Revista Brasileira de História da Matemática – Vol 2 nº 3 (Abril/2002) – pag. 65 - 91
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira da História da Matemática
ISSN 1519-955X

PROBLEMAS EPISTEMOLÓGICOS NO PERÍODO DE EMERGÊNCIA DO CÁLCULO INFINITESIMAL

Lígia Arantes Sad
UFES - Brasil

(encaminhado em fevereiro de 2002)

Resumo

Neste artigo proponho uma análise epistemológica de alguns importantes resíduos históricos inerentes ao cálculo infinitesimal. Essas produções matemáticas históricas desenvolveram idéias férteis que podemos ver relacionadas ao Cálculo até hoje. Particularmente, pensando em termos de uma abordagem epistemológica segundo o que se constitui como trilhas dos métodos infinitesimais, aparece em destaque o problema da antinomia entre o discreto e o contínuo: na continuidade dos entes geométricos, na divisibilidade *ad infinitum* ou na existência atomística dos indivisíveis desde a antigüidade.

Abstract

In this article I propose an epistemological analysis of some important historical remnants inherent to infinitesimal calculus. These historical mathematical productions have developed fertile ideas that are related to Calculus even today. Considering an epistemological approach related to what constitutes the tracks of infinitesimal methods, puts in evidence the problem of antinomy between the discrete and the continuous: in the continuity of geometrical objects, in the *ad infinitum* divisibility, or in the atomistic existence of the indivisible since ancient times.

INTRODUÇÃO

Em toda a história que envolve a constituição do que se chama hoje Cálculo, pode-se notar uma preocupação dos historiadores com a descrição fiel dos fatos, o que por um lado ideal é louvável, pois se compatibiliza ao desejo de poder estudar a composição dos mesmos e os problemas envolvidos a partir de fontes mais primárias. Contudo, por outro lado, menos ingênuo e mais realista, vale lembrar que, uma coisa é o fato (temporal) e outra é a interpretação do fato (pós-temporal); juntando-se a isso a constatação: o que se chama de história, foi estabelecido como verdade quando se formavam as nações já no séc XIX, com o objetivo de oferecer genealogias a essas novas representações políticas.

A História, enquanto discurso, é constituída por uma linguagem, e o significado da linguagem é constituído também na história. Portanto, inicialmente é preciso situar algumas das concepções ao recorrer-se a uma análise epistemológica de alguns fatos da História da Matemática.

Os textos de História embora tenham uma ampla riqueza em suas partes significantes, há sempre a interpretação de quem escreve e de quem lê, a qual é limitada, entre outras coisas, pelos interesses e pela formulação própria da linguagem, em termos de estipulações que embasam os principais fundamentos e problemas para o sujeito.

O porquê de voltar o olhar para a História tem seu sentido na necessidade presente de produção de conhecimentos (mas não de re-construção ou de compilação!) a partir de objetos de percepção do real ("como eu vejo atualmente") e da consciência de que esse real é também uma abstração advinda de muitos resíduos anteriores. Meu objetivo neste artigo é principalmente suscitar e destacar o quanto é rica uma análise epistemológica das questões a respeito do pensar matemático que se pode encontrar a partir da história da matemática. Em particular, proponho olhar sob uma abordagem epistemológica, para alguns fascinantes resíduos das construções inerentes ao cálculo infinitesimal.

Algumas noções de certo modo parecem "persistir" no tempo, influenciam outras e chegam até nós com significados e valores veiculados pela linguagem de hoje, incorporando-se ao próprio processo atual de produção de significados. É o caso, por exemplo, das noções relativas ao que se chama de *elemento infinitesimal* na Matemática. Ainda muito presentes, principalmente na constituição de campos semânticos[1] na Matemática e na Física.

O fato da produção dos objetos ser reportada historicamente a diferentes grupos sociais torna importante evidenciar a função semiótica (na representação pelo uso de signos, dos semas) e semântica (na produção de significados literais) na leitura dos discursos escolhidos para análise. Pois, ao se trabalhar uma investigação histórica, conduz-se a atenção às idéias articuladas a partir de um discurso (texto), observando as convergências e diversificações possíveis enquanto a produção de significados, objetos e conhecimentos, por sua vez, são também influenciadas e compelidas à convergência dos próprios significados atuais. A cultura institucionalizou esses significados e não outros (por ex., trabalha-se dentro do Cálculo Diferencial e Integral no séc. XX, e agora no XXI, muito mais guiado pelas concepções Weierstrassianas – método ε, δ - do que por concepções infinitesimais), por isso produz-se certos objetos e não outros.

Nesse contexto de investigação, a ligação presente com outras áreas da ciência é de importância nas análises; nele devem ser levadas em consideração não somente a natureza ontológica diferenciada das idéias, mas também o sentido de envolvimento com a

[1] Segundo a *Teoria dos Campos Semânticos* (LINS, R.C., *Struggling for survival: the production of meaning, Anais do BSRLM Meeting Sheffild, 1996)*, um ***campo semântico*** é um *modo de produção de significados*. E as ***estipulações locais*** (como as estipulações geométrica, algébricas, de limite, de infinitésimos, etc) são elementos básicos presentes nos núcleos dos campos semânticos no momento de produção de significados em meio a uma atividade.

matemática. Sentido este, nem sempre tendo no desenvolvimento da matemática seu objetivo central e direto, como os problemas de interesse maior de físicos e astrônomos.

Um outro fator que pode ser destacado refere-se ao que possa ter contribuído, durante o caminhar histórico, para essa mudança ou permanência da linguagem e do pensar, usada na produção de objetos matemáticos (por exemplo: infinitésimos por Newton e Leibniz) que estão ainda sendo evocados em termos da aprendizagem de Matemática e Física nas academias.

Particularmente, quando se olha para o transcorrer do desenvolvimento histórico do Cálculo, pensando em termos dessa análise dos discursos, seguindo o que se constitui como trilhas dos métodos infinitesimais, aparece em destaque o problema da antinomia entre o discreto e o contínuo: na continuidade dos entes geométricos, na divisibilidade *ad infinitum* ou na existência atomística dos indivisíveis desde a antigüidade.

Séculos e séculos se passaram e questões envolvendo o infinito ainda são motivadoras de estudos e disputas atuais entre as teorias rivais do *contínuum*, como a estabelecida na Arimetização da Análise – que pode ser considerada um completamento da reta racional e uma maneira de se esquivar das mônadas infinitesimais do continuum[2], que mais recentemente vieram a compor a chamada Análise não-Standard .

ANÁLISE EPISTEMOLÓGICA DE ALGUMAS QUESTÕES

Seguindo os resíduos remanescentes poder-se-ía começar desde a Antigüidade, observando a constituição por Aristóteles, partindo de noções de Eudoxo, de infinito potencial construído em um processo de "aumentação" dos números (gerados da unidade) e, ao mesmo tempo, a não aceitação de um processo de "diminuição" de modo análogo (dividindo indefinidamente) e obtendo quantidades tão pequenas quanto se queira, a não ser para as magnitudes (como no caso de certas entidades geométricas). O que é perfeitamente aceitável se a atenção for dirigida às necessidades daquela época e à consideração de números – coleções de unidades – como sendo somente os inteiros e suas partes (comensuráveis), enquanto que a idéia de continuidade era reservada à geometria, ou às provas geométricas por "absurdo", restritas a um campo semântico visual geométrico, como a que se pode encontrar em: "*num triângulo isósceles, a razão da hipotenusa (p) para um cateto (q) não pode ser dada em termos de uma razão p/q, com p e q inteiros"*, na qual Aristóteles mostra que se a hipotenusa e o lado fossem comensuráveis então ambos seriam entre si um número par ou ímpar. Bem distinto do modo de produção de significados

---

[2]Referimo-nos aqui a "c*ontinuum*" como sendo o continuum de Leibniz-Robinson, incorporando infinitésimos e infinitos, diferentemente do continuum de Weierstrass da "reta real". Mesmo na classificação imputada aqui a Liebniz e a Robson já temos nova categorização, apresentada por Peter Geach em periódico internacional University of California Publications in Philosophy, que distingue em *infinito sincategorimático* (no caso de um atributo infinito ser um pronome ou advérbio – existindo infinitamente muitos atributos) e em *infinito categorimático* (no caso de um atributo infinito ser um objeto lógico ou um predicado – cada atributo é um atributo infinito).

(campo semântico algébrico) que se usa hoje para demonstrar esse fato ou mesmo, de modo análogo, ao se demonstrar que $\sqrt{2}$ é irracional.

No entanto, em termos cronológicos e de produções matemáticas, vou dar um salto até algumas questões que no séc. XVII antecederam à produção de Newton e Leibniz para o Cálculo, sem me deter em alguns outros interessantes problemas pertinentes ao infinito e aos infinitésimos de épocas anteriores.

É preciso contudo lembrar que, os conhecimentos de Arquimedes e Leibniz são imensuráveis relativamente, apesar da teoria de Arquimedes parecer por vezes um caso particular ou semelhante da teoria de Newton e Leibniz a respeito de processo infinito. Pois, o mundo de Arquimedes teve que ser muito transformado, idéias morreram e outros significados foram produzidos, para chegar ao de Leibniz. Juntamente com esta transformação estão as mudanças de campos semânticos, que não são nem tão evidentes nem de fácil operacionalidade. Isto é, reconhecer e refletir sobre os significados produzidos na relação entre uma crença-afirmação e uma justificação de outra época, ou mesmo conseguir operar em um outro campo semântico que não seja aquele onde a justificativa é convencionalmente aceita, de onde houve a demanda dos significados (interlocutores a quem se deseja falar), não é fato naturalmente conseguido por imposição do novo e depende do sentido[3] como mola impulsionadora.

