcular a área o objetivo era construir um retângulo ou quadrado de mesma área que a região dada.

Por exemplo, um dos altares públicos cuja construção está descrita nos *Sulbasutras* é o altar do falcão. Sua forma básica tinha uma área de $7\frac{1}{2}$ *purushas*[1] quadradas; o corpo do altar era um quadrado 2 x 2 (4 *purushas* quadradas), as asas e a cauda um quadrado de uma *purusha* cada. Para que a imagem pudesse estar bem próxima da forma real de um pássaro, asas e caudas foram alongadas – a primeira em um quinto de uma *purusha* e a segunda em um décimo [Figura 1].

[1] Uma *purusha* equivale à altura de um homem com os braços esticados para cima. Sarasvati, S. S. P. p. 44

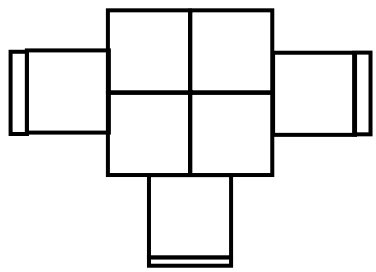


Figura 1

Esta era o tamanho e a forma do altar do falcão em sua primeira camada.

Na segunda construção, uma *purusha* quadrada era acrescentada, isto é, a área do segundo altar seria então de $8\frac{1}{2}$ *purushas* quadradas; na próxima construção, outra *purusha* quadrada era acrescentada e assim por diante, até chegar a uma área de $101\frac{1}{2}$ *purushas* quadradas. É importante observar que na construção dos altares maiores $(8\frac{1}{2},\ 9\frac{1}{2},\ \ldots,\ \text{etc})$ a mesma forma do altar básico é exigida.

Temos aqui o problema geométrico de construir figuras semelhante à da figura1 de áreas $8\frac{1}{2}$, $9\frac{1}{2}$, ..., etc.

> *A dimensão histórica permite perceber alguns conhecimentos matemáticos como resultado da necessidade oriunda das atividades de trabalho de certos grupos de profissionais. Assim uma forma social da matemática surge, a saber, matemática como conhecimento básico de certas profissões ou trabalhos, como por exemplo, o trabalho dos subakaras*[2] *indianos. Outro exemplo desta forma social de matemática é o conhecimento matemático desenvolvido pelos astrólogos-astrônomos da Antigüidade. Vemos assim um conhecimento matemático estritamente ligado às funções práticas como um meio de resolver problemas.*

De acordo com a descrição contida em Seidenberg[3], inicialmente eles acrescentavam uma unidade à área total dos sete quadrados sem o alongamento proporcional das asas e da cauda. Depois faziam esse alongamento de forma proporcional, i.e., um quinto em cada asa e um décimo na cauda.

---

[2] Responsáveis pela construção dos altares.
[3] Seidenberg, A. p. 491

Assim, o problema fica resolvido se soubermos como construir um quadrado de área igual a de um retângulo dado. No caso do altar de área $8\frac{1}{2}$, o retângulo teria dimensões 1 *purusha* por $1\frac{1}{7}$ de *purusha*.

Um método utilizado pelos indianos para

Construir um quadrado de área igual a um retângulo

é encontrado no Baudhayana *Sulbasutra* e pode ser descrito como segue[4]:

- Considerar um retângulo ABCD dado. [Figura 2]

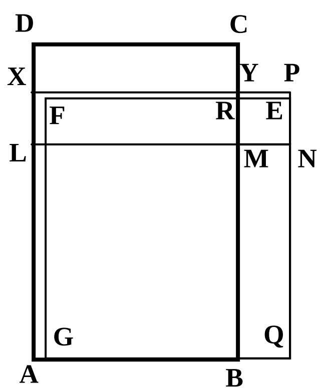


Figura 2

- Marcar L sobre AD, tal que AL = AB.
- Completar o quadrado ABML.
- Bissectar LD em X e divida o retângulo LMCD em dois retângulos iguais com a reta XY.
- Mover o retângulo XYCD para a posição MBQN.
- Completar o quadrado AQPX.
- Girar PQ sobre Q até ele tocar BY em R.
- Desenhar RE paralela a YP e completar o quadrado QEFG.

O quadrado QEFG tem a mesma área do retângulo ABCD.

O Baudhayana *Sulbasutra* não oferece nenhuma prova deste resultado mas, é possível verificar a veracidade do método utilizando nossos conhecimentos de geometria plana.

---

[4] O'Connor, J. J.; Robertson, E. F. p. 2

De fato,

$$\begin{aligned} \text{área}(ABCD) &= \text{área}(ABXY) + \text{área}(XYCD) = \\ &= \text{área}(ABXY) + \text{área}(MNBQ) = \\ &= \text{área}(AXPQ - \text{área}(YMNP) \\ &= (PQ)^2 - (PN)^2 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\text{área}(QEFG) = (QN)^2 = (QM)^2 - (MN)^2 = (PQ)^2 - (PN)^2$$

Logo,

$$\text{área}(ABCD) = \text{área}(QEFG)$$

No Apastamba *Sulbasutra* encontramos o seguinte método para resolver o mesmo problema[5]:

- Seja ABCD o retângulo dado. [Figura. 3]

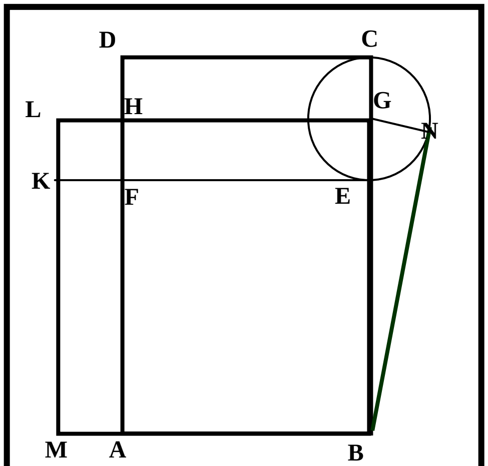


Figura 3

- Levantar os lados menores sobre os maiores de maneira que AF = AB = BE = CD
- Traçar HG mediatriz dos segmentos CE e DF.
- Prolongar EF até K, GH até L e AB até M, de modo que FK = HL = FH = AM
- Traçar o segmento ML.
- Construir um retângulo cuja diagonal é igual a LG e o lado menor igual a HF.

