Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 3 nº 5 (abril/2003 - setembro/2003) - pág. 5 -12
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

PROBLEMAS MATEMÁTICOS

David Hilbert

Conferência proferida no 2º Congresso Internacional de Matemáticos realizado em Paris em 1900

(traduzida do alemão para o português por Sergio Nobre)

Quem de nós não gostaria de descobrir aquilo que o futuro nos oculta, e lançar um olhar sobre os iminentes progressos de nossa ciência e os segredos de seus desenvolvimentos durante o próximo século? Quais serão as metas especiais sobre as quais o comando do intelecto matemático das próximas gerações irá esforçar-se para alcançar? Quais novos métodos e novos fatos serão descobertos no novo século, sobre os quais repousam amplos e ricos campos do pensamento matemático?

A história professa a continuidade do desenvolvimento da ciência. Nós sabemos que cada período tem problemas próprios, e que os próximos períodos os resolvem, ou então, por falta de perspectivas, são colocados de lado, e são substituídos por novos problemas. Se quisermos ter uma idéia sobre o possível desenvolvimento do conhecimento matemático no futuro próximo, então precisamos ter em pensamento as perguntas em aberto e visualizar os problemas que a ciência contemporânea nos apresenta, cujas soluções nós esperamos do futuro. Tal visualização dos problemas, parece-me totalmente oportuno realizá-la nos dias de hoje, dias estes que se encontram na virada do século, pois a maior parte do tempo nos exige que voltemos nosso olhar não somente para o passado, mas também que dirijamos nossos pensamentos para o futuro desconhecido.

É inegável a grande importância de determinados problemas para o progresso da ciência matemática em geral e o importante papel que estes representam para o trabalho individual de pesquisadores. Enquanto um ramo da ciência apresentar problemas, ele é vital, pois a falta de problemas significa morrer ou deixar de desenvolver-se por si só. Assim como todo o empreendimento humano segue metas, a pesquisa matemática também precisa de problemas. Através da resolução de problemas irradia-se a força do pesquisador. Ele encontra novos métodos e perspectivas; ele ganha um horizonte mais amplo e livre.

É difícil, e freqüentemente impossível, julgar antecipadamente o valor certo de um problema; no final é que se decide o ganho o qual a ciência a tal problema é grata. Todavia podemos questionar se existem indícios gerais que possam caracterizar um bom problema de matemática.

Um velho matemático francês disse: Uma teoria matemática não está visível antes da perfeição até que você a faça tão clara que seja possível explicá-la para a primeira pessoa que você encontra na rua. Esta clareza e leve compreensão, como ela é exigida aqui de forma tão drástica para uma teoria matemática, eu gostaria de exigir muito mais de um problema matemático, quando o mesmo deve ser perfeito; enquanto que a evidência e a leve compreensão nos atrai, a complicação nos desanima.

Um problema matemático que nos estimule, que não ultrapasse nosso esforço e que não seja totalmente inacessível está longe de ser difícil. Este problema é para nós um sinal de que existe um atalho para se chegar às verdades ocultas, pois a alegria que ele nos oferece através de sua resolução é compensadora.

Os matemáticos dos séculos passados dedicavam-se com grande zelo à solução de problemas isolados e difíceis. Eles conheciam o valor destes problemas difíceis. Eu lembro-me apenas o problema que Johann Bernoulli apresentou: O problema da curva brachystochrona[1]. A experiência mostra, e assim expôs Bernoulli na apresentação pública deste problema, que o nobre intelecto para o trabalho na multiplicação do saber é somente impulsionado através de difíceis e proveitosas tarefas. Desta forma ele esperava merecer o reconhecimento do mundo matemático, quando, seguindo o exemplo de homens como Mersenne, Pascal, Fermat e outros, os quais fizeram o mesmo antes dele, apresentou aos principais analistas de seu tempo uma tarefa, como se fosse um teste, para que eles pudessem julgar o quão bom eram seus métodos e medirem as suas forças. A origem do Cálculo de Variações deve-se ao conhecido problema de Bernoulli e a outros semelhantes. Fermat tinha afirmado que a Equação Diofantina -com exceção de alguns casos-

$$x^n + y^n = z^n$$

não possui solução para *x*, *y* e *z* inteiros. *O problema de provar esta impossibilidade* oferece um exemplo convincente sobre como um problema específico, que aparentemente é insignificante, pode atuar como fomento sobre as ciências. Pois, através do estimulo causado pela tarefa proposta por Fermat, Kummer chegou à introdução dos números ideais e à descoberta dos teoremas sobre a decomposição pura dos números de um corpo circular em fatores primos ideais –um teorema, que hoje é conferido a Dedekind e Kronecker, sobre a generalização de qualquer campo numérico que pertence ao ponto central da moderna teoria de números, cuja importância ultrapassa a fronteira da teoria dos números e estende-se ao campo da álgebra e da teoria das funções.