A passagem de um campo semântico a outro pode ser um longo caminho a transpor (até mesmo com obstáculo epistemológico), embora depois de percorrido pareça estarem muito próximos, devido a suas crenças-afirmações serem praticamente as mesmas e apenas as justificações serem diferentes (quando olhadas à luz da linguagem em que foram ditas); o que muitas vezes é confundido e veiculado nas idéias históricas "evolutivas", como se os "conhecimentos" pudessem seguir desde sempre num crescente desenvolvimento, mas em torno de uma mesma origem ou idéia.

Em produções do período da Idade Média, no que dizem respeito às concepções realçadas neste texto, destaco as de Fibonacci (Leonardo de Pisa) (1180-1250) _ ao tratar de problemas práticos que envolviam seqüências infinitas _ ou mesmo as de Nicole Oresme (c. 1323-1382) _ nos estudos de distância percorrida por um objeto com velocidade variável, nos quais além de classificar as variações (variáveis envolvidas) usa representação gráfica de quantidades variáveis (limitada às funções afins).

Para ele os termos *longitude* e *latitude* é semelhante ao que se chama de abscissa e ordenada (hoje). Em uma reta horizontal ele marcava pontos representando instantes de tempo (*longitudes*) e a partir desses pontos traçava segmentos verticais retilíneos (latitudes) representando a velocidade em cada um dos instantes considerados. (Fig. 1)

[3] Sentido usado como desejo que provoca o engajamento no refletir sobre.

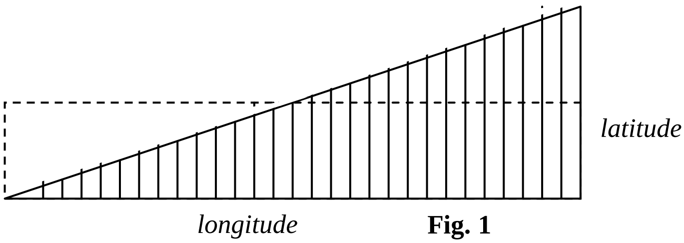


Fig. 1

> "*Toda qualidade* [quantidade] *uniformemente diforme* [taxa de variação constante] *terminando em intensidade zero é imaginada como um triângulo retângulo".* A área do retângulo representa a distância percorrida.
> (BOYER, 1974, p.193)

Ele inova com a área sob o "gráfico" como medida de distâncias (antecipando, na concepção de hoje, a integração em relação à derivação) e, além disso, nas representações da prova de que a série harmônica é divergente (a primeira que se conhece) pode-se observar que aparecem termos *infinitamente pequenos* ou mesmo (no caso de áreas) quantidade infinita de linhas geométricas (pois, imaginava a área do triângulo e do retângulo formados de segmentos de retas verticais em quantidade *infinitamente grande*).

O *horror "infiniti*" disseminado pelos gregos foi aos poucos substituído por discussões sobre infinito potencial e real (como algo pleno, completo), na passagem do discreto numérico para o contínuum real, no amalgama conseguido entre o pensamento aritmético (algébrico) e o pensamento geométrico (intuitivo). É pertinente aqui, a observação de uma lentidão maior de desenvolvimento do pensamento algébrico em relação ao geométrico até a Idade Moderna, o que promoveu por vezes uma dificuldade de relacionamento entre ambos e de validação das provas de modo mais algébrico. Tem-se, fundamentalmente, uma chamada "álgebra geométrica" (Katz, 1993, p.64; Kline,1972, p.924; Boyer,1974, p.79 e 176). Posteriormente, vista por Descartes (*La Geometría*, 1637) de um modo diferenciado, a partir de uma vinculação dos recursos da álgebra com o desenvolvimento da geometria.

Embora desde Arquimedes já se tivesse uma aproximação de valores de π, François Viète (1540-1603) foi o primeiro a dar uma expressão numérica precisa, como produto *infinito*, usando fórmula trigonométrica recursiva $a_{2n} = a_n$ sec p/n (onde a_n é a área do polígono regular inscrito de n lados) e fazendo n crescer indefinidamente, isto é, como costuma-se dizer, fazendo n tender ao *infinito*. O que nesta época, com o crescer das noções aritméticas, algébricas e trigonométricas já produzia um certo significado em relação ao campo semântico geométrico (ainda preferencial), mesmo que não formulado em termos de um campo semântico algébrico de limites.

É preciso situar que no séc. XVI, ainda na transição da Renascença para a Idade Moderna, com a recuperação de obras da antigüidade, o aparecimento de novos métodos de quadratura e cubatura, a introdução do estudo de novas curvas, a independência da trigonometria como uma disciplina e o emprego de simbolismos (variáveis, "cosas"), houve uma grande integração da matemática com a física e a astronomia. São dessa época também construções importantes com respeito ao conceito de função, hoje tão presente no pensamento diferencial e integral[4]. Particularmente, na distinção entre magnitudes e variáveis feitas por Viète, Fermat e Descartes.

Portanto, houve uma necessidade crescente de argumentos a respeito de coisas *infinitamente grandes ou pequenas*, principalmente nas áreas de relacionadas diretamente aos conteúdos de matemática e física, os quais levaram os astrônomos Galileu Galilei (1564-1642) e Johannes Kepler (1571-1630), e o engenheiro Simon Stevin de Bruges (1548-1620) a utilizar essa noção em seus estudos, mas tentando evitar os rigores lógicos do método da exaustão.

Sobre o método da exaustão, considerado o modelo grego do Renascimento nas demonstrações de cálculo de área e de volume, pode-se dizer que em termos epistemológicos era <u>um</u> modo (entre outros) de produção de significado nas demonstrações de cunho geométrico. Sua desvantagem consistia em precisar conhecer o resultado que se queria através dele demonstrar. Mas, também hoje, quando se quer demonstrar o limite de uma função pela definição de limite por épsilon e delta, isto requer, na maioria dos casos, que se tenha sempre em mente a quê se quer chegar, um "a priori" do resultado, que serve de guia aos passos do procedimento. Essa semelhança de estratégias de forma alguma "identifica" ou aproxima mais, a meu ver, esses dois procedimentos demonstrativos, apenas têm essa característica comum, enquanto que a produção de significados envolve estipulações locais bem distintas.

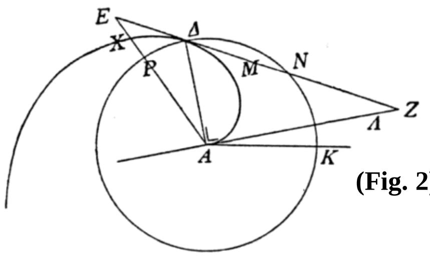
Um <u>outro</u> método demonstrativo foi o associado a Demócrito (que pertenceu a uma escola que competia com a escola de Eudoxo) e tinha por base uma noção de "átomo geométrico", na composição-oposição entre o discreto e o contínuo geométrico. O cálculo de um volume consistia na soma dos volumes dos "átomos" desse corpo. Segundo Struik (1989), vários matemáticos anteriores a Newton, como por exemplo Kepler e Galileo (professor de Cavalieri (1598-1647)) usaram esta concepção, dispensando geralmente as demonstrações da dupla redução ao absurdo.

Ao situar em torno de um objeto denominado "***diferencial***", pode-se observar mais de perto um exemplo de diferentes produções de acordo com os métodos referidos.

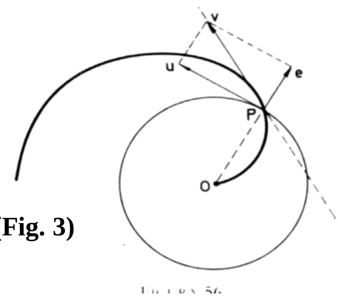
Arquimedes, por exemplo, em suas demonstrações _ por *absurdo* _ usa o processo geométrico para a construção de tangente a uma espiral, que resumidamente consiste em:

[4] Pensamento que permite produzir conhecimento a partir dos textos de Cálculo. Congrega entre outras coisas a noção de variável e de função em meio a pensamentos algébricos e geométricos.

constituir um paralelogramo de velocidades, isto é, se um ponto se move com duas velocidades ao longo de duas retas distintas _ definindo a espiral em termos de movimento[5] _ a velocidade resultante situa-se ao longo da diagonal do paralelogramo formado entre estas retas a cada instante, e a tangente à espiral é construída nesta direção (Fig. 2).



(Fig. 2)



(Fig. 3)

(DIJKSTERHUIS, E. J., "*Archimedes*", 1987, p. 269, Proposition 20)

A aproximação à noção de *diferencial* sugerida, deve-se ao fato de que sua prova interliga a velocidade e a tangente. Idéia fértil, utilizada em trabalhos posteriores do Cálculo infinitesimal, porém, exceto pela certeza da ligação empírica à Física (questão do movimento) e da construção geométrica notável (Fig. 3),[6] afirmo que era <u>um outro modo de produção de significados</u>, bem distinto do que se estabelece ao falar no *diferencial* (hoje) a partir de abstrações matemáticas que envolvem o conceitos de funções (de operador, $ds = f'(t)\ dt$ *ou* $ds = v\ dt$) e às vezes até em relação a estipulações do tipo infinitesimais.