Então, o lado maior BN desse retângulo é o lado do quadrado procurado.

[5] Matemáticas em Índia, p. 2

Um modo de construir o retângulo indicado no sexto item é traçando uma circunferência de centro G e raio HF e depois uma tangente a essa circunferência passando por B.

Para provar que a área do quadrado de lado BN é igual a área do retângulo ABCD basta observar que

$$(BN)^2 = (NG)^2 - (BG)^2 = (LG)^2 - (HF)^2 =$$
$$= \text{área}(MBLG) - \text{área}(HFKL) =$$
$$= \text{área}(ABGH) + \text{área}(AMFK) =$$
$$= \text{área}(ABGH) + \text{área}(HGDC) =$$
$$= \text{área}(ABCD).$$

Alguns resultados da geometria estudados no ensino fundamental e médio podem ser discutidos a partir da análise desse método.

O problema de transformar um retângulo em um quadrado de mesma área é encontrado nos Livro II dos Elementos de Euclides e sua solução difere da encontrada nos *Sulbasutras* como é possível ver a seguir:

Transformar um retângulo em um quadrado.

Solução:

- Seja ACFE o retângulo dado (Figura 4).

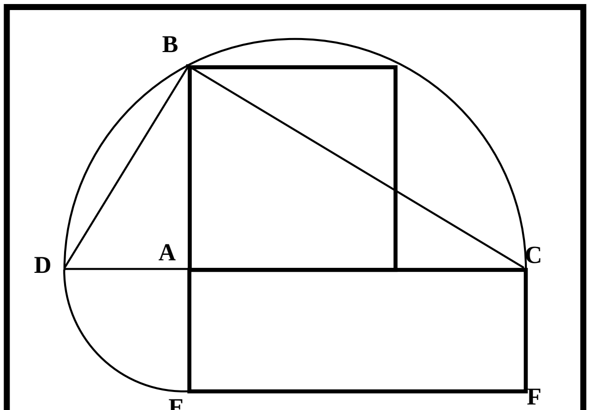


Figura 4

- Prolongar AC até D de modo que AD = AE.
- Desenhar um semi-círculo DBC cujo diâmetro seja DC.
- Prolongar o lado EA do retângulo até que ele encontre o semi-círculo em B.
- AB é o lado do quadrado pedido.

De fato, o triângulo DBC é retângulo em B (inscrito em um semi-círculo).

Os triângulos DAB e BAC são semelhantes (AAA)

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow AD\cdot AC=\left(AB\right)^2\Rightarrow AE\cdot AC=\left(AB\right)^2$$

(i.e.)

área (AEFC)=área(ACGB)

(i.e.) o retângulo AEFC e o quadrado ACGB são equivalentes.

É interessante observar que uma das relações métricas em um triângulo retângulo trabalhadas no ensino fundamental é a de que $AD\cdot AC=\left(AB\right)^2$ *onde AB é a altura relativa à hipotenusa e AD e AC as projeções dos catetos sobre a hipotenusa do triângulo mas, esta relação é vista do ponto de vista algébrico e, o fato da expressão poder ser interpretada como uma relação entre a área do quadrado de lado AB e a do retângulo de lados AE e AC não é considerada.*

Um outro fato característico dos rituais indianos era a combinação de deuses em um único deus. Como na religião indiana um deus era representado por um quadrado, a combinação de deuses conduziu ao problema de achar um quadrado, igual em área, à soma de dois quadrados ou mais quadrados dados.

No *Satapatha Brahma* (VI, 1, 1, 1-3) encontramos[6]:

No começo o Rishis [ar vital] criou sete pessoas separadas, que eram semelhantes a quadrados. .... Permita-nos fazer essas sete pessoas em uma Pessoa!, em seguida essas sete pessoas são compostas no altar do falcão.

Um método para resolver o problema de

Construir um quadrado, igual em área, a dois quadrados desiguais.

aparece em muitos dos diferentes *Sulbasutras*:

- Sejam ABCD e PQRS dois quadrados dados. [Figura 5]
- Marcar um ponto X sobre PQ tal que PX seja igual a AB.

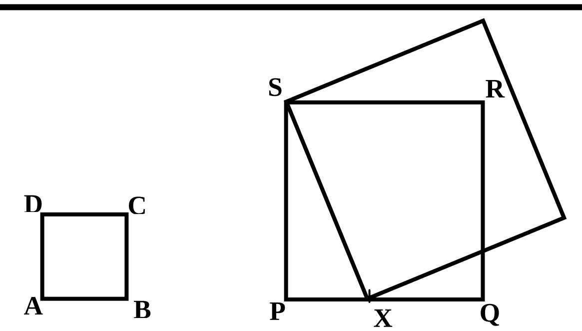


Figura 5

[6] Seidenberg, A. p. 492

Então, o quadrado de lado SX tem área igual à soma das áreas dos quadrados ABCD e PQRS.

O fato de SX ser o lado do quadrado procurado é uma conseqüência imediata do Teorema de Pitágoras.

De fato, pelo teorema de Pitágoras,

$$PX^2 + PS^2 = SX^2$$

Mas,

$$AB^2 = PX^2$$

Logo,

$$\text{área (quadrado de lado SX)} = SX^2 = AB^2 + PS^2 = \text{área (PQRS)} + \text{área (ABCD)}.$$

O Katyayana *Sulbasutra* também fornece um método para combinar qualquer número de quadrados de mesma área em um único quadrado cuja área seja igual à soma das áreas dos quadrados combinados. [Figura 6].

यावत्प्रमाणानि समचतुरश्राण्येकीकर्तुं चिकीर्षेत् एकोनानि तानि भवन्ति तिर्यक् द्विगुणान्येकत एकाधिकानि । त्र्यस्रिर्भवति तस्येषुस्तत्करोति ।

(*K. Sl.* VI. 7)

Figura 6

Datta[7] fornece a seguinte interpretação para o texto

Tantos quadrados [de lados iguais] quantos você deseja combinar em um, a linha transversal será um a menos do que isso [o número de quadrados], duas vezes o lado será um a mais do que isso [o número de quadrados]. Ele será um triângulo. Faça aquele [o lado do quadrado desejado] como sua altura [do triângulo].

