*Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 3 nº 6 (outubro/2003 - março/2004 ) - pág. 23 - 51*
*Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática*
ISSN 1519-955X

# UMA ANÁLISE HISTÓRICA DE ALGUNS ASPECTOS DO TEXTO "AN ESSAY ON THE APLICATION OF MATHEMATICAL ANALYSIS TO THE THEORIES OF ELECTRICITY AND MAGNETISM" DE GEORGE GREEN

Marcos Vieira Teixeira

*Unesp - Brasil*

(aceito para publicação em dezembro de 2002)

**Resumo**

Neste artigo apresento uma anális das seções 1 a 4 da terceira parte do "An Essay on the Aplication of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism" de George Green. Nessas seções é que aparecem o que hoje em dia chamamos primeira fórmula de Green e teorema de Green, também chamado segunda fórmula de Green.

**Abstract**

In this paper I present an analysis of the sections 1 to 4 of the third part of the "An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism" of George Green. In these sections appear what nowadays are called first Green's formula and Green's theorem or second Green's formula.

## Introdução

Em 1828, com a idade de trinta anos, George Green publicou "An Essay on the Aplication of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism". É nesse ensaio que aparecem as grandes contribuições de Green para a matemática e para a física no que diz respeito ao cálculo de integrais de volume e às técnicas de resolução de equações diferenciais que hoje chamamos respectivamente de Teorema de Green e Funções de Green, é nele também que aparece pela primeira vez o termo "potential" em eletricidade. Em Teixeira (1998) analisei o que chamo a "parte matemática do "Essay", constituída pelas sete primeiras seções, ou "articles" como ele denominou, das 17 em que dividiu seu trabalho[1] e que reuniu sob o nome de General Preliminary Results. Neste artigo apresento uma parte dessa análise, correspondente ao teorema de Green ou segunda fórmula de Green , à primeira fórmula de Green, e à determinação de algumas relações entre a densidade de cargas elétricas na superfície de um corpo e a função potencial em pontos dentro e fora dele.

Nesta análise não estou preocupado com as sutilezas que a matemática de nossos dias considera importantes. Em seu Essay, Green não distingue integrais triplas ou duplas

[1] Não levando em conta o Prefácio nem as Observações Introdutórias.

de integrais iteradas; não se preocupa com a continuidade de suas funções; não se preocupa com a existência de suas integrais; não se preocupa em demonstrar as relações entre o finito o infinitesimal e o infinitamente grande, não se preocupa com a existências de certas derivadas. Mas exigir que ele o fizesse seria esquecer-se que os avanços no rigor da Análise Infinitesimal estava ainda nascendo com Cauchy. É esquecer-se também que muitas das distinções que hoje fazemos – integrais múltiplas e integrais iteradas, continuidade e diferenciabilidade, continuidade pontual e continuidade uniforme etc... – são distinções que só se tornaram "necessárias" com o aparecimento da hoje chamada Análise Weierstrassiana cerca de trinta anos mais tarde. É esquecer-se que até trinta anos mais tarde não se tinha uma "construção" de números reais dentro de um rigor que hoje é aceitável. É esquecer-se de que a formação que temos é Weierstrassiana, onde infinitésimos e infinitamente grande foram varridos para baixo do tapete. Mas não se deve esquecer que demonstrações físicas de teoremas analíticos ainda hoje são aceitas em muitos círculos, como entre físicos, e Green foi um físico além de matemático.

É muito comum quando se analisa trabalhos mais antigos transcrever as diversas equações matemáticas em notação moderna, mas em minha leitura procurei ao máximo manter a notação originalmente usada por Green. Na transcrição e tradução dos trechos dos artigos mantenho sempre a notação original; desse modo, tal com Green, uso sempre um único símbolo de integral para indicar tanto integrais de volume quanto integrais de superfície e integrais iteradas; uso sempre um único símbolo para indicar o que hoje denominamos derivadas de funções de uma variável, derivadas parciais ou derivada direcionais.

**George Green**

George Green nasceu em Nottingham em 14 de julho de 1793. Seu pai foi primeiro padeiro em Nottingham e posteriormente um moleiro na vila de Sneinton nos arredores de Nottingham.

Pouco se conhece a respeito da formação educacional de Green até a publicação do "Essay". Em 1801 o pai de Green matriculou-o numa das principais escolas de Nottingham, a "Robert Goodacre's Academy", onde permaneceu por quatro períodos letivos. (cerca de dois anos).

Cannell[2] diz que provavelmente Green, após a passagem pela escola de Goodacre, teve como tutores dois diretores da Nottingham Grammar School, o reverendo John Challand Forrest que dirigiu esta escola de 1793 a 1806 e o reverendo John Toplis que a dirigiu de 1806 a 1819. Ambos eram graduados em matemática no Queen's College de Cambridge. Challand Forrest pode ter ensinado parte da matemática tradicionalmente estudada em Cambridge. John Toplis provavelmente introduziu Green na matemática e na física do continente.

Em 1828 Green publica seu *"Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism"*. Foi publicado em Nottigham, por subscrição privada. Cinqüenta e um foi o número de subscritores. Cada um deles pagou 7 shillings e

[2] Cannel (1993)

seis pences pela cópia. Entre eles estava Sir Edward Ffrench Bromhead, que era graduado em matemática em Cambridge e que posteriormente iria desempenhar um papel importante no caminho que Green seguiria.

Em 19 de abril de 1828 Green envia a Bromhead a cópia de seu Essay, juntamente com uma nota de agradecimento. Bromhead, no dia seguinte, 20 de abril, escreveu uma carta agradecendo e se propondo a comunicar à Royal Societies of London and Edinburgh qualquer outra memória que Green viesse a escrever. Green por influência de um amigo tomou a carta de Bromhead como cortesia e não a respondeu até janeiro de 1930.

Green passou os dois anos seguintes trabalhando em uma segunda investigação, e em 17 de maio de 1832 envia a Bromhead seu trabalho *"Mathematical Investigations concerning the Law of the Equilibrium of a Fluid analogous to the Electric Fluid with other similar researches"*. Bromhead enviou este artigo juntamente com uma cópia do Essay ao seu amigo William Whewell para ser lido na Cambridge Philosophical Society naquele mês. Ele foi apresentado em 12 novembro de 1832, e impresso no Transactions of Cambridge Philosophical Society 1833. O moderador foi Robert Murphy, Fellow of Caius College, que indiretamente se tornaria o responsável pelo redescobrimento do Essay.

Em 27 de abril de 1833 Green concluiu um segundo artigo intitulado *"On the Determination of the Exterior and Interior Attraction of Ellipsoids of Variable Densities"*, lido na Cambridge Philosophical Society em 6 de maio de 1833 e publicado no Transactions em 1835. Bromhead também enviou este artigo a Whewell, o qual ao agradecer o envio deu alguns conselhos sobre que assuntos Green deveria escrever.

Green parece ter seguindo o conselho de Whewell já que seu artigo seguinte era intitulado *"Researches on the Vibration of Pendulums in Fluid Media"*. O qual foi apresentado em 16 de dezembro de 1833 na Royal Society of Edinburgh e publicado no Transactions em 1836.

Em 1833 Green decide ir para Cambridge com o objetivo de obter uma formação universitária. Com uma carta de recomendação de Bromhead ele foi aceito no Gonville and Caius College como um "pensioner". Ele chegou em Cambridge em outubro com a idade de 40 anos. Em janeiro de 1837 ele obteve o grau de "Bachelor of Arts", seu nome aparece em quarto lugar na lista dos "Wranglers".

Em seis de novembro de 1837, Green é eleito Fellow of the Cambridge Philosophical Society.

Retornando à suas pesquisas ele apresenta seis artigos, à Cambridge Philosophical Society, nos dois anos seguintes:

*"On the Motion of Waves in a Variable Canal of Small Width and Depth", read 15 May 1837, printed in Transactions 1838.*
*"On the Reflection and Refraction of Sound". read 11 December 1837, printed in Transactions 1838.*
*"On the Law of the Reflection and Refraction of Light at the common Surface of two non-crystallised Media", read 11 December 1837, printed Transactions 1838.*
*"Note on the Motion of Waves in Canals", read 18 February 1839, printed Transactions 1839.*

> *"Supplement to a Memoir on the Reflection and Refraction of Light", reat 6 May 1839, printed Transactions 1939.*
> *"On the Propagation of Light in Crystallized Media", read 20 May 1839, printed Transactions 1839.*

Em 1840 Green retorna a Nottingham vindo a falecer em junho de 1841.

O Essay de Green permaneceria desconhecido por cerca de 17 anos, até que William Thomson o redescobrisse em 1845.