Kepler (1571-1630) entretanto considerou, dentro da teoria atomista, o círculo como a soma de infinitos triângulos _ justificado pelo seu princípio de continuidade, "*princípio de mudança contínua de uma entidade matemática de um estado a outro*" [7] _ e a circunferência como decomposta em um número muito grande de segmentos retilíneos muito pequenos. Do que, associado aos estudos de movimentos dos corpos, procede a pergunta: até que ponto isto se "assemelha" ao que dizia Arquimedes e ao que diz respeito, no séc. XIX, aos *diferenciais*? Dentro dessa polêmica, encontra-se a seguinte afirmação:

[5] A espiral era definida do seguinte modo: "se revolvermos uma reta com uma das extremidades fixa num movimento uniforme no plano até que ela volte a posição inicial, e ao mesmo tempo, um ponto mover-se ao longo da reta num movimento uniforme, começando da extremidade fixa, o ponto descreverá uma espiral no plano".

[6] Segundo Urbaneja (1992, p.198) esta decomposição do movimento, mediante a lei do paralelogramo foi assim trabalhada por Roberval em várias curvas típicas (entre 1630 e 1640) e consta da obra "*Cogitata phisico-mathematica*" do padre Mersenne.

[7] Cf. KLINE, 1990, v.1,p. 299.

> *"... no que diz respeito aos primeiros diferenciais, uma pequena parte de uma curva situada perto de um ponto pode ser considerada recta e uma parte de uma superfície pode ser considerada plana; durante um curto espaço de tempo pode-se considerar que uma partícula se move a uma velocidade constante e que qualquer processo físico ocorre a um rítmo constante"* (Phillips,1922, apud Struik, 1989, p.87).

Tenho então dois pontos a considerar, um de semelhanças a partir de estipulações visuais-geométricas, e outro de maiores diferenças quando se parte de infinitésimos, de razões de infinitésimos, das diferenciações semânticas entre as razões - como totalidades consideradas - ou uma fração (entre grandezas tão pequenas quanto se queira) que podiam ser 'desprezadas'; mesmo se for considerada a teoria um pouco mais recente envolvendo função e derivada (limite) ou para a análise não-standard, vinculada à construção de uma teoria matemática analítica-algébrica.

Para Kepler, Fermat e outros a preocupação estava em demonstrar a solução de problemas físicos _ principalmente encontrados na astronomia e na cinemática _ envolvendo uma abordagem aos infinitamente pequenos a partir também da geometria (campo aceito para validação dos resultados), mas evitando o método de exaustão de Arquimedes e escorados no campo da Física.

Também no séc. XVII, a idéia de *infinito* associou-se à astronomia de Kepler conduzindo ao estudo das parábolas, com um dos focos no *infinito*. Essa frutífera idéia foi poucos anos depois ampliada por Desargues na geometria projetiva, baseada na teoria da perspectiva, onde raios "paralelos" (assim como retas paralelas) se encontram num ponto no *infinito* (sol).

Galileu (1564-1642) foi um astrônomo que tratou com a noção de *infinito* e demonstrou sua intenção de escrever um tratado sobre o assunto (embora nunca encontrado), o que parece ter motivado seu seguidor Simplício a produzir conhecimentos a respeito de infinito em relação a estipulações locais aritméticas, estabelecendo uma correspondência biunívoca entre os inteiros e os quadrados perfeitos, concluindo de que o número de quadrados perfeitos não era menor que o número de inteiros.

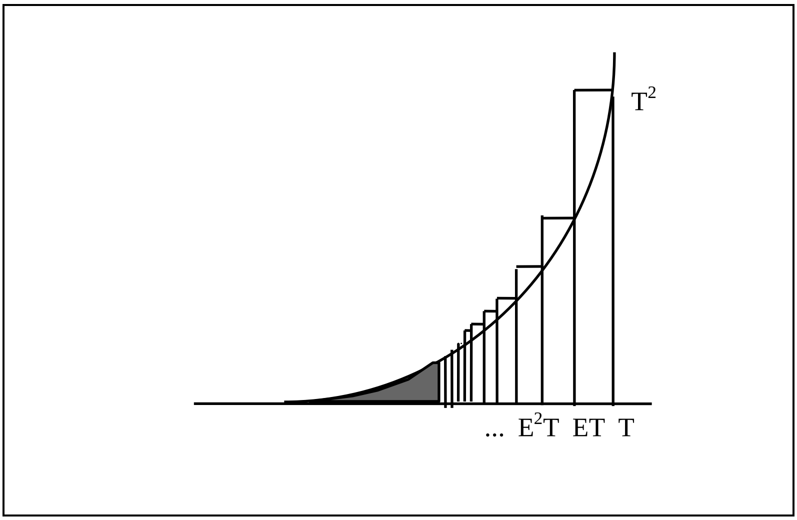
B. Cavalieri (1598-1647), aluno de Galileu, escreveu o livro *Geometria indivisibilibus continuorum* (1635), baseado nos argumentos de Oresme (c. 1323-1382) que foram encampados por Kepler e Galileu.

O princípio defendido foi de que uma área podia ser vista como formada de um número *infinito de* segmentos paralelos equidistantes (*indivisíveis*) e um sólido como composto de planos paralelos equidistantes, considerados como *volumes indivisíveis*. Portanto, os *indivisíveis* eram objetos produzidos em relação a estipulações locais visuais-geométricas.

Embora admitindo um número infinitamente grande (dos elementos indivisíveis), Cavalieri não especulou sobre isto em suas obras e o seu emprego era somente como uma noção auxiliar, o central era a correlação entre os indivisíveis. Em seus trabalhos, Cavalieri também estendeu um tipo de "integração" feita por Oresme de *kt* (usando representação "gráfica" para o deslocamento de um objeto, e deduzindo a distância por ele percorrida como sendo dada por um espaço) de modo a ser o primeiro a obter resultados 'equivalentes' ao que hoje são obtidos através de: $\int_0^T kt^n dt = \frac{kT^{n.+1}}{n+1}$, ele o fez para os casos n ≤ 9. Contudo, analisando mais especificamente, observa-se que o método usado era completamente diferente do que se faz hoje, pois dizia respeito a relacionar razões constantes entre ordenadas de curvas e obter razões entre as áreas sob estas curvas (caso de integração para n = 1), de maneira essencialmente visual-geométrica, usando indivisíveis[8] e grandezas geométricas.

Outros matemáticos como Roberval, Torricelli, Pascal, Fermat e Wallis, apesar de serem contemporâneos em tratar este mesmo assunto, já modificaram seus métodos.

O matemático francês Pierre de Fermat (1601-1665), por exemplo, contribuiu muito para a ligação da geometria com a álgebra, aprimorando os métodos da geometria analítica, e direcionando os estudos do Cálculo. Observe seu “método da progressão geométrica”[9] para integrar x^2 (chamada de quadratura da parábola):



Erguia ordenadas à curva $y = x^2$ nos pontos da figura (anterior) T, ET, E^2T, E^3T etc., onde E < 1. Formava retângulos tendo por altura essas coordenadas ao quadrado e a

---

8 Referências e mais detalhes podem ser vistos em KLINE (1990, v.1, p.348-350) e em BARON (1985, v.2, p. 12-17).

9 Cf. URBANEJA (1992, p. 114-121).

largura em proporção continuada (hoje dita progressão geométrica decrescente de razão E), obtinha uma seqüência de retângulos aproximando a área sob a curva. Aqui cabe notar que Fermat, diferentemente de Cavaliéri, não mais somava linhas e sim retângulos. A soma das áreas desses retângulos era dada pela soma de uma progressão *infinita*

$$T^3(1 - E)(1 + E^3 + E^6 + E^9 + ...) = T^3(1 - E)\left(\frac{1}{1 - E^3}\right) = \frac{T^3}{1 + E + E^2}$$

Pois considerando a soma infinita da PG : $1 + E^3 + E^6 + ... = \left(\frac{1}{1-E^3}\right)$; fazendo E se aproximar cada vez mais de 1, embora os retângulos cada vez mais estreitos, a soma das áreas dos retângulos tende a área sob a curva, $T^3/3$. Semelhantemente, Fermat mostrou que, considerando a curva $y = x^n$, onde $n = p/q$ (valores racionais fracionários, inclusive negativos, excetuando n = -1), tem-se

$$\int_o^T x^n dx = \frac{T^{n+1}}{n+1},$$ para $n \neq -1$. (Isso escrito na linguagem moderna)

Assim, pode-se notar que Fermat ligava a noção de integração de certas curvas ao cálculo de área a partir de estipulações locais visuais-geométricas e algébricas, falando de aproximações entre elementos geométricos (variação pequena na ordenada e na abcissa) e numéricos (E cada vez mais próximo de 1).