O método proposto pode ser descrito, como segue:

- Seja **n** o número de quadrados iguais que devem ser combinados para formar o único quadrado e **a** o comprimento dos lados de todos os quadrados a serem combinados.
- Construir um triângulo ABC isósceles de lados $\frac{(n+1)a}{2}$ e base (n-1)a.

  [Figura 7]

[7] Datta *apud* Amma, S. T. A. p. 43

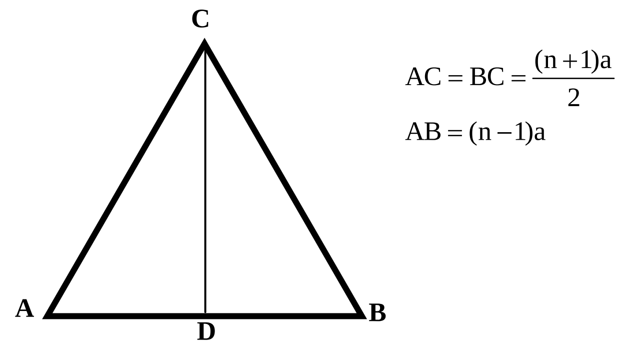


Figura 7

- Construir a altura CD do triângulo ABC.
- Construir o quadrado de lados CD. Este é o quadrado.

De fato,

A área do quadrado de lado CD é igual a $(CD)^2$.

Pelo teorema de Pitágoras, $CD^2 = AC^2 - AD^2$

Logo,

$$CD^2 = \frac{(n+1)^2 a^2}{4} - \frac{(n-1)^2 a^2}{4}$$

$$= \frac{(n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n - 1)a^2}{4} = na^2$$

Métodos para construir quadrados cujas áreas são frações da área de um quadrado dado, também são encontrados nos *Sulbasutras*. Por exemplo, como o altar *Sautramani* é $\frac{1}{3}$ do *Saumiki*, os *Sulvasutras* fornecem um método para construir quadrados cuja área é $\frac{1}{3}$ daquela de um quadrado dado. O método utilizado pode ser generalizado para uma fração qualquer da área do quadrado.

O método [Figura 8] apresentado no Katyayana *Sulbasutra* pode ser interpretado como segue:

तृतीयकरण्येतेन व्याख्याता । प्रमाणविभागस्तु नवधा करणीतृतीयं नवभागः ।
नवभागास्त्रयः तृतीयकरणी ।

(*K. Sl.* 15-18)[2]

Figura 8

- Dividir o quadrado dado em 9 partes iguais, dividindo cada um dos seus lados em 3 partes iguais [Figura 9]

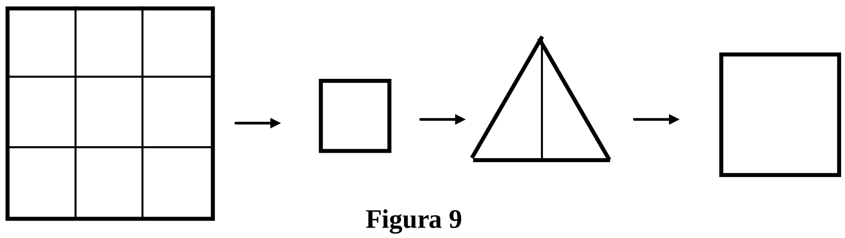


Figura 9

Cada um dos quadrados da divisão tem área igual a $\frac{1}{9}$ daquela do quadrado dado.

- Combinar 3 destes quadrados para formar um quadrado de área $\frac{1}{3}$ daquela do quadrado dado.

Podemos, através de um processo indutivo, levar nossos alunos a perceberem que este método utilizado pelos indianos pode ser generalizado fornecendo-nos um método para construir quadrados de área igual a $\frac{m}{n}$ da área de um quadrado dado.

Se desejamos construir um quadrado de área igual a $\frac{m}{n}$ daquela do quadrado dado, procedemos do seguinte modo:

- Dividir os lados do quadrado em n partes iguais, construindo uma malha de quadrados cuja área é igual a $\frac{1}{n^2}$ da área do quadrado dado.
- Combinar **nm** desses quadrados para formar um quadrado de área $mn\frac{1}{n^2} = \frac{m}{n}$ da área do quadrado dado, resolvendo assim o problema.

Um outro problema, semelhante ao anterior, encontrado nos *Sulbasutras*

Dividir um quadrado em 21 retângulos congruentes.

A solução é do mesmo tipo da que acabamos de apresentar.

> *"Tendo dividido o quadrado ... em sete partes (por linhas traçadas de leste para oeste) temos que dividir suas larguras em três partes."*

3. O Trapézio

Na Antigüidade o **trapézio**, mais especialmente o trapézio isósceles, teve lugar de honra na religião Védica e na fé Jaina, e o interesse por esta figura geométrica continuou até à escola de Aryabhata.

No período Védico o interesse dos **indianos** pelo trapézio isósceles estava associado à ocorrência dessa figura em seus monumentos e altares [Figura 10] e, de acordo com Seidenberg, todas as esperanças dos indianos para saúde e riqueza estavam associadas ao trapézio[8].

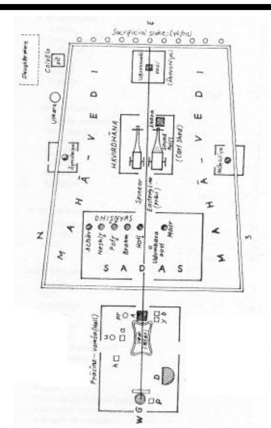


Figura 10

Veremos a seguir que os *Sulbasutras* fornecem métodos geométricos para construir um trapézio, calcular sua área e transformá-lo em um retângulo ou quadrado de mesma área ou o inverso.