**A Redescoberta do Essay**.

Robert Murphy, Fellow of Caius College, apresentou à Cambridge Philosophical Society seu artigo *"On the Inverse method of Definite Integrals with Physical Applications"*, que foi lido em março de 1832 e publicado no Transactions 4 (1833). Em novembro de 1832 Murphy foi o "referee" do artigo de Green *"Mathematical Investigations concerning the Law of the Equilibrium of a Fluid analogous to the Electric Fluid together with other similar researches"* e junto com esse artigo Murphy recebeu uma cópia do "Essay" de Green. Quando o artigo de Murphy foi publicado apareceu nele a seguinte nota de rodapé:

> *The electrical action in the third section, is measured by the tension of the fluid which would be produced by a infinitely thin rod, communicating with the electrical body, by the attraction or repulsion of the matter; it is what Mr. Green, of Nottingham, in his ingenious Essay on this subject, has denominated the Potential Function.*[3]

Em 1842 William Thomson[4] leu a referência de Murphy ao Essay de Green. Thomson estava interessado na teoria da atração e escreveu artigos sobre o assunto em 1842 e 1843. Ele só conseguiu uma cópia do Essay em 25 de Janeiro de 1845.

Thomson deu uma cópia do Essay ao matemático alemão August Leopold Crelle. Crelle publicou o Essay de Green em seu jornal em três partes em 1850, 1851 e 1853.

Desde o início, Thomson procurou tornar Green conhecido. No primeiro artigo que enviou para ser publicado no Liouville's Journal ele incluiu uma referência aos Teoremas de Green. Quando em 1872 ele editou seu "*Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism",* constituído pela reunião dos seus artigos publicados nos últimos trinta anos em vários periódicos, ele fez diversas referências a Green:

> *"The mathematical theory received by far the most complete development which it has hitherto obtained, in Green's Essay..."*[5]

---

[3] Cannell (1993), pag. 144.

[4] William Thomson, posteriormente conhecido como Lord Kelvin, nasceu em Belfast na Irlanda, a 26 de junho de 1824 e morreu em Netherall na Escócia em 1907.

[5] Thomson (1872), pag. 17; conforme Cannell (1993) pag.151.

> *"According to Green's remarkable theorems, triply re-discovered by Gauss, Chasles and the writer of this article..."*[6]
> *"This result was first given by Green, near the conclusion of his paper, "On the Laws of the Equilibrium of Fluids..."*[7]
> *"Green's Essay on Electricity and Magnetism and his other papers on allied subjects contain, beside the solution of several problems of interest, most valuable discoveries with reference to the general Theory of Attraction and open the way to much more extended investigations in the Theory of Electricity than any that yet been published."*[8]

**O "Essay"**

O "Essay" está dividido em cinco partes. A primeira parte é o "Preface" e a segunda é denominada "Introductory Observations". As três partes seguintes estão divididas em 17 seções, cada uma das quais Green denominou "article". A terceira parte é denominada "General preliminary results" e contem as seções de 1 a 7. A quarta parte, "Application of the Preceding results to the theory of Electricity", contem as seções de 8 a 13. A quinta parte, "Application of the preliminary results to the Theory of Magnetism" contem as seções de 14 a 17.

Ele foi publicado em Notingham em 1828, e a edição utilizada neste trabalho é a que aparece no Crelle´s Journal, onde foi publicado em três partes. A primeira contendo o Prefácio, as Observações preliminares (39, 1850, 73-89) e uma nota introdutória de William Thomson. Esta nota de Thomson contem uma pequena biografia de Green, uma relação de investigações independentes feitas por autores posteriores sobre o assunto do Essay e uma relação dos trabalhos matemáticos publicados por Green. A segunda contendo os Resultados Preliminares gerais (44, 1852, 356-74) e a terceira contendo as Aplicações à Eletricidade e ao Magnetismo (47, 1854, 161-221).

Atualmente existem duas edições da obras completas de George Green. Uma delas reunidas em um único volume intitulado "Mathematical Papers of George Green"[9], publicado pela Chelsea em 1970 e que é uma reimpressão inalterada de uma edição feita por Ferrers[10] publicada em 1871. A outra é uma edição intitulada "The Scientific Papers of George Green" publicada em 3 volumes; o primeiro contendo uma reprodução facsimile do Essay; o segundo contendo os dois artigos sobre eletricidade e magnetismo que se seguiram ao Essay, escritos no período de 1830-33, e que foram publicados no Transactions of the Cambridge Philosophical Society em 1833 e 1835 respectivamente; e o terceiro contendo os sete artigos seguintes sobre teoria da ondas.

Na terceira parte do seu trabalho, a qual denomino a parte matemática do "Essay", constituídas pela secções de 1 a 7, Green demonstra alguma relações existentes entre a densidade de eletricidade em um sólido e na sua superfície e a função potencial

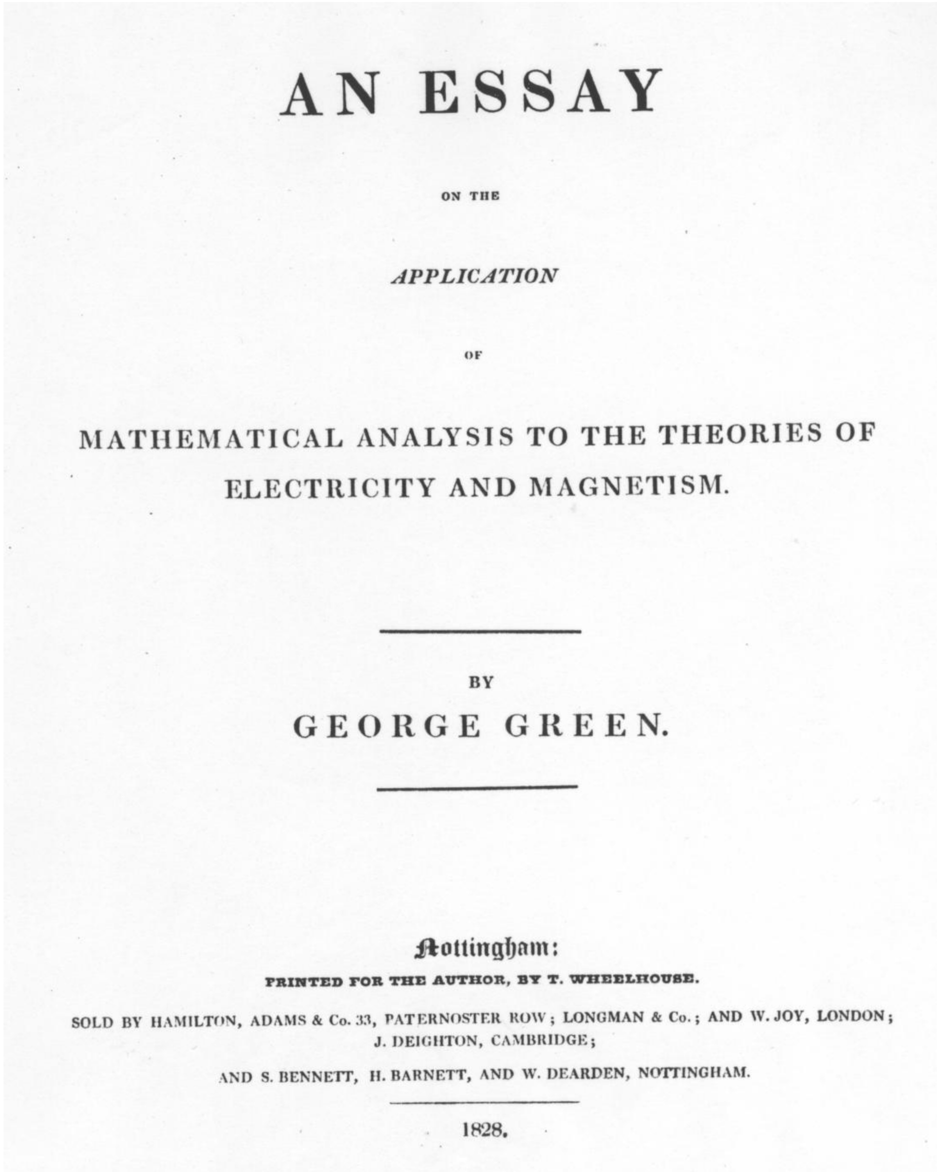
[6] Thomson (1872), pag. 194; conforme Cannell (1993) pag.151.
[7] Thomson (1872), pag. 179; conforme Cannell (1993) pag.151.
[8] Thomson (1872), pag. 51; conforme Cannell (1993) pag.152.
[9] Ferrers (1871).
[10] Ferrers, N. M. foi Fellow and Tutor of Goinville and Caius College.

correspondentes. È nessas demonstrações que aparecem o que hoje denominamos primeira fórmula de Green, segunda fórmula de Green ou teorema de Green e o método das funcões de Green.