Foi também Fermat o inventor de um processo descoberto para pesquisar máximos e mínimos de curvas polinomiais. Por exemplo, seja a ordenada da curva dada por $2x^3 - 3x^2 + 5x + 7$. Então, para um ponto próximo, de abcissa $x + E$, a ordenada será $2(x+E)^3 - 3(x + E)^2 + 5(x + E) + 7$. Logo, num ponto de máximo ou de mínimo, diz ele, a variação da ordenada é virtualmente desprezível, desde que a variação E na abcissa seja pequena; daí coloca os dois valores das ordenadas vizinhas iguais entre si. O resultado, após a transposição dos termos, é $(6x^2 - 6x + 5)E + (6x - 3)E^2 + 4E^3 = 0$. Ao dividir por E e tomar E igual a 0 nos termos restantes (aqui temos novamente a 'visão' do uso do elemento *indefinidamente pequeno* (E), e portanto desprezível) obtém-se a equação $6x^2 - 6x + 5 = 0$. Fermat não explicava porque fazia E igual a zero. Mas o fato de nomear as igualdades de equações como *pseudo-igualdades* (*adaequalitas*[10]), antes de ter feito $E = 0$, leva realmente a crer que partia somente de estipulações locais algébricas e nem sequer infinitesimais (nas variações geométricas virtualmente desprezíveis, pois dizia que tomava a quantidade E *"ad libitum"*, de natureza algébrica finita). Em conseqüência disso, tinha a justificativa de passar da pseudo-igualdade para a igualdade, resguardada no fato de que para x e $x + E$, ali, muito

[10] Cf. KLINE (1990, v. 1, p. 348).

próximos de um ponto de máximo ou de mínimo, os valores das ordenadas podiam ser tomados iguais. Não demonstrava o uso de nenhuma passagem do finito para o infinitesimal.

O modo de constituição de significados também passa a ser diferenciado com a introdução de simbolismo algébrico, que propicia a obtenção de formulações e soluções gerais em função do tratamento dos dados de um problema como parâmetros; elemento essencial no enfoque algorítmico da linguagem característica do Cálculo infinitesimal até hoje.

O inglês John Wallis (1616-1703) além de explorar a idéia de descrição de curvas para determinação de tangentes, possibilitou a expansão em série como meio de calcular quadraturas, portanto diferenciou-se no uso mais analítico das equações, estabelecendo resultados em forma algébrica[11]; porém sem abandonar o método dos indivisíveis.

Grande parte de seu trabalho foi publicado em *Arithmetica infinitorum* (1656), e teve importância nos estudos, logo a seguir, de I. Newton. Wallis introduziu o símbolo "∞" para representar muitas linhas constituindo uma superfície plana, mas sua concepção é quase sempre estranha para nós, pois apesar de considerá-lo infinitamente maior que qualquer número, agia como se fosse um elemento sujeito às operações ordinárias da aritmética:

> *"Con gran osadía representa lo infinitamente pequeño por 1/∞, manifestando que cada subdivisión con tal anchura indistintamente se puede interpretar como una línea o como un paralelogramo infinitesimal. Esto induce a la confusión de las dos concepciones de lo infinitesimal, línes y rectángulos infinitamente pequeños, más aún cuando dice que un tal ente se le puede considerar como una pequeña anchura de modo que por una multiplicación infinita resultará una anchura dada, es decir $(a/\infty)x\infty = a$. Así lo hace en* 'De seccionibus Conicis' *para hallar el área del triángulo, con lo cual vemos con qué gran frivolidad extrapola las propriedades de lo finito a lo infinito ..."* (Urbaneja, 1992, p. 274).

Como diz Kline (1990, v.1, p. 356): *"... in their efforts to attain rigor through geometry, many men failed to utilize or explore the implications of the new algebra and coordinate geometry, and exhausted themselves in abortive subtle reasonings"*. Cuja produção em relação a um núcleo constituído predominantemente de estipulações visuais-geométricas pode ser o responsável pela ausência de determinadas produções em relação a outros núcleos, permitindo falar (como Kline) de uma "falha", um "fracasso", uma vez que se está a ler seus escritos a partir de outros tipos de estipulações (por exemplo, de estipulações numéricas, olhando os escritos de Wallis como 'frações', observando que ∞ não é um número). Diferentemente, considerando seu ∞ como um elemento representado por uma razão entre grandezas de significado geométrico, com sentido e resultado único, passa a ser mais compreensível e aceitável a forma de sua representação.

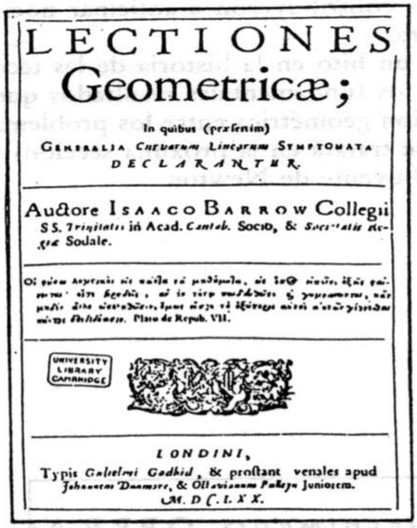
[11] Cf. KLINE (1990, v. 1, p.353-356) , URBANEJA (1992, p. 274-275), STRUIK (1989, p. 170).

Isaac Barrow (1630-1677), professor de matemática em Cambridge, cadeira que Newton veio a suceder, preocupou-se com questões filosóficas de fundamentos da matemática e reivindicou a necessidade de formas rigorosas clássicas, como a Euclideana, e trabalhou com as idéias de antecessores como Cavalière, Huygens e Wallis, dando ênfase a elaboração da noção de variação contínua, tanto para quantidades em movimento quanto em suas ligações fortes à geometria. Sua obra, de um linguajar geométrico rebuscado, tem bem pouco desenvolvimento algébrico ou algorítmico. Um dos poucos problemas em que desenvolve parte algébrica escrita refere-se à determinação de tangentes usando o chamado triângulo característico de antecessores seus, mas no qual apesar das noções matemáticas envolvidas terem um tratamento preponderantemente no campo semântico geométrico, já traz algoritmos algébricos onde usa eliminar os termos correspondentes às potências do que geometricamente chama de elementos infinitamente pequenos (dizendo omiti-los, porque ao operar as equações eles serão iguais a zero). Este seu método, embora mais generalizado para curvas escritas de forma implícita ($x^3 + y^3 = r^3$; $y = (r - x)\ tg(\pi x/2r)$; $x^3 + y^3 = rxy$; e outras) é bem parecido com o de Fermat.

Barrow publica, com auxílio de Newton, *Lectiones Opticae* e *Lectiones Geometricae* (Fig. 4), contendo problemas de quadraturas, tangentes, retificação de curvas, e ainda, uma demonstração de uma importante relação entre quadraturas e tangentes, a qual determina a curva procurada sendo conhecida a direção da tangente a esta curva. Isso, aliado aos significados de hoje, remete a uma aproximidade do posteriormente denominado Teorema Fundamental do Cálculo. Porém, as demonstrações de Barrow baseam-se em estipulações geométricas rebuscadas, e, restringem-se somente a um dos resultados que teria esse famoso teorema, quer seja, obter integrais indefinidas a partir de integrais definidas, ficando a outra parte (o inverso) ainda por fazer.

Isaac Newton (1642-1727), cuja fama matemática é devida aos seus trabalhos em Cálculo, tem como obra mais conhecida o *Princípia*, ou no seu título completo, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, publicado em 1687, contendo sua teoria do universo baseada na sua lei da gravitação. Os seus primeiros desenvolvimentos nesse assunto vieram através de séries infinitas, como narrado por Wallis em *Algebra*, 1685. Depois ele usou o método que é mais associado ao seu nome, o das <u>fluxões</u>, como presente em *Quadratura Curvarum*, 1704. Naturalmente, fez uso de <u>quantidades infinitamente pequenas</u>, produzindo significados a partir de elementos presentes nas formulações das proposições e leis físicas de movimento.

Em seu livro *Tractatus de methodis serierum et fluxionum* (escrito em 1671 e publicado após 1736), Newton diz que sua variável é gerada pelo movimento contínuo de pontos, linhas e planos ao invés de agregar estaticamente elementos infinitesimais (como havia feito em outros trabalhos). Essa quantidade variável ele denominou de *fluente* (modo como Newton trabalhou a noção de função ao lado dos desenvolvimentos em séries de potências) e sua razão de variação de *fluxão*, anotando $\dot{x}$ e $\dot{y}$ para fluxões dos fluentes x e y. A fluxão de $\dot{x}$ anotou $\ddot{x}$ e assim por diante. Com isso calculava problemas como: “*dada a relação entre dois fluentes, encontrar a relação entre suas fluxões, e inversamente*”. Todavia, ele aplicou seu método das fluxões em diversos tipos de problemas como: para encontrar a diferenciação implícita de muitas funções, as tangentes de curvas, máximo e mínimo de funções, curvaturas, pontos de inflexão de curvas, áreas e comprimentos de curvas.

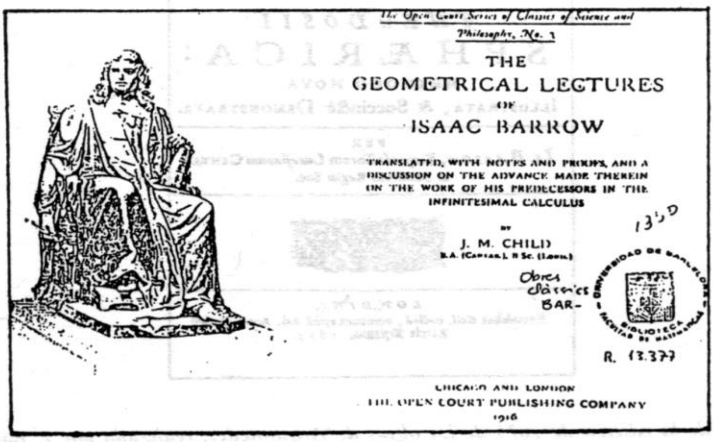

LECTIONES
Geometricæ;
In quibus (præsertim)
GENERALIA CURVARUM LINEARUM SYMPTOMATA
DECLARANTUR.