Ainda para falar sobre outro diferente campo de pesquisa, lembro do *Problema dos Três Corpos*. Sobre as novas circunstâncias que Poincaré empreendeu para o tratamento deste difícil problema e os encaminhamentos que se aproximam da solução, agradecemos os métodos fecundos e os princípios de grande alcance, que este sábio da mecânica celeste abriu e que hoje são reconhecidos e usados pela astronomia prática.

Ambos os problemas citados a pouco, o Teorema de Fermat[2] e o Problema dos Três Corpos, apresentam-se a nós de antemão como problemas quase como de pólos opostos: o primeiro é uma invenção livre do intelecto puro, que pertence à região da teoria abstrata de números; o outro nos foi imposto a partir da astronomia e da necessidade de compreensão de simples e fundamentais fenômenos naturais.

[1] Em seu discurso, Hilbert não utiliza o termo brachystochrona, como esta curva é conhecida. Ele usa a expressão “Problem der linie schnellsten Falles” , ou seja, o problema da linha de queda mais rápida.

[2] Em seu discurso, Hilbert usa o termo *Problema de Fermat*, e não *Teorema de Fermat* como atualmente é conhecido.

Mas freqüentemente acontece também que mesmo sendo problemas especiais, eles intervém em diferentes campos do conhecimento matemático. Desta forma, o problema da brachystochrona possui, ao mesmo tempo, um importante e fundamental papel histórico nos fundamentos da matemática, na teoria de curvas e áreas, na mecânica e no cálculo de variações. Assim como Felix Klein[3], em seu livro sobre o Icosaedro, descreveu, com convicção, que o *Problema dos poliedros regulares* vem ao encontro da geometria elementar, das teorias de equações e de grupos e da teoria de equações diferenciais lineares.

Para dar luz à importância de alguns problemas específicos, permito-me também referir-me a Weierstrass[4], no que pode ser qualificado como um feliz acaso, pois ele, no início de sua carreira científica, encontrou um problema muito importante, o *Problema da Inversão de Jacobi*[5], com cujo trabalho ele pode se promover.

Depois que nós passamos uma visão sobre a importância de problemas matemáticos, nos deslocamos para a pergunta: de quais fontes a matemática cria seus problemas? Certamente os primeiros e os mais velhos problemas, em cada um dos ramos científicos da matemática, provém da experiência e são estimulados através do mundo dos fenômenos externos. Mesmo as regras referentes aos *cálculos com números inteiros* são, a partir desta maneira, descobertas por completo em níveis culturais inferiores da humanidade, assim como também hoje a criança aprende as aplicações destas regras através de métodos empíricos. O mesmo vale para os *primeiros problemas da geometria*, que foram transmitidos da antigüidade: *problema da duplicação do cubo*, *da quadratura do círculo* e os mais velhos problemas da teoria de resolução de equações numéricas, da teoria de curvas e do cálculo diferencial e integral, do cálculo de variações, da teoria das séries de Fourier e da teoria de potências – nada mais a falar sobre a rica abundância de problemas próprios da mecânica, astronomia e física.

Na continuidade do desenvolvimento de uma disciplina matemática, encorajado pelo êxito das soluções, o intelecto humano torna-se consciente de sua autonomia. Normalmente, sem estímulos externos reconhecidos, ele cria por si próprio, e de forma mais clara, problemas novos e fecundos, através de combinações lógicas, através de generalizações e particularizações, através da separação e da reunião de idéias. Ele se apresenta em primeiro plano colocando-se como questionador. Desta forma originaram-se o *problema dos números primos* e os demais problemas da aritmética, a teoria de equações de Galois, a teoria dos invariantes algébricos, a teoria das funções automorfas abelianas, e ainda originam, de uma maneira geral, quase *todas as questões delicadas da moderna teoria de números e de funções*.

Entretanto, enquanto a força criativa do raciocínio puro reage, impõe-se novamente as novas exteriorizações do meio e obriga-nos, por meio do aparecimento de novas questões, explorar novas áreas de conhecimento da matemática. Ao mesmo tempo em que procuramos incorporar esta nova área de conhecimento no reino do pensamento puro, achamos, na maioria das vezes, as respostas para problemas ainda não resolvidos e, simultaneamente, trazemos à luz, na melhor das hipóteses, teorias antigas. Nisto baseia-se

[3] Felix Klein (1849-1925).
[4] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897)
[5] Karl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851)

jogos repetitivos e não repetitivos entre o raciocínio e a experiência, como me parece as múltiplas e surpreendentes analogias e esta aparente e estabilizada harmonia, na qual o matemático percebe-se freqüentemente na colocação das perguntas, dos métodos e dos conceitos de diferentes áreas da ciência.