Neste artigo apresento uma análise das seções 1 a 4 da terceira parte do Essay, onde aparecem a primeira e a segunda fórmula de Green. Mas antes apresentarei uma pequena descrição do que Green faz no restante do trabalho.

Na quarta parte de seu trabalho, Green determina o valor da densidade de eletricidade na superfície interna e externa de uma garrafa elétrica isolada, e deduz algumas conseqüências. Apresenta exemplos de determinação da distribuição de eletricidade em esferas e de efeitos , devido à atmosfera, em condutores metálicos perfeitos isolados. Apresenta também a aplicação de seu método ao estudo de um corpo condutor não perfeito, para ilustrar o fenômeno magnético, produzido pela rotação de corpos sob a influência do magnetismo terrestre.

Na quinta parte ele trata da teoria do magnetismo, tomando por base as hipóteses, propostas primeiramente por Coulomb, de que os corpos magnéticos são formados por um número infinito de elementos condutores, separados por intervalos absolutamente impermeáveis ao fluído magnético, obtendo condições necessárias para determinar o estado magnético induzido em um corpo, pela ação de forças magnéticas externas.



AN ESSAY

ON THE

*APPLICATION*

OF

MATHEMATICAL ANALYSIS TO THE THEORIES OF
ELECTRICITY AND MAGNETISM.

BY

GEORGE GREEN.

Nottingham:

PRINTED FOR THE AUTHOR, BY T. WHEELHOUSE.

SOLD BY HAMILTON, ADAMS & Co. 33, PATERNOSTER ROW; LONGMAN & Co.; AND W. JOY, LONDON;
J. DEIGHTON, CAMBRIDGE;

AND S. BENNETT, H. BARNETT, AND W. DEARDEN, NOTTINGHAM.

1828.

*"Página título do Essay"*[11]

[11] Cannel (1998), p. 6.

**A Definição de Função Potencial**

No primeira seção da terceira parte Green introduz a função

$$V = \int \frac{\rho' dx' dy' dz'}{r'}$$

que ao final do parágrafo irá chamar de "função potencial" , " As this function, which gives in so simple a form the values of the forces by which a particle p of electricity, any how situated, is impelled, will recur very frequently in what follows, we have ventured to call it the potential function belonging to the system...”. [12]

Isto é feito da seguinte forma: Considere uma distribuição de cargas elétricas em um corpo com uma forma qualquer. Sejam $x'$, $y'$ e $z'$ as coordenadas retangulares de uma partícula desse corpo e ρ' a densidade de eletricidade nesta partícula; desse modo sendo $dx'dy'dz'$ o volume da partícula, $\rho'dx'dy'dz'$ será a quantidade de eletricidade que ela contem. Sendo r' a distância entre essa partícula e um ponto p exterior ao corpo, cujas coordenadas são $x, y$ e $z$, $V$ representa a soma de todas as partículas de eletricidade dividida por sua respectiva distância a esse ponto; e então teremos $r' = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ e

$$V = \int \frac{\rho' dx' dy' dz'}{r'}$$

A integral incluindo todas as partículas na massa eletrificada considerada. Notemos que *V* é uma função nas variáveis $x, y$ e $z$ e $\rho'$ é uma função nas variáveis $x'$, $y'$ e $z'$.

A seguir ele observa que Laplace demonstra, em sua Mec. Celeste[13], que a função V satisfaz a equação[14].

$$0 = \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2}$$

e como irá freqüentemente usar esta equação ele a escreve na forma abreviada $0 = \delta V$. Então ele observa:

---

[12] Green, G. (1828), pag. 359.

[13] Mécanique Celeste, obra composta de 5 volumes publicada de 1799 a 1825.

[14] Lagrange, em uma memória sobre o movimento de corpos gravitacionais, tinha mostrado que as componentes da força de atração em qualquer ponto pode ser simplesmente expressa como a derivada da função que é obtida adicionado-se as massa de todas as partícula de um sistema atrativo, cada uma dividida pela sua distância do ponto; e Laplace tinha mostrado que esta função V satisfaz a equação $\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0$.

*"In order to prove that $0=\delta V$, we have only to remark, that by differentiation we immediately obtain $0=\delta\frac{1}{r'}$, and consequently each element of V substituted for V in the above equation satisfies it; hence the hole integral ( being considered as the sum of all these elements) will also satisfy it".*

Em minha leitura a integral acima é considerada como uma soma de elementos da forma $\frac{\rho'\,dx'\,dy'\,dz'}{r'}$. Como em cada um desses elementos somente $r'$ é função das variáveis $x$, y e $z$, temos que

$$\delta\frac{\rho'\,dx'\,dy'\,dz'}{r'} = \rho' dx' dy' dz'\,\delta\frac{1}{r'} = 0,$$

e portanto segue da propriedade de que a derivada de uma soma é a soma das derivadas que

$$\delta V = \delta\int\frac{\rho' dx' dy' dz'}{r'} = \int\delta\frac{\rho' dx' dy' dz'}{r'} = 0 \ .$$

Sob o ponto de vista atual, se o ponto p não pertence à região de integração , o que temos aqui é um problema de derivação sob o sinal de integração, já que as coordenadas $x$, y e $z$ do ponto p não são variáveis de integração mas sim parâmetros e *V* é função desses parâmetros. Desse modo a regra de Leibniz justificaria essa passagem, pois o integrando teria derivadas parciais em relação a $x$, $y$, $z$ contínuas.

A seguir Green diz que esse raciocínio deixa de ser bom quando o ponto p está dentro do corpo, para ele, os coeficientes de alguns dos elementos que entram em *V* tornam-se infinitos e portanto não segue necessariamente que V satisfaça a equação, embora cada um dos seus elementos, considerados separadamente, possam satisfaze-la. Essa observação de Green é curiosa pois, poderíamos pensar que se *p* é um ponto no interior do corpo então $r'$ é igual a zero em *p* e desse modo "o coeficiente de um dos elementos de *V* é infinito e portanto neste caso sempre haveria um elemento de *V* que necessariamente não satisfaz $0=\delta V$. Mas para Green um corpo carregado é formado por partículas, e cada partícula tem coordenadas bem definidas $x', y'\ e\ z'$. Desse modo, se *p* é um ponto no interior do corpo, para algumas partículas $r' = \sqrt{(x-x') + (y-y') + (z-z')}$ será infinitesimal[15] ou mesmo igual a zero e assim em ambos os casos $\frac{1}{r'}$ será infinito. Mas sob o ponto de vista da física só faz sentido calcular $\frac{\rho'\,dx'\,dy'\,dz'}{r'}$ para o caso em que $\rho'$ é diferente de zero. Desse modo caso aconteça de $\rho' = 0$ nos pontos onde $r' = 0$ e

[15] Para aqueles pontos infinitesimalmente próximos de p.

infinitesimal[16] nos pontos infinitesimalmente próximos de p, então os termos correspondentes serão nulos ou pelo menos finitos e portanto seu laplaciano será nulo. Isto explicaria porque Green diz que o raciocínio que expõe anteriormente deixa de ser bom quando o ponto está dentro do corpo já que alguns do coeficientes de alguns dos elementos que entram na em *V* tornam-se infinitos, embora cada um dos elementos pensados separadamente possam satisfazê-la.

Para determinar o valor de $\delta V$ para pontos no corpo Green imagina uma esfera excessivamente pequena, com raio $a$, incluindo o ponto *p* no seu interior a uma distância $b$ do seu centro, sendo os valores de $a$ e $b$ quantidades excessivamente pequenas. O valor de *V* pode então ser considerado como composto de duas partes, uma devida à esfera e a outra à toda massa exterior a ela. Mas para essa última parte $\delta V = 0$ e desse modo nós temos que determinar o valor de $\delta V$ apenas para a pequena esfera, cujo valor é conhecido ser

$$\delta(2\pi a^2 \rho - \frac{2}{3}\pi b^2 \rho);$$

sendo $\rho$ igual à densidade dentro da esfera e portanto ao valor de $\rho'$ em *p*. Se $x_1, y_1$ e $z_1$ são as coordenadas do centro da esfera, nós temos

$$b^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2$$

e portanto

$$\delta(2\pi a^2 \rho - \frac{2}{3}\pi b^2 \rho) = -4\pi\rho$$

Desse modo, nos pontos do interior corpo temos

$$0 = \delta V + 4\pi\rho ;$$

da qual a equação $0 = \delta V$, para qualquer ponto exterior ao corpo, é uma caso particular, visto que, aqui $\rho = 0$.