Auctore ISAACO BARROW Collegii
S S. Trinitatis in Acad. Cantab. Socio, & Societatis Regiæ Sodale.

Plato de Repub. VII.

LONDINI,
Typis Gulielmi Godbid, & prostant venales apud
Johannem Dunmore, & Octavianum Pulleyn Juniorem.
M. D C. L X X.

Edicion de 1670 de las Lectiones Geometricae de Barrow.


The Open Court Series of Classics of Science and Philosophy, No. 3
THE
GEOMETRICAL LECTURES
OF
ISAAC BARROW
TRANSLATED, WITH NOTES AND PROOFS, AND A DISCUSSION ON THE ADVANCE MADE THEREIN ON THE WORK OF HIS PREDECESSORS IN THE INFINITESIMAL CALCULUS
BY
J. M. CHILD
B.A. (CANTAB.), B.Sc. (LOND.)
CHICAGO AND LONDON
THE OPEN COURT PUBLISHING COMPANY
1916

Tradução de J. M. Child, publicada em 1916, Geometrical Lectures de

Observe alguns detalhes em um cálculo desse tipo:

"dado o fluente $y = x^n$, encontrar a relação entre as fluxões $\dot{x}$ e $\dot{y}$."

Newton primeiro escreve $y + \dot{y}\, o = (x + \dot{x}\, o)^n$, [12] em que *o* é um *intervalo infinitamente pequeno de tempo.* Depois, expande o lado direito da igualdade usando o teorema do binômio, então divide por *o,* para em seguida omitir os termos que contém *o* e obter $\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x}$ (que em nossa notação mais moderna seria: $\dfrac{dy}{dt} = nx^{n-1}\dfrac{dx}{dt}$). Ele não explica numericamente nem quantitativamente o fato de desaparecer com os termos que contém *o*, apenas trata-os como desprezíveis em termos de tempo, ou seja, sua produção de significados não é em relação a um núcleo constituído de estipulações locais numéricas, talvez pensasse em relação a um instante de tempo, que então podia ser desprezível dentro dos problemas físicos que trabalhava, ou mesmo como uma *grandeza* (não número) desprezível.

Newton aplicou o método das fluxões para encontrar a diferenciação implícita de muitas funções, as tangentes de curvas, máximo e mínimo de funções, curvaturas, pontos de inflexão de curvas, áreas e comprimentos de curvas.

O sentido principal do trabalho de Newton estava na mecânica com apoio da geometria (o campo matemático ainda mais fortemente presente, no qual ele pensava o rigor de suas provas), o que é reforçado por suas próprias palavras no prefácio do *Principia* (Newton, tradução de Motte, 1729, revisão de Cajori, 1934) :

> *"To describe right lines and circles are problems, but not geometrical problems. The solution this problems is required from mechanics, and by geometry the use of them, whem so solved, is shown; [...] Therefore geometry is founded in mechanical practice, and is nothing but that part of universal mechanics which accurately proposes and demonstrates the art of measuring."*

No Livro I do *Principia*, ele apresenta leis de movimento de corpos e em diversas demonstrações de proposições, teoremas e lemas, utiliza-se do "método das razões primeira e última", a partir do qual pode-se, atualmente (depois de Weirstrass e de Cauchy), reconhecer semelhanças à noção de limite. Porém, o objeto matemático produzido (será que se pode chamar de "limite"?) não era em relação a estipulações de limite (como a definição weirstrassiana de limite), mas sim, em relação a estipulações locais da Física, visuais-geométricas e numéricas, como se pode notar claramente na explicação de Newton sobre seu método, que a seguir cito, intercalando com observações entre colchetes.

> *"... I chose rather to reduce the demonstrations of the following Proposicions to the first and last sums and ratios of nascent*

[12] Na notação que Newton usou, as potências não eram escritas em forma de expoentes sobrescritos, mas em linha, repetindo-se a variável, ou seja, x^2 era escrito como *xx*, $\dot{x}^2 o^2$ era $\dot{x}\,\dot{x}\, oo$, e assim por diante. Cf. KLINE (1990, p.362).

> *and evanescent quantities, that is, to the limits of those sums and ratios, and so to premise, as short as I could, the demonstracions of those limits. For hereby the same thing is performed as by the method of indivisibles; and now those priciples being demonstrated, we may use them with greater safety. Therefore if hereafter I should happen to consider quantities as made up of particles, or should use little curved lines for right ones, I would not be understood to mean indivisibles, but evanescent divisible quantities; not the sums and ratios of determinate parts, but always the limits of sums and ratios; and that the force of such demosntrations always depends on the method laid down in the foregoing Lemmas.*

[Newton produz novos objetos _ "quantidades nascentes e evanescentes" _ que podem ser pensados em relação a estipulações numéricas _ quantidades, razões _ ; mas também em relação a estipulações visuais-geométricas _ considerando quantidades compostas de partículas ou pequenas linhas curvas como retas, quantidades (grandezas geométricas) divisíveis evanescentes, porém diferente dos "indivisíveis" de seus antecessores].

> *Perhaps it may be objected, that there is no ultimate proportion of evanescent quantities; because the proportion, before the quantities have vanished, is not the ultimate, and when they are vanished, is none. But by the same argument it may be alleged that a body arriving at a certain place, and there stopping, has not ultimate velocity; because the velocity, before the body comes to the place, is not its ultimate velocity; when it has arrived there is none. But the answer is easy; for by the ultimate velocity is meant that with which the body is moved, neither before it arrives at its last place and the motion ceases, nor after, but at the very instant it arrives; that is, that velocity with which the body arrives at its last place, and with which the motion ceases. And in like maner, by the ratio ultimate of evanescent quantities is to be understood the ratio of the quantities not before they vanish, nor afterwards, but with which they vanish.[...]* (op. cit., p. 38-39).

[Newton, prevendo reações às suas idéias, justifica-as em relação a estipulações locais no campo da Física ao dizer que "velocidade última significa aquela a qual o corpo está se movendo, nem antes da chegada nem após, mas no instante em que o corpo chega". Refere-se à <u>velocidade</u> (instantânea como hoje denominamos) e ao <u>movimento de um corpo</u> como "verdades estabelecidas" e delas parte, não só produzindo um outro significado a respeito de "razão última", mas uma justificação (comparativa) que estabelece um vínculo entre a crença-afirmação "razão última de quantidades evanescentes é a razão entre quantidades não antes delas desaparecerem, nem depois, mas com a qual elas desaparecem" e um núcleo em cujo conjunto de objetos estabelecidos inclui-se a "velocidade última"].

> *There is a limit which the velocity at the end of the motion may attain, but not exceed. This is the ultimate velocity. And there is the like limit in all quantities and proportions that begin and cease to be. And since such limits are certain and definite, to determine the same is a problem strictly geometrical. But whatever is geometrical we may use in determining and demonstrating any other thing that is also geometrical.*
>
> [...]
>
> *For those ultimate ratios with which quantities vanish are not truly the ratios of ultimate quantities, but limits towards which the ratios of quantities decreasing without limit do always converge; and to which they approach nearer than by any given difference, but never go beyond, nor in effect attain to, till the quantities are diminished* in infinitum" (op. cit., p. 39).

[Nessa parte do discurso, Newton segue em sua produção de significados a respeito de "velocidade última" e "razões últimas" agregando um elemento novo, uma estipulação local em relação à noção de "limite"[13]. Esse "limite" é afirmado como certo e definido, porém inatingível até que as quantidades (que compõem as razões) sejam diminuídas infinitamente (diminished *in infinitum*). Sobre isso, aqui deixo duas reflexões. A primeira é a respeito da afirmação de que "as razões últimas não são razões de quantidades últimas, mas 'limites' (tendências) para o quais as razões das quantidades decrescem sem limite", em que há a idéia de mostrar que não se toma a razão entre os limites de duas quantidades (variáveis), mas o "limite" de uma razão (na relação entre duas variáveis). Todavia, como ele produz significados também em relação a estipulações visuais-geométricas (principalmente nas demonstrações[14]), há uma tentação de se dizer que essas razões últimas estão mais próximas que qualquer diferença tomada (por menor que seja), usando apenas elementos geométricos (como segmentos e pedaços de curvas, contínuos) que são então divididos infinitamente. Porém, como bem observa Oliveira (1993, p. 19):

> "*Sua visão concernente aos fundamentos do Cálculo era de certo modo ambígua. Ele se referia às vezes a infinitesimais, às vezes a momentos, às vezes ao limite e às vezes, talvez preferencialmente, às noções físicas. Sua visão final sobre o assunto, ele tentou mostrar em*

---

[13] Neste caso, as aspas em *limite*, são para ressaltar que é uma noção de limite diferente da definição usual de limite por ε e δ.

[14] As demonstrações dos Lemas, Proposições e Teoremas que encontramos no Livro I e II, em Newton (tradução de Motte, 1729, revisão de Cajori, 1934) nos dá uma mostra do quanto e como se produzia a partir da Geometria.. Segundo comentário de Kline (1990, p.359), "...*even Newton thought the geometry was necessary for a rigorous proof*".

> *seu comentário em De Quadratura: 'Eu procurei demonstrar que no método de fluxões não é necessário introduzir na Geometria figuras infinitamente pequenas*".