Os *Sulbasutras* reconhecem que a área de um trapézio isósceles é igual à metade da soma da base e do topo multiplicada pela altura.[9]

No Apastamba *Sulbasutra* (V , 7), o *vedi* – altar empregado nos sacrifícios *Soma* – um trapézio isósceles com 36 unidades de altura e lados paralelos de 30 e 24, é dito ter área de 972 unidades quadradas.[10]

"(*Para estabelecer isto), desenhe (uma linha) do sul amsa (D na figura 11) até o sul śrōni (C), (a saber) para (o ponto E que é) 12 (padas do ponto L de prsthya). Após o que giramos a peça cortada (ie. O triângulo DEC) e levamos para o outro lado (ie.*

[8] Seidenberg, A. p. 108; Amma, S. T. A. p 70
[9] Amma, S. T. A. p. 52
[10] Sarasvati, S. S. P. p. 109; Seidenberg, A. p.518

para o norte). Então o vedi obtém a forma de um retângulo. Nesta forma (FBED) calculamos sua área."

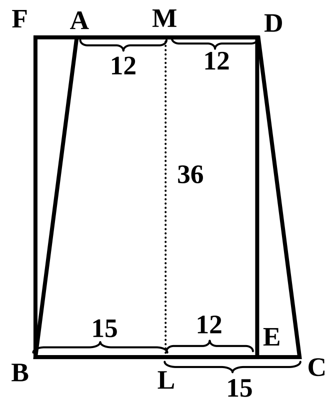


Figura 11

Muitos escritores dos *Sulbasutras* afirmam que não havia nenhuma prova nele mas, para Seidenberg, isto é uma prova e existem outras deste tipo nos *Sulbasutras*[11].

A solução dada pelos indianos pode ser re-escrita da seguinte forma:

- Construir uma perpendicular a BC passando pelo ponto D. [Figura 11]

Essa perpendicular intercepta BC em E e, a distância de E a L é igual a 12 unidades.

- Girar DEC e levar para o outro lado fazendo coincidir os pontos D com B e C com A de modo que o ponto A fique entre F (nova posição do ponto C) e D.
- FDEB é um retângulo que tem a mesma área do trapézio ADEB.
- Logo, área(ADEB) = área(FDEB) = $36 \times 27 = 972$.

A análise desta solução apresentada pelos indianos permite deduzir a fórmula geral para a área de um trapézio isósceles como $\frac{(B+b)h}{2}$. [Figura 12]

De fato,

$$\text{área(ADCB)} = \text{área(FDEB)} = (x + b)h$$

Mas, $x = \frac{B-b}{2}$

Logo, área(ADCB) = $\frac{B+b}{2}h$

[11] Seidenberg, A. p.518

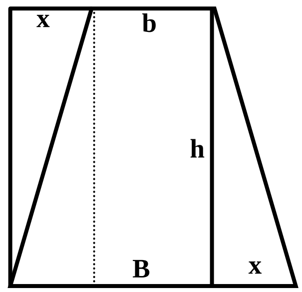


Figura 12

Que é a fórmula conhecida para a área do trapézio.

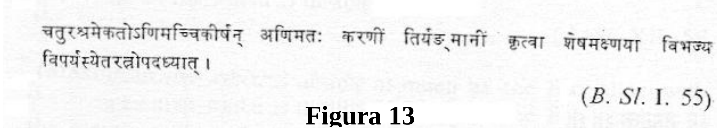
A discussão desse método **indiano** para calcular a área de um trapézio isósceles permite discutir vários resultados da geometria plana, a saber:

- Cálculo da área de um trapézio;
- Construção de um retângulo de mesma área que a de um trapézio dado;
- Congruência cateto-hipotenusa para triângulos retângulos.

Outros problemas sobre construção de trapézios são encontrados nos *Sulbasutras*:

Transformar um retângulo ou quadrado em um trapézio de mesma área com a base menor dada.

O *Baudhayana Sulbasutra* apresenta a seguinte solução:



चतुरश्रमेकतोऽणिमच्चिकीर्षन् अणिमतः करणीं तिर्यङ्मानीं कृत्वा शेषमक्ष्णया विभज्य विपर्यस्येतरत्रोपदध्यात् ।

(*B. Sl.* I. 55)

Figura 13

[Se você deseja fazer um quadrado ou retângulo menor em um lado, deve cortar a porção do lado menor. O resto deve ser dividido pela diagonal, invertido e atado ao outro lado.]

Isto sugere a seguinte construção:

- Considere o retângulo ABCD [Figura 14];

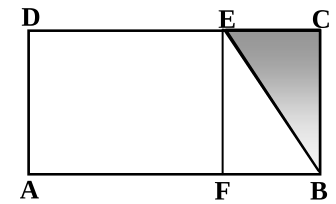


Figura 14

- Seja DE o tamanho do lado menor e EF uma perpendicular a AB;
- Traçar a diagonal EB;
- Os triângulos EFB e ECB têm a mesma área;
- Inverter o triângulo EBC e transferi-lo fazendo coincidir o lado BC com DA [Figura 15];

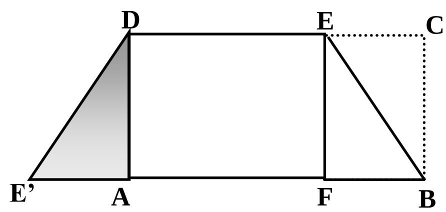


Figura 15

- O trapézio E'BED tem mesma área do retângulo ABCD.

O *Satapatha Brahmana* fornece outro método para esta conversão que pode ser descrito como segue:

A face do quadrado ABCD é encurtada de modo que DD' = CC' e a base é alongada o mesmo comprimento [Figura 16].

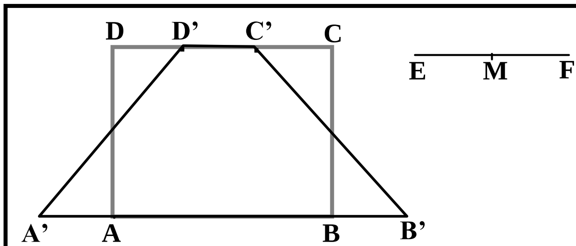


Figura 16

O procedimento pode ser descrito como segue:

- Seja ABCD o quadrado que será transformado em um trapézio de lado menor EF dado.
- Dividir EF ao meio por um ponto M.
- Marcar D'e C' sobre DC de modo que DD' = C'C = EM e A' e B' sobre AB tais que A'A = BB' = EM
- O trapézio A'D'C'B' tem mesma área do quadrado ABCD.