O fato que, para a esfera de raio $a$, $\delta V$ é conhecido ser $\delta(2\pi a^2 \rho - \frac{2}{3}\pi b^2 \rho)$ não é justificado por Green e nem é dada uma referência onde esse resultado possa ser encontrado. Mas Green no artigo 4 fornece a seguinte fórmula para a função potencial nos pontos exteriores e interiores a uma esfera carregada, de raio $a$, com centro na origem do sistema de coordenadas e densidade constante $\rho$:

$$V = 4\pi\rho a$$

[16] mas de tal modo que o quociente por r seja finito, pelo menos.

$$V\,' = \frac{4\pi a^2 \rho}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}};$$

onde $V$ e $V'$ nos fornecem o potencial para pontos no interior e no exterior da esfera, respectivamente.

Se considerarmos, como faz Green, uma pequena esfera de raio $a$, cujo centro é a origem do sistema de coordenadas, com o ponto $p$ situado a uma distância $b$ do centro dessa esfera, então o potencial no ponto $p$ será composto de duas partes; uma devida à esfera de centro na origem e raio $b$ e a outra devida ao sólido esférico compreendido entre a esfera de raio $b$ e a esfera de raio $a$.

Para calcularmos o potencial devido à esfera sólida de raio $b$, imaginemos esta esfera constituída por um infinidade de superfícies esféricas de raio $r$, com $0 < r < b$. Então, da fórmula acima, sendo $p$ é um ponto exterior à esfera de raio $r$, o potencial em p devido a esta esfera será dado por $V\,' = \dfrac{4\pi \rho r^2}{b}$ e portanto o potencial em $p$ devido à esfera de raio $b$ será $\int_0^b \dfrac{4\pi\rho\, r^2}{b}\,dr$ que é igual a $\dfrac{4}{3}\pi \rho b^2$.

Para calcularmos o potencial em $p$ devido ao sólido esférico compreendido entre a esfera de raio b e a esfera de raio $a$, imaginemos este sólido decomposto em uma infinidade de superfícies esféricas de raio $r$, $b < r < a$. O potencial no ponto $p$, devido a cada uma dessa superfícies esféricas, será então dado por $V = 4\pi\rho\, r$, já que o ponto $p$ está no interior de cada uma dessas esferas. Logo, o potencial no ponto $p$ devido ao sólido esférico será dado por $\int_b^a 4\pi\rho\, r\, dr$ que é igual a $2\pi \rho a^2 - 2\pi \rho b^2$.

Desse modo o potencial em $p$ devido a todo o sólido esférico de raio $a$ será

$$2\pi \rho a^2 - 2\pi \rho b^2 + \frac{4}{3}\pi \rho b^2 = 2\pi \rho a^2 - \frac{2}{3}\pi \rho b^2 \quad ,$$

como afirma Green.

E continua Green:

*"Let now $q$ be any line terminating in the point, supposed without the body, then $-(\dfrac{dV}{dq})$ = the force tending to impel a particle of positive electricity in the direction of $q$, and tending to increase it . This is evident , because each of the elements of $V$ substituted*

*for V in* $-(\frac{dV}{dq})$ *,will give the force arising from this element in the direction tending to increase* $q$ *, and consequently,* $-(\frac{dV}{dq})$ *will give the sum of all the forces due to every element of V, or the total force acting on* $p$ *in the same direction." In order to show that this will still hold good, although the point* $p$ *be within the body; conceive the value of* $V$ *to be divided in two parts as before, and moreover let* $p$ *be at surface of small sphere or* $b = a$ *, then the force exerted by this small sphere will be expressed by*

$$\frac{4}{3}\pi\, a\, \rho\, (\frac{da}{dq})\ ;$$

$da$ *being the increment of the radius a, corresponding to the increment* $dq$ *of* $q$ *, which force evidently vanishes when* $a = 0$*: we need therefore have regard only the part due to the mass exterior to the sphere, and this is evidently equal to*

$$V - \frac{4\pi}{3} a^2 \rho\,.$$

*But as the first differentials of this quantity are the same as those of* $V$ *when* $a$ *is made to vanish, it is clear, that whether the point* $p$ *be within or without the mass, the force acting upon it in the direction of* $q$ *increasing, is always given by* $-(\frac{dv}{dq})$ *.*

Devemos observar que a força aplicada por uma partícula do corpo, de coordenadas $x'$, $y'$, $z'$, em uma partícula de carga positiva igual a unidade, colocada em $p$ é dada por $\frac{\rho' dx' dy' dz'}{(r')^2}$ e está aplicada na direção do raio $r'$. A projeção dessa força na direção do eixo $x$ é dada por $\frac{\rho' dx' dy' dz' (x - x')}{(r')^3}$ que é justamente

$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{\rho' dx' dy' dz'}{r'}\right).$$

Desse modo $-(\frac{dV}{dx}) = \int -\frac{d}{dx}\left(\frac{\rho' dx' dy' dz'}{r'}\right)$ nos dá a força total exercida pelo corpo, nessa partícula, na direção do eixo $x$. De maneira análoga temos que $-(\frac{dV}{dy})$ e $-(\frac{dV}{dz})$ nos dão a força total exercida pelo corpo, nas direções dos eixos $y$ e $z$ respectivamente. Como esses valores independem do sistema de eixo coordenados, podemos no caso da linha $q$, escolhermos um sistema de coordenas onde essa linha seja um dos eixos coordenados e desse modo $-(\frac{dV}{dq})$ será a força que tende a impelir uma partícula de carga positiva na direção de $q$.

Finalizando, Green considera o caso de diversos corpos:

*Although in what precedes we have spoken of one body only, the reasoning there employed is general, and will apply equally to a system of any number of bodies whatever, in those cases even, where there is a finite quantity of electricity spread over their surface, and it is evident that we shall have for a point $p$ in the interior of any one of these bodies*

$$(1.) \qquad 0 = \delta V + 4\pi\rho$$

*Moreover, the force tending to increase a line $q$ end in any point $p$ within or without the bodies, will be likewise given by $-(\frac{dV}{dq})$; the function $V$ representing the sum of all the electric particles in the system divided by their respective distance from $p$. As this function, which gives in so simple a form the values of the forces by which a particle $p$ of electricity, any how situated, is impelled, will recur very frequently in what follows, we have ventured call it the potential function belonging to the system, and it will evidently be a function of the co-ordinates of the particle $p$ under consideration.*

Realmente o caso de diversos corpos é uma conseqüência imediata do que Green mostra anteriormente, pois, se o ponto está no interior de um dos corpos e $V'$ é a função potencial proveniente do corpo que contém $p$ então teremos que $0 = \delta V' + 4\pi\rho$. Para os outros corpos como $p$ está no exterior de cada um deles é claro que $0 = \delta V'$, sendo $V'$ a função potencial proveniente de cada um deles. Desse modo se $V$ é a função potencial total ela claramente satisfaz a equação (1.).

**As Cargas Elétricas em um Condutor em Equilíbrio.**

No segunda seção, como uma aplicação do que havia mostrado antes, Green demonstra que as cargas elétricas em um condutor perfeito residem na superfície do condutor.

" *It has been long known from experience, that whenever the electric fluid is in a state of equilibrium in any system whatever of perfectly conducting bodies, the whole of electric fluid will be carried to the surface of those bodies, without the smallest portion of electricity remaining in their interior: but I do not know that this has been shown to be necessary consequence of the law of electric repulsion, which is found to take place in nature. This however may be shown to be the case for every imaginable system of conducting bodies, and is an immediate consequence of what has preceded. For let* $x$, y e $z$*, be the rectangular co-ordinates of any particle p in the interior of one of the bodies; then will* $-\left(\frac{dV}{dx}\right)$*, be the force with which p is impelled in the direction of the co-ordinate* $x$*, and tending to increase it. In the same way* $-\left(\frac{dV}{dy}\right)$ *and* $-\left(\frac{dV}{dz}\right)$ *will be the forces in* $y$ *and* $z$*, and since the fluid is in equilibrium all these forces are equal to zero: hence*

$$0 = \frac{dV}{dx}dx + \frac{dV}{dy}dy + \frac{dV}{dz}dz = dV$$

*which equation being integrated gives* $V =$ *const. This value of* $V$ *being substituted in the equation (1) of the preceding number gives* $\rho = 0$*, and consequently shows, that the density of the electricity at any point in the interior of any body is the system is equal to zero.*

*The same equation (1) will give the value of* $\rho$ *the density of the electricity in the interior of any of the bodies, when there are not perfect conductors, provided we can ascertain the value of the potential function* $V$ *in their interior.*

É interessante observar também que Green utiliza o termo "fluído elétrico" para se referir ao que hoje chamamos cargas elétricas. Partindo do fato de que $-\frac{dV}{dx}, -\frac{dV}{dy}, -\frac{dV}{dz}$, são as forças com que p é impelido na direção dos eixos x, y, z respectivamente e desde que em um fluído em equilíbrio todas essas forças são iguais a zero. Então ele conclui que $dV=0$ o que acarreta V = const.. Segue então da equação $0=\delta V+4\pi\rho$ , que $\rho=0$, ou seja, que a densidade de eletricidade no interior de qualquer corpo condutor em equilíbrio é zero.