A segunda reflexão é sobre essa possível divisão infinita de uma quantidade (elemento sempre tomado em relação à geometria ou ao tempo), que reduz a uma quantidade divisível evanescente, que pode ser desprezível (se comparada a uma grandeza) e que, pensadas em conjunto, podem servir de estipulações locais na produção de significados ligados a uma idéia de elemento infinitesimal (como denomina-se hoje e, a partir dela, por exemplo, é pensado um modo de se calcular área abaixo de uma curva[15]), mesmo que os tenha rejeitado (não falando sobre eles, ou falando contra, devido à demanda de seus interlocutores). Por exemplo, na obra "*El Cálculo Infinitesimal: Leibniz/Newton*" (da Biblioteca Cultura Los Fundamentales, de autoria desconhecida, 1977, p. 67) encontra-se o comentário sobre a obra de Newton, *Optiks* (edição inglesa 1704, latin 1706): "*es un cabal tratado de Cálculo infinitesimal com reglas para determinar derivadas e integrales*", enquanto que, sobre sua obra "*Mathematical Pinciples of Natural Philosophy* (edição inglesa 1729) encontra-se o comentário de Kline (1990, p.365):" *He rejects infinitesimals or ultimate indivisible quantities in favor of 'evanescent divisible quantities', quantities which can be diminished without end*"].

Quanto ao cálculo de áreas _ quadraturas _, tendo Newton trocado a noção de "indivisíveis" (geométricos) por elementos infinitesimais que podia operar juntamente com o teorema binomial, ele elabora-os (para determinadas curvas) em relação a uma operação de "antidiferenciação" (integração), estabelecendo o caráter inverso da quadratura e da tangente (que Barrow havia iniciado) e valendo-lhe, posteriormente, a autoria do Teorema Fundamental do Cálculo junto com Leibniz. Essa operação inversa também é produzida em relação a estipulações locais envolvendo desenvolvimentos de séries (que deriva e integra termo a termo).

Na construção do Cálculo , ao lado de Newton, tem-se o filósofo G. Wilhelm Leibniz (1646-1716), considerado um erudito universal e, em especial, um matemático pelos estudos e produções desenvolvidas. É importante a observação de que, os paralelismos e convergências de idéias nos trabalhos matemáticos de Newton, Wallis, Barrow e Leibniz devem-se em parte ao intercâmbio entre eles, inclusive anos de troca de correspondências.

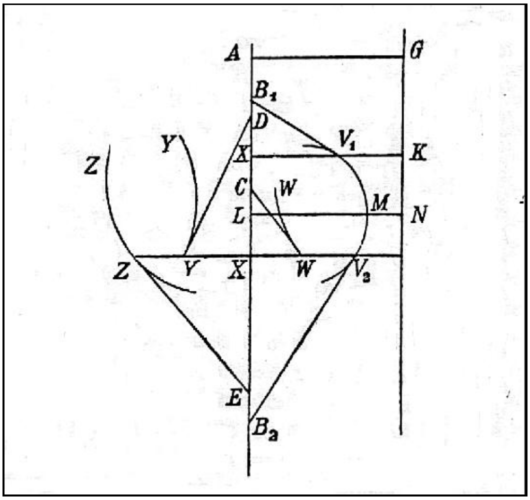
A obra de Leibniz permitiu um maior desenvolvimento da algebrização do Cálculo, com sua produção de significados a partir de técnicas e notações algébricas. Nela aparece, entre outras coisas, uma noção e simbolização de diferencial (ainda hoje usados), um algoritmo para cálculo de várias funções, uma noção de derivada a partir de estipulações

---

[15] As demonstrações dos Lemas I, II, III e IV (entre outros) chamou nossa atenção a essa ligação. Cf. NEWTON (tradução de Motte, 1729, revisão de Cajori, 1934, p. 29 - 31).

geométricas, um algoritmo para resolver problemas de máximo e mínimo, e, integrações de diversas equações diferenciais.

Vamos observar algumas facetas de suas produções ligadas ao Cálculo olhando para os escritos do denominado "*novo método para máximos e mínimos*", com bases na tradução de J. Peyroux (edição de 1983, p.4) da obra de Leibniz, "*Calcul Infinitésimal*" (publicada em 1684) e na obra "*El Cálculo Infinitesimal: Leibniz/Newton*" (da Biblioteca Cultura Los Fundamentales, de autoria desconhecida, 1977, p. 41)



Dado o eixo AX e várias curvas VV, WW, YY, ZZ, chamemos x ao segmento AX do eixo x, v, w, y, z, respectivamente, as ordenadas normais ao eixo VX, WX, YX, ZX. Sejam VB, WC, YD, ZE, as tangentes que cortam, respectivamente, o eixo nos pontos B,C,D,E. Seja dx um segmento arbitrário e dv (ou dw, ou dy, ou dz), ou seja, as diferenças das mesmas v (ou w, ou y, ou z), um segmento que é à dx como v (ou w, ou y, ou z) é à BX (ou CX, ou DX, ou EX). Isso admitindo que as regras de cálculo são:

Se a é uma quantidade constante dada, será da = 0; e dax = $a$dx. Se y = v (isto é, se uma ordenada qualquer da curva YY é igual a uma ordenada qualquer correspondente da curva VV), será dy = dv.

Adição e Subtração: se z-y+w+x = v, será d(z-y+w+x) = dv = dz-dy+dw+dx.

Multiplicação: se y = xv, será d(xv) = x dv+ v dx.

Divisão: Se $z = \frac{v}{y}$, se terá $d\left(\frac{v}{y}\right) = dz = \frac{\pm v dy \mp y dv}{y^2}$.

Potência: $dx^a = ax^{a-1}\,dx$. Exemplo: $dx^3 = 3x^2\,dx$; se $w = \frac{1}{x^3}$, será $dw = \frac{-3dx}{x^4}$.

Raiz: $d\,(\sqrt[b]{x^a}) = \frac{a}{b}dx\sqrt[b]{x^{a-b}}$.

Após discorrer sobre: os sinais das regras, a convexidade e concavidade das curvas ligadas aos sinais dos diferenciais (dx, dz, dy, dw), os pontos de máximo e mínimo nos quais as ordenadas v (ou w, ou y, ou z) mantém-se estacionárias e dv = 0 (ou dw, ou dy, ou dz), ponto de inflexão onde a concavidade e os sinais trocam entre si, Leibniz nomeia seu algoritmo de *cálculo diferencial* e coloca-o como um método em que não necessita "fazer desaparecer" (retirar ou desprezar) quantidades muito pequenas.

> "*De ceci connu comme **Algorithme**, que je dise ainsi, de ce calcul que j'appelle **différentiel**, toutes les autres égualités différentielles peuvent être trouvées par un calcul commun, et les plus grandes et les plus petites, et de même les tangentes sont tenues, de telle sorte qu'il n'est pas nécessaire d'enlever les fractionnares ou irracionnelles, ou autres chaînes, ce que pourtant il fut à faire selon les Méthodes jusqu'ici montrées*" [grifos do tradutor] (Leibniz, tradução de Peyroux, 1983, p. 6).

Nota-se nesse texto _ "*novo método para máximos e mínimos*" _ que, embora as diferenças (dx, ou dy, ou dz, ou dw) sejam escritas em relação a segmentos, elementos geométricos (grandezas geométricas ligadas a um desenho), paralelamente há uma elaboração de uma notação na qual Leibniz procura identificar com suas noções (por exemplo, diferenças, "diferencial" e o símbolo *dx* para identificar essa diferença ou diferencial *dx* de uma quantidade ou magnitude *x,*[16] *e,* $\int$ para identificar *suma* , soma). Essa notação, ligada a estipulações locais algébricas na produção de significados para os algoritmos e operações, promove uma aparência uniforme à sua escrita e torna-a mais independente dos elementos geométricos. Segundo Urbaneja (1992, p. 280): "Su virtuosismo en la creación del simbolismo le permitiría traducir en fórmulas los resultados [infinitesimais] y en algoritmos los métodos, tanto los de sus antecesores como los descubiertos por él mismo ..."

Leibniz freqüentemente fala de quantidades infinitas e infinitamente pequenas, porém, em alguns de seus enunciados, ele demonstra sua preocupação em considerá-los como algo especialmente abstrato (fictícios):

[16] Leibniz identifica a **quantidade** ou **magnitude** correlacionadas ao número de partes que compõe uma coisa,

"*La 'magnitude' es lo que en la cosa se expresa por el número de partes determinadas. [...] '**Cantidad**' o Magnitude es lo que puede conocerse en las cosas por simple compresencia (o percepción simultánea)"* [grifos do autor] (Leibniz, apud Alcoba, 1996, p. 151-152) . Além disso, "**número** é aquele que tem a mesma quantidade que algo com a mesma qualidade que a unidade":

"*... el número en general, sea entero, quebrado, racional, irracional, ordinal o transcedente, puede definirse con un concepto general, como aquello que es homogéneo a la unidad, o que se relaciona com la unidad como una recta com una recta"* (op. cit., p.152).