De fato, Os triângulos DD'G; AA'G; CC'H e BB'H são congruentes [ALA] e portanto possuem a mesma área.

Além disso, G e H são pontos médios de AD e BC.

Observe que as construções acima são de trapézios isósceles e podem ser feitas com régua e compasso.

Com relação ao problema de

Transformar um trapézio em um retângulo equivalente.

o *Apastamba Sulbasutra* trata deste problema mas não apresenta uma solução geral e sim como um meio de achar a área do trapézio de Mahavedi [Figura 17].

दक्षिणस्मादंसाद् द्वादशसु दक्षिणस्यां श्रोण्यां निपातयेत्, छेदं विपर्यस्य उत्तरत उपदध्यात् । सा दीर्घा चतुरस्रा । तथायुक्तां संचक्षीत ।

Figura 17

[*Da quina superior sul baixe uma perpendicular até a inferior sul a uma distância de 12 (padas de prsthya). O pedaço removido deve ser colocado invertido no lado norte. Este é o retângulo. A pessoa deveria examiná-lo então unido.*]

Isto é, para transformar um trapézio ABCD (de lados 24 e 30) em um retângulo deve-se proceder do seguinte modo:

- Desenhar uma perpendicular CB' [quina superior sul] a AB estando a 12 *padas* [pés]de PQ, o *prsthya*. [Figura 18].

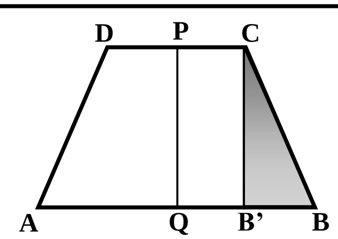


Figura 18

- Colocar o triângulo B’CB na posição ADD’.[Figura 19].

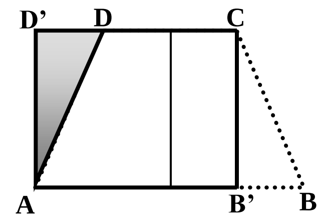


Figura 19

Então a área do retângulo AB’CD’é igual à do trapézio ABCD.

Observe que o método descrito acima permite transformar um trapézio isósceles em um retângulo independentemente de quais sejam suas medidas.

Um outro problema interessante que aparece na história da matemática indiana é a construção a base do altar *smasana* (um altar no qual uma bebida chamada soma era oferecida como um sacrifício aos deuses) pode Sua base tinha que ser construída com dimensões precisas para que o sacrifício desses bons frutos.

A base do altar *smasana* é um trapézio ABCD onde AD e BC medem 24 e 30 *padas* e a altura 36 *padas*. [Figura 20].

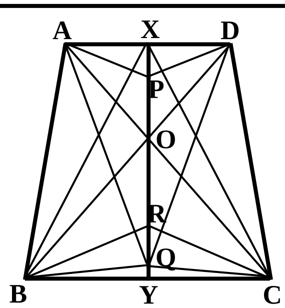


Figura 20

As instruções para construção deste altar no *Apastamba Sulbasutra* pode ser descrita, em notação moderna, como segue:

- Com a ajuda de uma corda marcar XY, que mede exatamente 36 *padas*.
- Ao longo desta linha localizar os ponto P, R e Q tais que XP, XR e XQ sejam iguais a 5, 28 e 35 *padas*, respectivamente. [Figura 21].

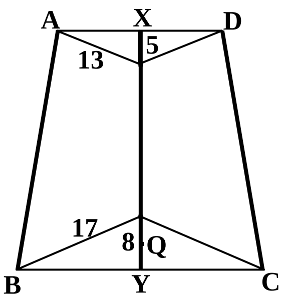


Figura 21

- Construir as perpendiculares a XY passando por X e por Y.

Essas perpendiculares podem ser construídas usando dois dos pontos P, Q ou R e o teorema de Pitágoras:

De fato,

- Se A e D são os vértices do trapézio a ser construído estão sobre a perpendicular a XY passando por X.

XA = XD = 12 *padas*

- Logo, os triângulos XAP e DXP são retângulos com catetos medindo 12 e 5 *padas*. A hipotenusa AP e DP medem portanto,

$$AP = DP = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$$

Logo, para construir a perpendicular a X basta pegar uma corda de comprimento 12 + 5 + 13 padas; fazer marcas a uma distância 5 e 12 de cada uma das extremidades; fixar as extremidades da corda em X e Y e esticá-la pela marca 12 que tocará o solo no ponto A desejado. De modo análogo encontra-se D.

Para construir a perpendicular BC a Y podemos trabalhar com o terno pitagórico (8 = RY, 15 = YB = YC, $\sqrt{15^2 + 8^2} = 17$ =RB = RC).

Observe que para construir o trapézio ABCD bastam dois dos pontos P, Q e R. Na discussão acima os pontos P e R foram suficientes para construir o trapézio.

Uma observação da figura 21 permite levantar as seguintes questões:

1. O ponto O de interseção das diagonais de um trapézio isósceles está na mediatriz do das bases AB e CD? E em um trapézio qualquer?
2. Dado um trapézio ABCD qualquer, com base AD e BC, sejam X e Y os pontos médios das bases AB e CD respectivamente, o ponto de encontro das diagonais e P e Q os pontos de interseção dos triângulos [Figura 22]. Que propriedade satisfaz os pontos O, P e Q? E as retas PQ , AD e BC?

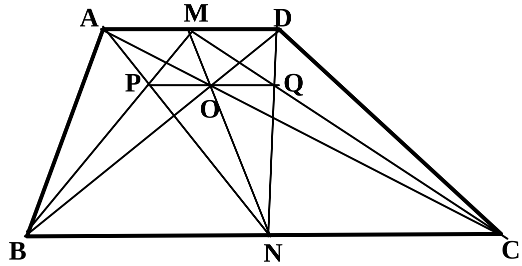


Figura 22

No problema 52 do papiro **egípcio** Rhind [Figura 23] a área de um triângulo "truncado" ou seja, um trapézio, é obtida pela multiplicação da média aritmética da base e "corte dos lados" pela altura[12].