**O Teorema de Green e as Fórmulas de Green.**

É na terceira seção que Green enuncia e demonstra o que hoje chamamos "Teorema de Green", ou *"Segunda fórmula de Green". Ele é enunciado do seguinte modo:*

*"Let $U$ and $V$ be two continuous functions of the rectangular co-ordinates $x$, $y$, $z$, whose differential co-efficients do not become infinite at any point within a solid body of any form whatever; then will*

$$\int dxdydz\, U\,\delta V + \int d\sigma\, U\left(\frac{dV}{dw}\right) = \int dxdydz\, V\delta U + \int d\sigma\, V\left(\frac{dU}{dw}\right);$$

*the triple integral extending over the whole interior of the body, and those relative to $d\sigma$, over its surface,of which $d\sigma$ represents an element : $dw$ being an infinitely small line perpendicular to the surface, and measured from this surface towards the interior of the body*[17].

Inicialmente ele demonstra, usando integração por partes que,

$$\int dxdydz\{\left(\frac{dV}{dx}\right)\left(\frac{dU}{dx}\right)+\left(\frac{dV}{dy}\right)\left(\frac{dU}{dy}\right)+\left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dU}{dz}\right)\}=-\int d\sigma V\,\frac{dU}{dw}-\int dxdydzV\delta U$$

;

hoje conhecida como "Primeira fórmula de Green", e que atualmente é demonstrada usando o teorema da divergência. Então ele troca U e V na fórmula acima e toma a diferença entre as duas fórmulas obtidas, demonstrando o resultado desejado.

Para demonstrar a sua primeira fórmula Green considera a integral tripla

$$\int dxdydz\{\left(\frac{dV}{dx}\right)\left(\frac{dU}{dx}\right)+\left(\frac{dV}{dy}\right)\left(\frac{dU}{dy}\right)+\left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dU}{dz}\right)\}$$

e diz que o método de integração por parte reduz esta integral à

$$\int dydzV''\frac{dU''}{dx} - \int dydzV'\frac{dU'}{dx} + \int dxdzV''\frac{dU''}{dy} - \int dxdzV'\frac{dU'}{dy}$$

---

[17] *Sejam U e V duas funções contínuas das coordenadas retangulares x, y, z, cujos coeficientes diferenciais não se tornam infinitos em qualquer ponto de um corpo sólido com um formato qualquer; então*

$$\int dxdydz U\delta V+\int d\sigma U\left(\frac{dV}{dw}\right)=\int dxdydz V\delta U+\int d\sigma V\left(\frac{dU}{dw}\right)$$

*A integral tripla estendida sobre todo o interior do corpo; e aquelas relativas a $d\sigma$, sobre sua superfície, da qual $d\sigma$ representa um elemento: sendo $dw$ uma linha, infinitamente pequena, perpendicular á superfície, medida da superfície em direção ao interior do corpo.*

$$+\int dxdyV''\frac{dU''}{dz}-\int dxdyV'\frac{dU'}{dz}-\int dxdydzV\{\frac{d^2U}{dx}+\frac{d^2U}{dy}+\frac{d^2U}{dz}\}$$

onde os acentos colocados nas quantidades indicam[18], como é usual, os valores daquela quantidade nos limites da integral, que neste caso estão na superfície do corpo, em cujo interior as integrais triplas estão estendidas.

Green não indica como aplicar o método de integração por partes, mas se tomarmos $u=\frac{dU}{dx}$ , $dv=\frac{dV}{dx}dx$ e aplicarmos integração por partes ao termo $\frac{dV}{dx}\frac{dU}{dx}dx$ obteremos $\int dydzV''\frac{dU''}{dx}-\int dydzV'\frac{dU'}{dx}+\int dxdydzV\{\frac{d^2U}{dx}\}$ .

Procedendo de maneira análoga com os outros termos, obteremos os termos restantes.

A seguir ele afirma que devido ao fato de $dw$ ser em todo lugar perpendicular à superfície do sólido e $d\sigma''$ ser um elemento da superfície correspondente a $dydz$ temos que $dydz=-\frac{dx}{dw}d\sigma''$ e consequentemente por substituição obteremos.

$$\int dydzV''\frac{dU''}{dx}=-\int d\sigma''\frac{dx}{dw}V''\frac{dU''}{dx} .$$

Da mesma maneira, ele afirma, com relação ao termo $-\int dydzV'\frac{dU'}{dx}$ , devido aos menores valores de $x$, obteremos

$$-\int dydzV'\frac{dU'}{dx}=-\int d\sigma'\frac{dx}{dw}V'\frac{dU'}{dx} ,$$

pois $dydz=+\frac{dx}{dw}d\sigma'$.

Então desde que a soma dos elementos representados por $d\sigma'$, junto com aqueles representados por $d\sigma''$, constituem toda a superfície do corpo, nós obtemos adicionando-se essas duas partes

$$\int dydz\,(V''\frac{dU''}{dx}-V'\frac{dU'}{dx})=-\int d\sigma\frac{dx}{dw}V\frac{dU}{dx} ,$$

onde a integral relativa a $d\sigma$ está estendida a toda a superfície, e $dx$ é o incremento de $x$ correspondente ao incremento $dw$.

Precisamente do mesmo modo nós temos

[18] Como observa Green.

$$\int dxdz\,(V''\frac{dU''}{dy} - V'\frac{dU'}{dy}) = -\int d\sigma \frac{dy}{dw} V \frac{dU}{dy}$$

$$\int dxdy\,(V''\frac{dU''}{dz} - V'\frac{dU'}{dz}) = -\int d\sigma \frac{dz}{dw} V \frac{dU}{dz} \quad .$$

Consequentemente, a soma de todas as integrais duplas, na expressão anteriormente dada, será obtida adicionando-se a três partes já encontradas. Então temos

$$-\int d\sigma V \left\{ \frac{dU}{dx}\frac{dx}{dw} + \frac{dU}{dy}\frac{dy}{dw} + \frac{dU}{dz}\frac{dz}{dw} \right\} = -\int d\sigma V \frac{dU}{dw} \;;$$

onde $V$ e $\frac{dU}{dw}$ representam os valores na superfície do corpo.

Segue então, que a integral

$$\int dxdydz\{\left(\frac{dV}{dx}\right)\left(\frac{dU}{dx}\right)+\left(\frac{dV}{dy}\right)\left(\frac{dU}{dy}\right)+\left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dU}{dz}\right)\}$$

torna-se

$$-\int d\sigma V \frac{dU}{dw} - \int dxdydz V \delta U \,.$$

Como o valor desta integral acima permanece inalterado se substituirmos $V$ por $U$, e reciprocamente, é claro que a integral anterior poderá também ser expresso por

$$-\int d\sigma U \frac{dV}{dw} - \int dxdydz U \delta V \,.$$

Se igualarmos então estas duas expressões da mesma quantidade, após termos trocado seus sinais, teremos

$$(2.) \qquad \int d\sigma V \frac{dU}{dw} + \int dxdydz V \delta U = \int d\sigma U \frac{dV}{dw} + \int dxdydz U \delta V \,.$$

A seguir Green diz:

*In our enunciation of the theorem, we have supposed the differentials of $U$ e $V$ to be finite within the body under consideration, a condition, the necessity of which does no appear explicitly in the demonstration, but, which is understood in the method of integration by parts there employed.*

*In order to show more clearly the necessity of this condition, we will now determine the modification which the formula must undergo, when one of the function, $U$ for example, becomes infinite within the body; and let us suppose it to do so in one point*

$p'$ *only: moreover, infinitely near this point let* $U$ *sensibly equal to* $\frac{1}{r}$*;* $r$ *being the distance between the point* $p'$ *and the element* $dxdydz$*. Then if we suppose an infinitely small sphere whose radius is* $a$ *to be described round* $p'$*, it is clear that our theorem is applicable to the whole of the body exterior to this sphere, and since,* $\delta U = \delta \frac{1}{r} = 0$ *within this sphere, it is evident, the triple integrals may be still be supposed to extend over the whole body, as the greatest error that this supposition can induce, is a quantity of order* $a^2$*. Moreover, the part of* $\int d\sigma V \frac{dU}{dw}$ *due to this same surface, which, since we have here* $\frac{dU}{dw} = \frac{dU}{dw} = \frac{d\frac{1}{r}}{dr} = \frac{-1}{dr^2} = \frac{-1}{a^2}$*, becomes* $-4\pi V'$ *when the radius* $a$ *is supposed to vanish. Thus, the equation* (2.) *becomes*

$$\text{(3.)} \qquad \int dxdydzU\delta V + \int d\sigma U\left(\frac{dV}{dw}\right) = \int dxdydzV \quad \delta U + \int d\sigma V\left(\frac{dU}{dw}\right) - 4\pi V'$$

*;*

*where, as in the former equation, the triple integrals extend over the whole volume of the body, and those relative to* $d\sigma$*, over its exterior surface:* $V'$ *being the value of* $V$ *at the point* $p'$.