> "*O infinitesimal, como el infinito, está siempre inacabado* [...] *Ficciones útiles en cualquier caso, que permite describir lo real*" (Alcoba1996, p.159).
>
> "*El infinito es como el cero, algo que carece de correlato real, en definitiva, 'um modo de hablar'. Un estatus semejante tendrán los infinitesimais. Los infinitesimales no son nunca um número y ni siquiera una cantidade, sino um rango de números que dejamos sin especificar porque no hace falta ...*" (op. cit., p. 160).
>
> "*Entrementes, concebemos o infinitamente pequeno não como um simples e absoluto zero, mas como um zero relativo (como você próprio observou), isto é, como uma quantidade evanescente que ainda mantém o caráter daquilo que está desaparecendo.*
>
> *[...]*
>
> *...não acreditava mesmo que existam magnitudes verdadeiramente infinitas ou verdadeiramente infinitesimais*" (Leibniz, apud Oliveira, 1993, p. 25).

As estipulações locais a partir das quais Leibniz tratava seu princípio de continuidade[17] não eram em relação a estipulações locais de limite, como são hoje ao produzir-se significados para a definição de continuidade, mas em relação a princípios físicos e filosóficos de conservação do movimento. Isso explica a inversão de ordem que encontra-se em seus escritos, pois Leibniz falou de "diferencial" a partir de sua noção de continuidade,[18] usando das diferenças infinitamente pequenas que pode obter na divisão ideal e, também, do uso das séries infinitas.

> "*Pues el continuo no podría estar compuesto por la multitud, que no puede tener su realidad más que en **unidades verdaderas que vienen de outra parte y son algo distinto a los puntos matemáticos**, los cuales no son sino extremidades de la extensión y de las modificaciones de las que consta.*
>
> [...]
>
> *...el punto matemático y el instante son el límite que encontramos por análisis, la menor parte a la cual podemos llegar diciendo todavía que estamos ante el espacio o el tiempo, **el punto metafísico engendra la serie pero no pertenece a ella** sino a un nivel superior.*

[17] Segundo Alcoba (1996, p.92) a "lei de continuidade" ou "princípio de continuidade" de Leibniz "*contiene una de las seguientes proposiciones : 1. No hay tránsito por saltos; 2. La naturaleza no actúa por saltos; 3. No hay mutaciones por saltos; 4. No hay cambios instantáneos; 5. Las reproduciones no se hacen por saltos; 6. La naturaleza impide la discontinuación.*

[18] Encontramos também em Oliveira (1993, p. 24) afirmações a respeito dessa inversão nas considerações de Leibniz.

> [...]
>
> *La consideración del número como algo ideal, descomponible por análisis en unidades existentes sólo a posteriori, el utilizar la noción de homogeneidad para definirlos, muestra claramente que* ***a la ciencia del número es aplicable la ley de continuidad****. Eso significa que en las* **series numéricas** *no habrá saltos, que no hay ruptura, cambio de leyes de lo finito a lo infinito*" [grifos nossos] (Alcoba, 1996, p.136, 137 e 159).

A convergência entre os temas e seu desenvolvimento em meio ao pensamento diferencial e integral, na dificultosa passagem do contínuo geométrico ou de movimento-temporal ao contínuo algébrico, fazem Newton e Leibniz compartilharem em vários pontos na construção do Cálculo. Os principais pontos são: a partir de seus trabalhos o Cálculo passou a ser independente, não mais uma parte da Geometria apenas; ambos produziram seus conhecimentos a partir de estipulações locais envolvendo noções algébricas (até então as estipulações locais eram predominantemente geométricas); os dois elaboraram e fizeram uso de um "processo de antidiferenciação" nos problemas de área, volume e outros; trabalharam em problemas de cálculos de razões, tangentes, máximos e mínimos e somas infinitas, que eram reduzidos geralmente à diferenciação.

Todavia, em meio a essa comunhão de pontos, existem interessantes distinções a serem destacadas. Pensando nessa comparação, a principal diferença está no que Newton e Leibniz disseram a respeito de elementos infinitamente pequenos, que é uma estipulação local básica para quase todas as suas demais produções. Enquanto Leibniz lidava com os diferenciais (incrementos infinitamente pequenos, os quais em última instância estavam as "mônadas"[19]) diretamente em seus algoritmos (como elementos algébricos, como a noção explícita de função[20]), Newton produzia seus significados para os infinitamente pequenos a partir de estipulações locais da Física, como na determinação de velocidade (ou da fluxão), variação de mudança.

[19] Para Leibniz o *continuo* não pode ser composto de multitudes de pontos. Os pontos são incapazes de formar um contínuo, pelo menos enquanto não se completa a sua dispersão ou extensão, ou seja, que os converta em *unidades verdadeiras*, que são distintas dos pontos matemáticos, os quais podem ser vistos como extremidades das extensões. Assim, para encontrar essas *unidades verdadeiras*, *átomos metafísicos* ou *mônadas*, ele recorreu ao que disse ser um *ponto real e animado*. Segundo ele "uma mônada é uma substância simples, mas uma noção completa, à qual não se precisa adicionar nada. As mônadas, para formarem um *contínuo*, necessitam serem convertidas em uma série, ordenadas e vinculadas, já que são como mundos separados. Cf. ALCOBA (1996, p. 136-137).

Quanto aos infinitesimais, além de se referir que eram "*menores que qualquer quantidade dada*", ele dizia que falar deles é o mesmo que falar de infinito, é sempre inacabado, "*se les puede asignar cualquier cantidad o magnitud, es decir, no hay* ***razones*** *para as signarle una en concreto. Basta com hacer el error menor que cualquiera que pueda darse* (op. cit., p.159).

[20] Como nos diz WUSSING (1998, p. 167), para Leibniz função tinha um sentido amplo, designando qualquer classe de segmentos que dependentes de ponto fixos ou de pontos em uma curva (como: ordenadas, cordas, seções de tangentes, normais etc).

Outra distinção está em que, para Newton os problemas de área e volume eram basicamente resolvidos em relação a um processo de diferenciação; dificilmente pensava em termos de somação. Já Leibniz, agia ao contrário, primeiro pensava em somações, para depois calculá-las pelo processo de antidiferenciação.

De um modo geral, parece natural que Newton fosse empírico e mais "concreto" que Leibniz, pois a demanda de seu meio contextual era o de um físico, enquanto que a do segundo era de um filósofo lógico e, portanto, dado a reflexões e generalizações.[21] Talvez por isso Newton não ligasse muito para a notação que, para Leibniz era central (conforme observação anterior).

Convergindo, o desenvolvimento da geometria analítica e do sistema de representação de quantidades variáveis, juntamente com a produção dos significados infinitesimais e a aplicação mais extensiva dos conceitos numéricos, em pouco tempo levaram Isaac Newton e Gottfried Wilhelm von Leibniz aos estudos de correlação entre derivação e integração culminando no *Teorema Fundamental do Cálculo* e nos algoritmos do Cálculo.

Em pleno séc. XIX, matemáticos famosos como Gauss (1777-1855) e Cauchy (1789-1857) insistiam em discussões sobre a existência de um infinito real contínuo; sendo que pelos escritos de Cauchy, tanto se pode dizer que produzia significados em relação a estipulações locais infinitesimais como em relação a estipulações locais de limite. Nota-se em seu enunciado sobre o "*infinitamente pequeno*":

> "Quando os valores numéricos sucessivos de uma variável diminuem indefinidamente de modo a tornarem-se menores que qualquer número dado, dizemos que a variável se torna 'infinitamente pequena' ou uma quantidade infinitamente pequena. O limite de tal variável é zero" (Cauchy, apud Baron, 1985, v.4, p. 47).

Em sua obra, Cauchy também apresentou os fundamentos do Cálculo na forma de uma teoria de limites (em relação a estipulações locais de limite), a qual foi convertida por K. Weierstrass (1815-1897) no método épsilon e delta da Análise, que hoje é um dos modos de produção de significado. Porém, esse novo modo de produção de significado, só foi possível com o advento da aritmetização da Análise, quando se relacionou estipulações locais da teoria de conjuntos às estipulações locais a partir do Cálculo que então se produzia.

Todavia, o conceito de grandezas *infinitamente pequenas* (infinitesimais) ainda permaneceu em discussão, e foi objeto de estudo no séc.XX (ca.1960) nos trabalhos de Abraham Robinson, culminando na intitulada Análise Não-Standard. A partir dela, tem-se produções de significados e conhecimentos preponderantemente em relação a núcleos de noções infinitesimais, nas quais se considera os hiperreais como uma estipulação local.

[21] Cf. KLINE (1990, p. 379-380).

CONCLUSÕES

Acredito que o principal resultado dessa reunião de problemas em torno de uma investigação histórico epistemológica do Cálculo, foi o de realçar diversos modos de produção de significado e objetos a partir de uma História da Matemática conhecida.

Uma conseqüência direta disso é o reforço à importância da pesquisa histórica com bases epistemológicas em se tratando de investigações ligadas ao desenvolvimento do pensamento diferencial e integral, necessário ainda hoje.

Assim sendo, escolhi não ler os textos à procura dos verdadeiros sentidos e significados produzidos outrora ou tentando agregar e dar um panorama da parte matemática, mas sim, considerando que temos aspectos parciais, resíduos de enunciações, os quais são vistos através de um filtro temporal histórico e, a partir deles, uma oura produção de significados pode ocorrer em relação ao que convencionalmente é apresentado.

Para alcançar esse objetivo principal, não há dependência em caminhar em um desenvolvimento cronológico e sucessivo na História da Matemática. Porém, optei por seguir uma ordenação, ao destacar alguns pontos mais importantes, devido à identificação mais facilitada das investigações e relações com a contextualização de fatores de maior influência nas produções, tal como: os culturais e de poder, as ligações entre os respectivos personagens históricos e os interlocutores.