Este procedimento nos induz a um método para chegar à fórmula da área do trapézio a partir da área do triângulo, que era conhecida pelos egípcios. A saber,

Considere um trapézio qualquer ABCD cujas bases paralelas são AB e CD respectivamente. [Figura 23].

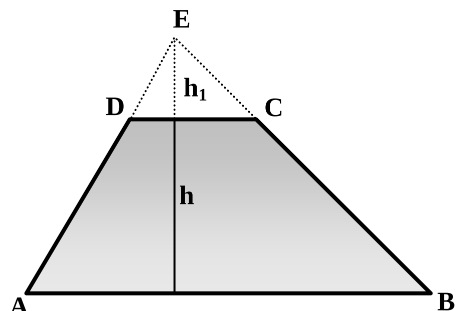


Figura 23

O trapézio ABCD pode ser obtido cortando o triângulo ABE por uma reta paralela a AB passando pelos pontos D e C dos lados AE e BE do triângulo.

Se **h** e $\mathbf{h_1}$ são as alturas do trapézio ABCD e do triângulo DEC relativa à base DC respectivamente, temos que:

A altura do triângulo ABE é $h + h_1$

A área do trapézio ABCD = área AEB – área DEC

[12] Robins, G.; Shute, C. p. 47

Mas ,

$$\text{área de AEB} = \frac{AB(h_1 + h)}{2} \quad \text{e área de DEC} = \frac{DC}{2}h_1$$

Logo,

Área do trapézio

$$ABCD = \frac{AB(h_1 + h)}{2} - \frac{CD}{2}h_1$$

Pela semelhança dos triângulos ABE e DCE:

$$\frac{h_1}{h + h_1} = \frac{CD}{AB} \rightarrow h_1 = \frac{CD}{AB}(h + h_1) \rightarrow \left(1 - \frac{CD}{AB}\right)h_1 = \frac{CD}{AB}h \rightarrow h_1 = \frac{CD}{AB - CD}h$$

Mas,

Área do trapézio ABCD =

$$\frac{1}{2}\left[AB\left(\frac{CD}{AB - CD}h + h\right) - CD\left(\frac{CD}{AB - CD}\right)h\right]$$

$$= \frac{h}{2}\left[\frac{AB \cdot CD + AB^2 - AB \cdot CD - CD^2}{AB - CD}\right]$$

$$= \frac{h}{2}\left[\frac{(AB - CD)(AB + CD)}{AB - CD}\right]$$

$$= \frac{AB + CD}{2}h$$

que é uma fórmula aplicada atualmente para calcular a área do trapézio.

É interessante que os futuros professores conheçam como um tópico da geometria era visto por várias culturas ou sociedades e do significado que este assunto tinha para cada uma delas e comparar o significado e importância deste tópico em nossa sociedade; na época em que ele – futuro professor – estudou este assunto e atualmente. Isso ajudará a priorizar determinados tópicos do currículo de matemática no momento de sua prática e entender melhor a atitude dos seus alunos com relação ao assunto a ser estudado. Assim, a história da geometria pode nos ajudar na construção do programa a ser desenvolvido em uma determinada série e na tomada de decisão quanto ao nível de profundidade e de relevância de um determinado tópico.

4. Área do Círculo

O círculo e o quadrado são duas formas geométricas que aparecem nas civilizações indiana, chinesa, babilônica, egípcia, africana e entre os indígenas brasileiros. Estas formas estão associadas a rituais religiosos, astronomia, arquitetura ou tecelagem e muito conhecimento geométrico pode ser identificado nestas civilizações a partir da análise de como essas formas foram incorporadas à cultura de cada um desses povos.

Na antiga civilização **indiana** existiam sepulturas quadradas e circulares e, por um motivo que não se conhece, as duas sepulturas teriam que ter a mesma área.

Isso conduziu aos problemas:

- Da circulatura do quadrado[13]:

Achar um círculo igual em área a um quadrado dado.

É possível descrever a solução apresentada no *Apastamba* Sulbasutra para este problema como segue:

- Dado um quadrado ABCD (Figura 24)
- Achar o centro.
- Girar OD para a posição OE, que está na linha OP, onde P é o ponto médio de CD.
- Seja Q o ponto entre P e E, tal que PQ = ($\frac{1}{3}$)PE.

O círculo desejado tem centro O e raio OQ.

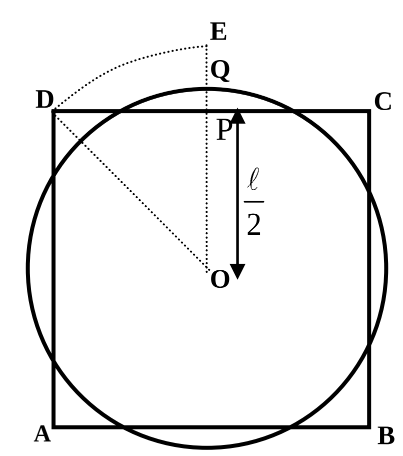


Figura 24

Se ℓ é o lado do quadrado e **d** o diâmetro do círculo temos que o raio **r** do círculo é dado por:

[13] Eves, H. p. 257; Seidenberg, A. p. 515, p. 173 e p.325; Serres, M. p. 158; Katz, V. J. J. p. 41; Joseph, G. G. p. 317; O'Connor, J. J.; Robertson, E. F. p. 3

$$r = \frac{d}{2} = OQ = OP + \frac{1}{3}PE \ = \frac{\ell}{2} + \frac{1}{3}(OE - OP)$$

$$= \frac{\ell}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}\ell}{2} - \frac{\ell}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}\ell}{6} + \frac{2\ell}{6} = \frac{(\sqrt{2}+2)\ell}{6}$$

Esse resultado para o raio do círculo apóia a afirmação de que o problema de calcular valores aproximados para $\sqrt{2}$, pelos indianos, poderia estar associado ao problema da circulatura do quadrado como afirma Seidenberg[14] e não da duplicação do quadrado como sugere Joseph[15] e a sugestão de Datta para chegar ao cálculo de $\sqrt{2}$ encontrado nos *Sulbasutras*.