Farei a seguinte leitura desse trecho:

Denotemos por $S'$ a esfera sólida infinitamente pequena de raio $a$ com centro em $p'$, por $S$ a superfície desta esfera, por $\tau'$ o corpo menos a esfera, Consideremos $U = \frac{1}{r}$ sendo $r$ a distância entre $p'$ e um elemento $dxdydz$. Então

$$\int dxdydzU\delta V = \int_{\tau'} dxdydzU\delta V + \int_{S'} dxdydzU\delta V$$

$$\int dxdydzV\delta U = \int_{\tau'} dxdydzV\delta U + \int_{S'} dxdydzV\delta U$$

Além disso, considere uma segunda esfera de raio $b$, com centro em $p'$ contida na esfera anterior. Denotemos por $\sigma''$, o corpo constituído pela primeira esfera menos a segunda, e por $E$ a superfície da segunda esfera.

Como, $\delta U = \delta \frac{1}{r} = 0$ no sólido $\sigma''$ então temos:

$$\int_{\sigma''} dxdydzV\delta U = 0 .$$

Além do, mais quando $b$ tende a zero, $\sigma''$ tende à esfera $S'$ e portanto

$$\int_{'} dxdydzV\delta U = 0 .$$

Logo segue da fórmula acima que

$$\int dxdydzV\delta U = \int_{\sigma'} dxdydzV\delta U .$$

Por outro lado

$$\int_{\sigma''} dxdydzU\delta V = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_b^a drd\theta d\phi \frac{1}{r} r^2 \operatorname{sen}\phi\, \delta V =$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_b^a drd\theta d\phi\, r \operatorname{sen}\phi\, \delta V \leq \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_b^a drd\theta d\phi\, r \operatorname{sen}\phi\, M = 2\pi K(a^2 - b^2) ;$$

onde $K$ é o máximo de $\delta V$ em $\sigma''$. Desse modo quando o raio $b$ vai para 0 temos que $\sigma''$ dará a esfera sólida de raio $a$, e assim

$$\int_{S'} dxdydzU\delta V = 2\pi K a^2 .$$

Portanto

$$\int dxdydzU\delta V = \int_{\tau'} dxdydzU\delta V + 2\pi K a^2 .$$

Segue então que

$$\int dxdydzU\delta V - \int dxdydzV\delta U = \int_{\tau'} dxdydzU\delta V - \int_{\tau'} dxdydzV\delta U + 2\pi K a^2$$

Mas o teorema demonstrado por Green se aplica no caso do corpo $\tau'$ ; logo temos

$$\int_{\tau} d\sigma V \frac{dU}{dw} - \int_S d\sigma V \frac{dU}{dw} + \int_{\tau'} dxdydzV\delta U = \int_{\tau} d\sigma U \frac{dV}{dw} - \int_S d\sigma U \frac{dV}{dw} + \int_{\tau'} dxdydzU\delta V .$$

Ou seja

$$\int_{\tau'} dxdydzU\delta V - \int_{\tau'} dxdydzV\delta U = \int_{\tau} d\sigma V \frac{dU}{dw} - \int_S d\sigma V \frac{dU}{dw} - \int_{\tau} d\sigma U \frac{dV}{dw} + \int_S d\sigma U \frac{dV}{dw}$$

E podemos então rescrever a fórmula anterior como:

$$\int dxdydzU\delta V \ - \int dxdydzV\delta U \ = \int_\tau d\sigma V\frac{dU}{dw} \ - \int_S d\sigma V\frac{dU}{dw} \ -$$

$$\int_\tau d\sigma U\frac{dV}{dw} \ + \int_S d\sigma U\frac{dV}{dw} \ - \ 2\pi K a^2 .$$

Como $U = \frac{1}{r}$ então $\frac{dU}{dw} = \frac{dU}{dr} = \frac{d\frac{1}{r}}{dr} = \frac{-1}{r^2}$ em $\tau''$; e teremos que $\frac{dU}{dw} = \frac{-1}{a^2}$ em $S$. Assim

$$-4\pi m \ = \ \frac{-1}{a^2}m4\pi a^2 \ = \frac{-1}{a^2}m\int_S d\sigma \quad \leq \int_S d\sigma V\frac{dU}{dw} \quad \leq \ \frac{-1}{a^2}M\int_S d\sigma \ =$$

$$\frac{-1}{a^2}M4\pi a^2 \ = \ -4\pi M ,$$

onde $m$ e $M$ são respectivamente o mínimo e o máximo de $V$ em $S$. Ou seja

$$-4\pi m \ \leq \int_S d\sigma V\frac{dU}{dw} \ \leq \ -4\pi M$$

Além disso temos também que:

$$4\pi na \ = \int_S d\sigma\frac{1}{a}n \ \leq \int_S d\sigma U\frac{dV}{dw} \ \leq \int_S d\sigma\frac{1}{a}N \ = \ \frac{1}{a}N4\pi a^2 \ = \ 4\pi Na$$

onde n e $N$ são respectivamente o valor máximo e o valor mínimo de $\frac{dV}{dw}$ em $S$. Ou seja

$$4\pi na \ \leq \int_S d\sigma U\frac{dV}{dw} \ \leq \ 4\pi Na$$

Desse modo, quando $a$ tende a 0 obteremos:

$$\int dxdydzU\delta V \ - \int dxdydzV\delta U \ = \int_\tau d\sigma V\frac{dU}{dw} \ - \int_\tau d\sigma U\frac{dV}{dw} \ + \ 4\pi V',$$

onde $V'$ é o valor de $V$ no ponto $p'$, para o qual tendem $m$ e $M$, quando $a$ tende a 0.

Para finalizar esse artigo Green considera o caso em que tanto $U$ quanto $V$ tenham singularidades em dois pontos no interior do corpo. Do mesmo modo, escreve Green, se a função $V$ torna-se infinita em qualquer ponto $p''$ dentro do corpo, e além do mais, é igual a $\frac{1}{r'}$ infinitamente perto desse ponto, tal como $U$ o, é infinitamente perto do ponto $p'$, é evidente do que vimos anteriormente que teremos

(3.) $$\int dxdydzU\delta V + \int d\sigma U\left(\frac{dV}{dw}\right) - 4\pi U'' = \int dxdydzV\delta U + \int d\sigma V\left(\frac{dU}{dw}\right) - 4\pi V'$$

as integrais sendo tomadas como antes, e $U''$ representando o valor de $U$, no ponto $p''$ onde $V$ torna-se infinita. O mesmo processo aplica-se evidentemente por maior que seja a quantidade de pontos similares pertencendo às funções $U$ e $V$.

Em resumo, finaliza Green, chamaremos valores singulares de uma função aqueles valores onde seus coeficientes diferenciais tornam-se infinitos, e a condição originalmente imposta a $U$ e a $V$ será expressa dizendo, que nenhuma delas tem qualquer valor singular dentro do corpo sólido sob consideração.

**Potencial e a Distribuição de Cargas**

Na seção 4, Green determina algumas relações entre a densidade de cargas elétricas na superfície de um corpo e a função potencial em pontos dentro e fora do corpo, estando o corpo em equilíbrio.