Uma outra conseqüência dessa investigação histórica epistemológica é a confirmação do quanto é adequada uma investigação crítica desse tipo para se compreender não só o próprio desenvolvimento histórico do, mas os realces determinados pela caracterização em, pensamento diferencial e integral. Nesse sentido, as comparações entre os tipos de estipulações locais (visuais-geométricas, algébricas-funcionais, de limite e outras) consideradas nas investigações dos textos históricos ("estipulações locais históricas") são resultantes das reflexões sobre os discursos. Dentre todas as produções citadas _ desde as antigas até à fundamentação do Cálculo por Cauhy, Weirstrass e predecessores (após a aritmetização da Análise) _ procurei destacar alguns tipos de estipulações locais históricas que continuam a caracterizar os modos de produção a partir do Cálculo. Por exemplo, ao olhar os textos antigos vê-se que, significados, objetos e conhecimentos eram produzidos em relação a estipulações locais visuais-geométricas, porém estipulações locais diferentes das de hoje, ou seja, dentro de uma mesma natureza, mas distintas. Exemplificando: uma estipulação visual-geométrica como uma reta (um contínuo geométrico que pode ser sucessivamente dividido) ou como um princípio geométrico apenas (que se usa para poder comparar grandezas de mesma espécie _ comprimento com comprimento, área com área e assim por diante). Tais distinções não são mais realçadas, a não ser em casos especiais, a partir de textos históricos quando então o modo de produção de significado pode também fazer com que pareçam próximos, embora por vezes tão distantes. A impressão de proximidade é devida a certas relações e estipulações locais postas em evidência (pelos atuais modos de produção de significados) ao olhar-se um texto no qual os objetos “ancestrais” são enunciados às vezes até com o mesmo nome; o que geralmente causa esta impressão “existencial” de contínua anterioridade.

OBJETOS MATEMÁTICOS

Os objetos produzidos a partir das “estipulações locais históricas” e considerados objetos ancestrais de outros produzidos posteriormente, por exemplo, “diferenciais” _ como quantidades ínfimas (ou evanescentes) em meio aos “fluentes e fluxões” de Newton _ como um objeto ancestral de “diferenciais” ditos por Cauchy _ como um operador (função) da derivada e de um incremento ($dy = f\,'(x)\,\mathrm{d}x$) _ são objetos distintos, produzidos em relação a estipulações locais diferentes (como a algébrica-funcional), diante de demandas diferentes. O fato de (posteriormente) ser possível articulá-los em um outro modo de produção de significados, faz com que se tenha a impressão de que têm algo intrínseco, de que “compartilham algo comum”, como acontece ao se adotar uma visão progressista (evolucionista) da História em uma postura mais “essencialista” do ponto de vista epistemológico e, então, olhar para os dois “diferenciais” mencionados como sendo o mesmo objeto, só que mais aperfeiçoado, mais trabalhado.

Assim, por exemplo, ao se olhar para a parte antiga da História da Matemática, depara-se com as construções dos incomensuráveis, dos irracionais, do infinito potencial, cujas estipulações locais eram predominantemente visuais-geométricas e, as estipulações locais algébricas ou algorítmicas, em minoria. Portanto, não possibilitava produzir definições como a de limite (de Cauchy e predecessores) sem uma noção mais geral de números reais (implementada a partir da teoria dos conjuntos trabalhada por Dedekind e Cantor), sem a noção de função e de toda a linguagem inerente (intensificada no séc. XVIII, mais especificamente por Leibniz, Jacob e Johann Bernoulli e Euler). Mas, hoje, ao invocar-se essas "imagens", é preciso não esquecer de que elas só são possíveis porque se olha enunciados passados com olhos do presente.

REFERÊNCIAS:

ALCOBA, M.L. ***La ley de continuidad en G. W. Leibniz***. Sevilla: Universidad de Sevilla, 1996.

BALDINO, R. R., SAD, L..A., , TEIXEIRA, M.V.. ***Cauchy and the problem of pont-wise convergence***. Liège: Anais do XXth International Congress of History of Science, 1994.

BOTTAZINI, U. ***The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass***. Traduzido por Warren V. Egmond. New York: Spring-Verlag, 1986.

BOYER, C.B. ***The History of the Calculus and its Conceptual Development*.** New York: Dover Publications, 1959.

___ ***História da Matemática***. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

CAJORI, F. ***A History of Mathematical Notations*.** 2.ed. Chicago: The Open Court Publishing Company, 1930.

___ ***A História of Mathematics***. New York: The Macmillan Company, 1950.

CAUCHY, A. L. ***Résumé des leçons sur le Calcul Infinitésimal*** [*Summary of Lectures given at the École Polytéquinque about infinitesimal Calculus*]. Paris: Ellipses, 1823.

___*Cauchy's inauguration of mathematical analysis****, 1820-1827***. Tradução de Ivor Grattan-Guinnes. ***Science networks historical studies***, v. 3, 1990.

CLEAVE, J. P. *Cauchy, convergence and continuity*. ***Brit. Sci.***, n. 22, p.27-37, 1971.

CONFREY, J., SMITH, E. ***Applying an epistemology of multiple representations to historical analysis: a review of "Democratizing Acess to Calculus: new routes to old roots"***. (Mímeo)

DAMEROW, P.. ***Abstraction and Representation: essays on the cultural evolution of thinking***. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1986.

DAVIS, R. B. , VINNER, S.. *The notion of limit: Some seemingly unavoidablemisconception stages.* ***The Journal of Mathematical Behavior***, v. 5, p. 281-303, 1986.

DESCARTES, R. ***Discurso do Método***. Traduzido por João Gama. Lisboa: Edições 70, 1993.

DIEUDONNÉ, J. ***Pour l'honneur de l'esprit humain***. ***Les mathématiques aujourd'hui***. Paris:Hacette/Pluriel, 1987.

DIJKSTERHUIS, E. J. ***Archimedes***. Traduzido por C. Diksboorn. New Jersey: Priceton university Press, 1987.

EHRLICH, P. et al. ***Real numbers, generalizations of the reals, and theories of continua***. Dordrech: Kluwer Acad. Publ., 1994.

EL *Cálculo infinitesimal: Leibniz / Newton*. ***Biblioteca Cultural Los Fundamentales***. Buenos Aires: EUDEBA - Universitaria de Buenos Aires, 1977.

FAUVEL, J. , GRAY, J. ***The History of Mathematics: A Reader***. New York: The Open University, 1987.

HEATH, T. L. ***The Thirteen Books of Euclid's Elements***. New York: Dover, 1956 (republicação da 2ª ed. , Cambridge University Press, 1926).

KATZ, V. J.***A History of Mathematics:*** *an introduction*. New York: Harper Collins College Publishers, 1993.

KLINE, M. ***Mathematical Thought: from ancient to modern times***. New York: Oxford University Press,1990. v.1,2,3.

LAKATOS, I.. *Cauchy and the Continuum: The Significance of Non-standard Analysis for the History and Philosophy of Mathematics.* ***The Mathematical Intelligencer***, v.1, nº3, p.151-161. New York: Springer-Verlag, 1978.

___ *Mathemáticas, ciencia y epistemología*. Madri: Alianza, 1987.

LEIBNITZ, G. W. ***Oeuvre concernant le Calcul Infinitésimal***. 6 ed. Traduzido por Jean Peyroux. Paris: Librairie A. Blanchard, 1983.

___. *La naissance du calcul différentiel*. Traduzido por Marc Parmentier. Paris: Librarie Philosophique J. Vrin, 1989.

LINS, R.C. *Epistemologia, História e Educação Matemática: tornando mais sólidas as bases da pesquisa*. ***Revista da SBEM-SP,*** nº 1. São Paulo, 1993.

___*O Modelo Teórico dos Campos Semânticos: uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico.* ***Revista Dynamis***, v.1, nº 7. Blumenau: FURB, 1994.

NEWTON, I. ***Principia***. Traduzido por Andrew Motte, 1729. 2 ed. Revisada por Florian Cajori. Berkeley: University of California Press, 1962. 2v.

OLIVEIRA, T.A. ***Análise não-Standard: uma apologia ao seu ensino***. Dissertação de Mestrado. São Paulo: UNESP-Rio Claro, 1993.

SAD, L. A. ***Cálculo Diferencial e Integral: uma abordagem epistemológica de alguns aspectos***. Tese de Doutorado defendida no Cuso de Pós-Graduação em Educação Matemática, da Univ. Estadual Paulista – UNESP – Rio Claro – SP – Brasil, 1999.

STROYAN , LUXEMBURG. ***Introduction to the theory of infinitesimals***. New York: Academic Press, 1976.

STRUIK, D. J. ***História concisa das Matemáticas***. Lisboa: Gradiva, 1989.

TALL, D. *The notin of infinite masuring numbers and its relevance in the intuition of infinity*. ***Educational Studies in Mathematics***, v.11, p.271-174, 1980b.

___*Intuitive infinitesimal in the calculus*. Mathematics Education Research Centre, University of Warwick. UK, 1981.

URBANEJA, P.M.G. ***Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII***. Madrid: Alianza Editorial, 1992.

WUSSING, H. ***Lecciones de Historia de las Matemáticas***. Madrid: Siglo XXI de España, 1998.

Lígia Arantes Sad – Departamento de Matemática e Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória – ES – Brasil.
e-mail: sadli@terra.com.br.