Comparando o resultado obtido pelos indianos com a fórmula para área do círculo que conhecemos hoje temos:

$$\pi r^2 = \ell^2$$

onde

$$r = \frac{\left(\sqrt{2}+2\right)\ell}{6}$$

ou seja,

$$\pi \cdot \frac{\left(\sqrt{2}+2\right)^2 \ell^2}{36} = \ell^2$$

(i.e.)

$$\pi = \frac{36}{(\sqrt{2}+2)^2 \ell}$$

Substituindo pela aproximação para $\sqrt{2}$ usada pelos indianos[16] obtemos um valor de

$$\pi \cong 3{,}088307912737542133077746960838$$

- A quadratura do círculo[17]:

Construir um quadrado de área igual à de um círculo dado.

Solução apresentada pelos **indianos** nos três *Sulbasutras*[18]:

---

[14] Seidenberg, A. p. 517
[15] Joseph, G. G. p. 319
[16] Ver pág . 114 deste capítulo.
[17] A quadratura do círculo é um dos três problemas clássicos da geometria grega juntamente com a trissecção do ângulo e duplicação do cubo.
[18] Joseph, G. G. p.318, Seidenberg, A. p. 326; p.173; Katz, V. J. p. 21

"Se você deseja transformar um círculo em um quadrado, divida o diâmetro em oito partes e novamente uma dessas 8 partes em 29 partes; dessas 29 partes remova 28 e, além disso, a sexta parte (da parte deixada) menos a oitava parte (da sexta parte)."

Ou seja,

$$\ell = d - \left[\frac{d}{8} + \frac{d}{8.29} + \frac{d}{6.8.29} - \frac{d}{8.6.8.29}\right]$$

onde d é o diâmetro do círculo.

Isso equivale a tomar como aproximação para π o valor:

$$\pi \cong 3{,}02802501491486656097238736953362$$

Vale a pena observar que muitos valores diferentes de π aparecem nos *Sulbasutras*, inclusive valores diferentes em um mesmo texto. Cada construção implicava em um algum valor de π. Por exemplo, no *Baudhayana Sulbasutra*, aparece o valor de $\frac{676}{225}$, como também $\frac{900}{289}$ e $\frac{1156}{361}$. Em *Sulbasutras* diferentes todos os valores 2.99, 3.00, 3.004, 3.029, 3.047, 3.088, 3.1141, 3.16049 e 3.2022 podem ser achados e o valor $\pi = \frac{25}{8} = 3.125$ é encontrado *no Manava Sulbasutras*[19].

Um sucesso notável das matemáticas védicas foi o descobrimento de um procedimento para calcular raízes quadradas com alto grau de aproximação. O problema pode ter surgido originalmente da tentativa de construir um altar quadrado cuja área seja o dobro da de um altar quadrado dado [união de dois deuses em um deus]. Encontramos um procedimento para determinar um valor aproximado para $\sqrt{2}$ dado por Apastamba e Katyayana[20] em seus *Sulbasutras* que pode ser reformulado da seguinte maneira [Figura 26]:

प्रमाणं तृतीयेन वर्धयेत्तच्चतुर्थेन आत्मचतुस्त्रिंशोनेन सविशेषः ।

(*Āp. Sl.* I. 5 and *B. Sl.* I. 61-

Figura 25

"Aumente a medida em sua terça parte e esta terça parte em sua própria quarta parte, menos a trigésima quarta parte desta quarta parte. Este valor é uma quantidade especial em excesso.[21]"

---

[19] O'Connor, J. J.; Robertson, E. F. p. 3 Seidenberg, A. p. 103

[20] Amma, S. T. A. p. 42 .

[21] As traduções dos textos em sânscrito que aparecem neste trabalho foram feitas a partir das traduções para o inglês encontradas em Amma, S. T. A.

Se tomarmos uma unidade como a medida do lado do quadrado, esta fórmula dá o comprimento aproximado da diagonal do quadrado (lado do quadrado desejado) com

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{34}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34} = \frac{577}{408} \cong 1.414215686$$

Um comentarista dos *Sulbasutras*, Rama, que viveu em meados do século XV d.C., apresentou uma outra aproximação para $\sqrt{2}$ acrescentando os seguintes termos à equação:

$$\frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34 \cdot 33} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34 \cdot 34}$$

Nenhuma indicação é dada de como os autores dos *Sulbasutras* acharam esse notável resultado. No entanto, várias explicações têm sido propostas. Datta, em 1932, fez uma bela sugestão de como esta aproximação pode ter sido alcançada.

A idéia básica da sugestão de Datta para chegar ao cálculo de $\sqrt{2}$ encontrado nos *Sulbasutras* consiste em tomar dois quadrados e recortar o segundo, montando-o em torno do primeiro a fim de obter um quadrado duas vezes maior.

Essa sugestão é razoável devido ao problema encontrado nos *Sulbasutras*, que pode ter motivado o cálculo desta aproximação para $\sqrt{2}$ ou seja,

Construir um altar quadrado, cuja área seja o dobro de um altar quadrado dado.

Cálculo aproximado de $\sqrt{2}$ usando a sugestão de Datta:

- Tomar dois quadrados equivalentes.

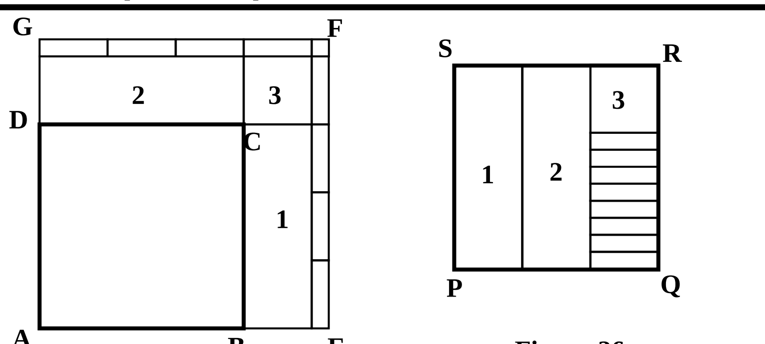


Figura 26

- Cortar o segundo quadrado em três tiras iguais.
- Colocar as tiras 1 e 2 em torno do primeiro quadrado como indicado na [Figura 26].
- Cortar um quadrado no topo da terceira tira e colocar na posição 3.