Inicialmente ele observa que se $\rho d\sigma$ é a quantidade de eletricidade de um elemento $d\sigma$ da superfície, $V$ o valor da função potencial em um ponto $p$ dentro dela, cujas coordenadas são $x, y, z$; e $V$ 'o valor da função potencial em um ponto $p'$ exterior à superfície, tem-se

$$V = \int \frac{\rho d\sigma}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}}$$

$$V' = \int \frac{\rho d\sigma}{\sqrt{(\xi - x')^2 + (\eta - y')^2 + (\zeta - z')^2}}$$

onde $\xi, \eta, \zeta$ são as coordenadas de $d\sigma$; $x', y', z'$ as coordenadas do ponto $p'$ e a s integrais estão calculadas sobre a superfície do corpo. Mas, que $V'$ não é obtida de $V$ simplesmente trocando $x, y, z$ por $x', y', z'$ pois a forma da função potencial muda "repentinamente" ao passar de um ponto do interior para um ponto do exterior da superfície. Para reforçar sua observação ele considera o caso em que a superfície do corpo é uma esfera de raio $a$ e centro na origem, e a densidade $\rho$ é constante; para a qual temos:

$$V = 4\pi\rho a$$

$$V' = \frac{4\pi a^2}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

as quais, segundo Green, são essencialmente funções distintas.

Atualmente, sob o ponto de vista matemático, essa observação parece estranha, mas sob o ponto de vista de um físico elas são essencialmente distintas já que o potencial em pontos no interior da superfície é constante e igual a $4\pi\rho a$ enquanto para pontos no exterior o potencial é inversamente proporcional à distância do ponto considerado até o centro da esfera. Isto só reforça o ponto de vista de que para Green, mesmo quando está demonstrando afirmações que ele considera como sendo afirmações matemáticas, o campo semântico onde ele constitui significados é o da eletricidade.

Green observa então que mesmo no caso geral as funções $V$ e $V'$ satisfazem a equação de Laplace

$$0 = \delta V \quad \text{e} \quad 0 = \delta V';$$

além disso, nenhuma delas terá valores singulares nos pontos do espaço nos quais elas estão definidas, e $\overline{V} = \overline{V'}$, ou seja, essas duas funções coincidem na superfície. A uma distância infinita dessa superfície devemos também ter $V' = 0$.

Ele então mostra que quaisquer que sejam duas funções que satisfaçam essas condições, existe uma único valor de $\rho$ que irá produzi-las. Para isto ele inicialmente aplica a fórmula (3.), para um ponto $p$ no interior do corpo, tomando $U = \frac{1}{r}$, obtendo

$$\int \frac{d\sigma}{r}\left(\frac{d\overline{V}}{dw}\right) = \int d\sigma \overline{V}\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dw}\right) - 4\pi V\,;$$

onde $r$ é a distância do ponto $p$ a um elemento $d\sigma$ e $V$ está calculada no ponto $p$; o qual é a única singularidade de $U$.

A seguir, ele considera uma superfície que contenha o corpo em seu interior, que esteja situada a uma distância infinita desse corpo, e aplica a fórmula (2.) a um ponto do espaço situado entre a superfície do corpo e essa superfície exterior imaginária, obtendo

$$\int \frac{d\sigma}{r}\left(\frac{d\overline{V'}}{dw'}\right) = \int d\sigma\overline{V'}\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dw'}\right) \quad ;$$

já que neste caso $U = \frac{1}{r}$ não possui valor singular, e a parte devida á superfície exterior pode ser desprezada, porque sobre ela $V' = 0$ e $dw'$ é medido da superfície em direção ao espaço exterior.

Podemos justificar esta última fórmula obtida por Green considerando uma esfera $S$ de raio $R$ contendo o corpo em seu interior. Aplicando-se então a fórmula (2.) ao espaço situado entre superfície e a esfera temos:

$$\int \frac{d\sigma}{r}\left(\frac{d\overline{V'}}{dw'}\right) + \int_S \frac{d\sigma}{r}\left(\frac{d\overline{V'}}{dw}\right) = \int d\sigma\overline{V'}\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dw'}\right) + \int_S d\sigma\overline{V'}\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dw}\right)$$

Mas $\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dw}\right) = \frac{d\frac{1}{r}}{dr} = -\frac{1}{r^2}$, que calculados em pontos da esfera $S$ é igual a $-\frac{1}{R^2}$, assim temos

$$\left|\int_S d\sigma\overline{V'}\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dw}\right)\right| = \left|\int_S d\sigma\overline{V'}\frac{-1}{R^2}\right| \leq \frac{1}{R^2} M \int_S d\sigma = \frac{M}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi M$$

onde $M$ é o valor máximo de $\left|\overline{V'}\right|$, isto é, o valor máximo de $\left|V'\right|$ sobre a esfera $S$ de raio $R$.

Se interpretarmos a afirmação de Green de que $V'$ é igual a zero a uma distância infinita da superfície, como sendo que $V'$ tende a 0 quando a distância do ponto considerado até o centro do sistema de coordenadas tende a zero, então temos que $M$ tende a 0 quando $R$ tende a infinito e portanto a integral acima tende a zero quando $R$ tende a infinito.

Por outro lado, como $\dfrac{d\overline{V'}}{dw}$ é a força com a qual uma partícula $p'$ colocada fora da superfície $S$, na mesma normal com $p$, e infinitamente próximo dela, é impelida para dentro na direção dessa normal então $\dfrac{d\overline{V'}}{dw} = \dfrac{-1}{R^2}N$ onde $N$ é a carga total do corpo, assim

$$\int_S \frac{d\sigma}{r}\left(\frac{d\overline{V'}}{dw}\right) = \int \frac{d\sigma}{R}\frac{-1}{R^2}N = \frac{-1}{R^3}N\int_S d\sigma = \frac{-1}{R^2}N 4\pi R^2 = \frac{-1}{R}4\pi N$$

que tende a zero quando $R$ vai para o infinito.

Logo quando $R$ vai para o infinito temos:

$$\int \frac{d\sigma}{r}\left(\frac{d\overline{V'}}{dw'}\right) = \int d\sigma\overline{V'}\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dw'}\right) .$$

...consequentemente, continua Green,

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dw}\right) = -\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dw'}\right) \quad \text{ou seja} \quad 0 = \left(\frac{d\frac{1}{r}}{dw}\right) + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{dw'}\right)$$

e esta equação reduz a soma das duas anteriores a

$$\int \frac{d\sigma}{r}\left\{\left(\frac{d\overline{V}}{dw}\right) + \left(\frac{d\overline{V'}}{dw'}\right)\right\} = -\,4\pi V .$$

Do mesmo modo, se tomarmos um ponto $p'$ exterior à superfície , nós obteremos

$$\int \frac{d\sigma}{r'}\left\{\left(\frac{d\overline{V}}{dw}\right) + \left(\frac{d\overline{V'}}{dw'}\right)\right\} = -\,4\pi V' .$$

Portanto existe uma valor de $\rho$ que nos fornece as funções $V$ e $V'$ dentro e fora da superfície, a saber[19]

$$\rho = \frac{-1}{4\pi}\left\{\left(\frac{d\overline{V}}{dw}\right) + \left(\frac{d\overline{V'}}{dw'}\right)\right\}$$

Para obtermos essa última conclusão de Green, basta compararmos as duas fórmulas anteriores com aquelas que definem $V$ e $V'$.

Em seguida Green mostra que existe uma única distribuição $\rho$ que pode produzir $V$ e $V'$ como correspondentes funções potenciais.

Novamente, $-\left(\frac{d\overline{V}}{dw}\right)$ = força com a qual uma partícula de eletricidade positiva $p$, colocada dentro da superfície e infinitamente próxima dela, é impelida na direção $dw$ perpendicular a esta superfície, e dirigida para o interior; e $-\left(\frac{d\overline{V'}}{dw}\right)$ expressa a força com a qual uma partícula semelhante $p'$ colocada fora da superfície, na mesma normal de $p$, e também infinitamente próxima dela, é impelida para fora na direção desta normal: mas a soma dessas duas forças é igual ao dobro da força que um plano infinito exerceria sobre $p$, supondo-o uniformemente coberto com eletricidade de mesma densidade que o pé da normal na qual $p$ está; e esta última força é facilmente mostrado valer $2\pi\rho$, e desse modo

$$(4.) \qquad 4\pi\rho = -\left\{\left(\frac{d\overline{V}}{dw}\right) + \left(\frac{d\overline{V'}}{dw'}\right)\right\},$$

e conseqüentemente existe um único valor de $\rho$, que pode produzir $V$ e $V'$ como correspondentes funções potenciais.[20]

Finalizando a seção, Green comenta sobre o caso de diversos corpos.

Embora no que precede, consideramos a superfície de um único corpo, o mesmo argumento se aplica, por maior que possa ser o número de corpos, e as funções potenciais $V$ e $V'$ serão ainda dadas pela fórmula

[19] Green, G. (1828), p. 365.
[20] Idem, pag. 365

$$V = \int \frac{\rho d\sigma}{r} \qquad \text{e} \qquad V' = \int \frac{\rho d\sigma}{r'} \quad ;$$

a única diferença será que a integração deverá ser estendida às superfícies de todos os corpos; e o número de funções representadas por $V$, deverá ser agora igual ao número de corpos, uma para cada. Neste caso, se há um valor de $V$ para cada corpo, junto com $V'$ pertencente ao espaço exterior; e além do mais, se estas funções satisfazem as condições mencionadas acima, será sempre possível determinar a densidade, na superfície cada corpo, que produza esses valores para a função potencial, e haverá ao menos uma densidade, dada por

$$(4'.) \qquad 0 = 4\pi\rho + \left\{ \left( \frac{d\overline{V}}{dw} \right) + \left( \frac{d\overline{V'}}{dw'} \right) \right\}$$

que os produz: $\rho$, $\overline{\frac{dV}{dw}}$ e $\overline{\frac{dV'}{dw'}}$ pertencente a um ponto na superfície de qualquer um dos corpos.

**Alguma Considerações**

Green ao considerar as modificações que seu teorema deveria sofrer quando a função $U$ torna-se infinita dentro do corpo, obtendo a fórmula (3.), estava antecipando o que iria fazer na seção 5, quando introduziu uma técnica para resolver a equação $\delta V = 0$. Técnica que hoje é conhecida como "Funções de Green". Poderíamos perguntar se uma função com essas características realmente existe; Green apresenta a seguinte justificativa:

*Para nos convencermos de que existe uma função $U$ satisfazendo o que foi suposto; concebamos que a superfície seja um condutor perfeito, posto em comunicação com a terra, e uma unidade de carga positiva seja colocada em $p'$. Então a função potencial total proveniente de $p'$ e da eletricidade que será induzida na superfície, será o valor requerido para $U$. Em conseqüência da comunicação estabelecida entre a superfície condutora e a terra, a função potencial total na superfície deve ser constante, e igual à da terra, isto é, ser igual a zero (note que desse modo eles formam um único corpo condutor). Tomando-se esse potencial total para $U$, nós temos evidentemente que $0 = \overline{U}$, $0 = \delta U$, e $U = \frac{1}{r}$ naquelas partes infinitamente próximas a $p'$. Como além disso, essa função não tem outro ponto singular dentro da superfície, ela possui todas as propriedades assinaladas a $U$ na demonstração precedente.*

Kellogg em seu livro Fundamentos da Teoria do Potencial, à página 237, tece o seguinte comentário sobre esta justificativa de Green:

*..."Green himself argued that such a function existed from the physical evidence. Of course the static charge on S exists! We have here an excellent example of the value and the danger of intuitional reasoning. On the credit side is the fact that it led Green to a series of important discoveries, since well established. On the debit side is its unreliability for there, in fact, region for which Green's function does not exist"*[21].

Para Kellogg as considerações de Green, sobre a função $U$, não podem serem aceitas como prova de existência. Demonstrações de existência deste tipo temos muitas em matemática, vejamos dois outros exemplos que nos são fornecidos por Poincaré em seu livro O Valor da Ciência, na pag. 14:

*" Vejam, ao contrário, o sr. Klein: estuda uma das questões mais abstratas da teoria das funções; trata-se de saber se numa determinada superfície de Riemann existe sempre uma função que admite singularidades dadas. Que faz o célebre geômetra alemão? Substitui sua superfície de Riemann por uma superfície metálica cuja condutibilidade elétrica varia segundo certas leis. Põe dois de seus pontos em contato com os dois pólos de uma pilha. A corrente deverá passar – diz ele – , e o modo como essa corrente se distribuir na superfície definirá uma função cujas singularidades serão precisamente aquelas que são previstas pelo enunciado."* , mais à frente na pag. 16 temos : " *Tomarei como segundo exemplo o princípio de Dirichlet no qual se baseiam tantos teoremas da física matemática. Hoje o estabelecemos através de raciocínios muito rigorosos, mas muito longos; outrora, ao contrário, contentávamo-nos com uma demonstração sumária. Uma certa integral que depende de uma função arbitrária jamais pode anular-se. Daí se concluía que ela deve ter um mínimo. A falha desse raciocínio nos aparece imediatamente, porque empregamos o termo abstrato função, e porque estamos familiarizados com todas as singularidades que podem apresentar as funções quando consideramos essa palavra no sentido mais geral.*

*Mas não ocorreria o mesmo se tivéssemos utilizado imagens concretas; se, por exemplo, tivéssemos considerado essa função como um potencial elétrico; poderíamos ter julgado legítimo afirmar que o equilíbrio eletrostático pode ser atingido. Contudo, talvez uma comparação física tivesse despertado algumas vagas desconfianças. Mas se tivéssemos tomado o cuidado de traduzir o raciocínio para a linguagem da geometria, intermediária entre a da análise e a da física, provavelmente essas desconfianças não teriam ocorrido, e talvez assim pudéssemos, mesmo hoje, enganar muitos leitores não prevenidos*."

Com certeza o termo função, para Green, não tinha o mesmo significado que teve para Poincaré, Kellogg e atualmente para nós. O campo no qual Green constituía

[21] Segundo Kellogg um exemplo de uma região para a qual funções de Green não existem é dado por Lebesgue, Sur des cas d'impossibilité du probléme de Dirichlet, Comptes Rendus de la Société Mathématique de France, 1913, p. 17.

significados, para os seus objetos matemáticos, era a física. Seu conceito de função com certeza estava muito distante do conceito abstrato que passou a ter neste século.

Mas nossos atuais textos de cálculo, e por conseguinte os cursos de cálculo que temos ministrados nos últimos anos, têm seguido as considerações de Kellogg no que toca a não aceitar considerações físicas para a prova de existência de certas funções. Como conseqüência disto temos conseguido que nossos alunos, mesmo quando parecem entender teoremas como o de Green, não consigam aplicá-los. Não tendo eles, constituído um campo onde possam dar significados aos objetos matemáticos que não o da própria matemática, ficam privados de qualquer intuição. Incapacitados de qualquer descoberta. Tornam-se meros resolvedores de exercícios rotineiros. Perdem a capacidade de criação. Justamente aquilo que parece ter sido fundamental para Green, Klein, Gauss e muitos outros.

**Bibliografia**

Cannell, D. M. (1988). George Green, Miller and Mathematician 1793-1841, City of Nottingham Arts Departments. Nottingham.

Cannell, D. M. e Lord, N.J. (1993). George Green, Mathematician and Physicist, 1793-1841. Mathematical Gazette, vol. 7, no. 478, pp. 26-50.

Cannell, D. M. (1993). George Green: Mathematician and Physicist 1793-1841: The Background to his Life and Work. The Athlone Press. London.

Ferrers, N. M. (1871). Mathematical Papers of George Green. London. Reimpresso em 1970, sem correções exceto correções de errata, pela Chelsea Publishing Company, New York.

Green, G. (1828). "An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the theories of Electricity and Magnetism.". Journal für Mathematic 39, 1850, 73-89; 44, 1852, 356-74 e 47, 1854, 161-221.

Kellogg, O. D.(1953). Foundations Of Potential Theory. Dover Publications, Inc. Edição integral e inalterada da primeira edição publicada em 1929.

May, K. O. (1973). Bibliography and Research Manual of the History of Mathematics. University of Toronto Press. Toronto and Buffalo.

Poincaré, H. (1995 ). O Valor da Ciência. Editôra Contraponto, Rio de Janeiro.

Teixeira, M. V. (1998). George Green e o Cálculo de Várias Variáveis : Aspectos Epistemológicos numa Perspectiva Histórica. Tese de Doutoramento. IGCE-UNESP.

Thomson, W. (1884). Papers on Eletrostatics and Magnetism, 2ª edição, London: Macmillan. Primeira edição publicada em 1872.

Whittaker, E. T., (1989). A History of the Theories of Aether & Electricity. Dover Publications, Inc. New York. Esta é uma reedição completa e inalterada, em um único volume, da edição originalmente publicada em dois volumes, em 1951 e 1953 respectivamente, pela Thomas Nelson & Sons, Ltd. London.

**Marcos Vieira Teixeira** - Departamento de Matemática – IGCE – UNESP
Rua 10, 2527
13500-230 – Rio Claro – SP – Brasil
e-mail: marti@rc.unesp.br