Temos um novo quadrado, mas que ainda não é o quadrado procurado. Restam algumas partes do segundo quadrado que têm que ser reunidas em torno do primeiro.

- Cortar as partes restantes ($\frac{2}{3}$ de uma tira) em 8 tiras iguais e amarrar em torno do quadrado que estamos construindo na [Figura. 27].

Usamos agora, todas as partes do segundo quadrado, mas a nova figura que construímos ainda é quase um quadrado, faltando um pequeno quadrado no canto para completá-la.

O lado desse "quase" quadrado é

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\left(\frac{2}{3}\right)=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}$$

que são realmente os primeiros três termos da aproximação.

A área do pequeno quadrado é $\left(\frac{1}{12}\right)^2=\frac{1}{3\cdot 4}$.

Para fazer a área do quadrado AEFG aproximadamente igual à soma das áreas dos quadrados originais ABCD e PQRS, imagine que se corte duas tiras muito estreitas de largura *x* do quadrado AEFG no seu lado esquerdo e inferior.

Então,

$$2x\cdot\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}\right)-x^2=\left(\frac{1}{3\cdot 4}\right)^2$$

Simplificando a equação e ignorando x^2 (uma quantidade insignificante), temos

$$2x\cdot\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}\right)\cong\left(\frac{1}{3\cdot 4}\right)^2$$

$$2x\cdot\left(\frac{12+4+1}{3\cdot 4}\right)\cong\left(\frac{1}{3\cdot 4}\right)^2$$

$$2x\cdot\left(\frac{17}{3\cdot 4}\right)\cong\left(\frac{1}{3\cdot 4}\right)^2\to x\cong\left(\frac{1}{3\cdot 4}\right)^2\cdot\left(\frac{3\cdot 4}{17}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$x\cong\frac{1}{3\cdot 4\cdot 34}$$

A diagonal de cada um dos quadrados originais é $\sqrt{2}$, que pode ser aproximada pelo lado do novo quadrado

(i.e.)

$$\sqrt{2}\cong 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 34}$$

As civilizações antigas usavam métodos aproximados para resolverem problemas o que permitiu a solução de alguns cujos métodos de resolução atuais exigem técnicas encontradas na matemática em épocas mais recentes. Analisar em um curso de formação de professores, os diversos métodos e técnicas encontrados na história da matemática e na etnomatemática para resolver um determinado problema, discutir a possibilidade de colocar os alunos do ensino fundamental e médio em contato com aqueles métodos que fossem adequados ao seu nível de escolaridade e propiciar a oportunidade de discutirem métodos descobertos pelos próprios professores-alunos poderia incentivá-los a fazerem um trabalho semelhante no ensino fundamental e médio.

5. Bibliografia

AMMA, S. T. A. **Geometry in Ancient and Medieval India** 1a. ed. Índia: Motilal Banarsidass, 1979. 280 p.

BYERS, V. Por que Estudar a Históriada Matemática **International Journal Matematics Education, Science and Technologie**, v. 13, n. 1, p. 59-66, 1982.

DAHLKE, R., **Mandalas** . Tradução M. Martincic. 10 a. ed. São Paulo: Pensamento, 1995. 346 p.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** Tradução Domingues, H. H. Campinas: UNICAMP, 1997. 843 p. (Repertórios.)

JOSEPH, G. G. **The Crest of The Peacock** 2a. ed. USA: Princeton University Press, 2000. 455 p.

KATZ, V. J. **A History of Mathematics. An Introduction** 2a. ed. USA: Addison-Wesley Educational Publishers Inc., 1998. 856 p.

KATZ, V. J. Egyptian Mathematics In*:* HISTÓRIA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1996, Braga. **História e Educação Matemática. Proceedings. Actes. Actas. v. I.** Braga, 1996. p. 45-53.

Matemáticas en Índia. Disponível em: <**http://matematicas.metropoli2000.com/codigo/historia/india/matematicas.htm**> Acesso em: 23 jun. 2000.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **The Indian Sulbasutras** Disponível em: <**http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Indian_sulbasutras.html**> Acesso em: 2 set. 2001.

ROBINS, G.; SHUTE C. **The Rhind Mathematical Papyrus. An Ancient Egyptian Text** 1a. ed. New York: Dover Publications Inc., 1987. 60 p.

SARASVATI, S. S. P. **Geometry in Ancient India** Índia: Govindram Hasanand, 1987. 230 p.

SEIDENBERG, A. On the Volume of a Sphere **Archive for History of Exact Sciences**, Berlin, v. 39, n. 2, p. 97-119, Dezembro 1988.

SEIDENBERG, A. The Origin of Mathematics **Archive for History of Exact Sciences**, Berlin, v. 18, n. 4, p. 301-342, Junho 1978.

SEIDENBERG, A. The Ritual Origin of Geometry **Archieve for History of Exact Sciences.**, p. 488-527, 1963.

SERRES, M. **O Contrato Social.** Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1991. 142 p. (Nova Fronteira Verde.)

WUSSING, H. **Lecciones de Historia de las Matemáticas** Madrid: Siglo XX de España Editores S. A., 1998. 345 p.

YAN, L.; SHÍRÀN, D. **Chinese Mathematics. A Concise History.** Tradução. J. N. Crossley; A. W.-C Lun. New York: Oxford Science Publications, 1987. 290 p.

Maria Terezinha Jesus Gaspar –
Departamento de Matemática da Universidade de Brasília
Endereço: Campus Universitário Darcy Ribeiro – Asa Norte – Brasília – DF. CEP. 70910-900
E-mail: mtgaspar@mat.unb.br