Sendo breve, nós discutimos ainda quais são as exigências gerais e legitimas que devem ser colocadas para a solução de um problema matemático: minha opinião é sobretudo que nestas exigências estão a exatidão da solução, através de uma quantidade finita de respostas evidenciadas e, na verdade, por razões de um número finito de condições prévias, nas quais está a colocação do problema e devem ser, toda vez, formuladas com precisão. E isto funciona. Esta exigência da dedução lógica por meio de um número finito de soluções nada mais é do que a exigência do rigor no caminho da demonstração. De fato, a exigência do rigor, que se tornou uma conhecida importância proverbial na matemática, corresponde a uma necessidade filosófica geral de nosso entendimento, e por outro lado vem através da realização isolada apenas da capacidade intelectual e da fecundidade do problema, até sua completa validade. Um novo problema é como um novo estímulo, sobretudo quando este se origina de uma visão de mundo exterior, o qual somente prospera e traz bons frutos quando ele se apoia na raiz dos valores da nossa ciência matemática, quando é enxertado cuidadosamente e de acordo com as regras rigorosas do jardineiro.

Além disso é um erro acreditar que o rigor do caminho para a demonstração seria o inimigo da simplicidade. Em vários exemplos encontramos provado o contrário, que o método rigoroso é também simultaneamente o mais simples, o mais fácil e mais compreensível. A aspiração para o rigor leva-nos à descoberta da forma final mais simples. Abre-nos também freqüentemente o caminho para os métodos, os quais possuem maior capacidade de desenvolvimento do que os métodos de rigor pequeno. Assim chega-se à teoria das curvas algébricas, através do rigoroso método da teoria das funções e a conseqüente introdução de recursos transcendentes para uma simplificação considerável e maior homogeneidade. Pode-se provar de longe que a série de potências, a aplicação das quatro formas elementares do cálculo, assim como o permitido desmembramento da diferenciação e integração e a seguir o conhecimento que depende da importância da série de potências contribuiu, de forma considerável, para uma simplificação da análise como um todo, em especial da teoria da eliminação e da teoria de equações diferenciais assim como na própria condução para as condições de existência. Para minha defesa a isto, o exemplo mais convincente é o cálculo de variações. O tratamento da primeira e segunda variação de uma integral definida trouxe, em partes, cálculos extremamente complicados, e o desenvolvimento relativo dos matemáticos no passado carecia de um rigor necessário. Weierstrass nos mostrou o caminho para um novo e seguro fundamento para o cálculo de variações. Através de exemplos de integrais simples e integrais duplas, indicarei rapidamente, para terminar esta minha conferência, como a continuidade deste caminho traz consigo uma surpreendente simplificação do cálculo de variações. Seja como comprovação dos critérios necessários e suficientes para a existência de máximos e mínimos, o cálculo da segunda variação e, em partes, até mesmo as trabalhosas conclusões na primeira variação são totalmente prescindíveis -não há nada a dizer do avanço, que está envolvido na remoção da restrição de variações, para os quais os quocientes diferenciais das funções variam muito pouco.

Quando insisto no rigor na demonstração como exigência para uma perfeita solução de um problema, por outro lado, eu gostaria de me opor à opinião de que somente os conceitos da análise, ou então aqueles da aritmética são suscetíveis a um tratamento rigoroso. Esta opinião, que às vezes é defendida por pessoas eminentes, eu considero inteiramente equivocada; tal interpretação unilateral sobre a exigência do rigor levaria para uma ignorância de todos os conceitos que são originários da geometria, da mecânica e da física, para uma obstrução da afluência de novos materiais oriundos do mundo externo, e finalmente, até mesmo como última conseqüência para uma rejeição do conceito de continuum e de número irracional. Mas qual é o importante nervo, que é vital para a matemática, que seria cortado através da extirpação da geometria e da física matemática? Eu penso ao contrário, onde surgem os conceitos matemáticos, ao lado da teoria do conhecimento, ou na geometria, ou a partir de teorias das ciências naturais, os problemas resultam da matemática para investigar os princípios subjacentes dessas idéias e os mesmos são fixados através de um simples e completo sistema de axiomas, que a exatidão dos novos conceitos e sua aplicabilidade para a dedução não devem ficar para trás em respeito aos velhos conceitos aritméticos.

A novos conceitos pertencem também, necessariamente, novos símbolos. Estes nós escolhemos de tal maneira que nos lembrem os fenômenos os quais foram motivos para a formação dos novos conceitos. Assim os símbolos das figuras geométricas são mnemonizáveis através da intuição espacial e, desta forma, são usados por todos os matemáticos. Quem não usa continuamente ao mesmo tempo para uma dupla desigualdade $a > b > c$ para três grandezas a, b, c a figura de três pontos colocados um em seguida ao outro em uma linha reta como a figura geométrica que simboliza a idéia de "estar entre de"? Quem não se serve de figuras de segmentos e retângulos colocados um dentro do outro, quando for válido, para provar com rigor perfeito um difícil teorema sobre a continuidade de funções ou a existência de pontos de condensação? Quem poderia dispensar a figura do triângulo, do circulo com seu ponto central, ou o cruzamento de três eixos perpendiculares? Ou quem poderia renunciar à representação de um campo vetorial, ou à figura de uma curva ou superfície com seus envelopes, que desempenha um importante papel na geometria diferencial, na teoria de equações diferenciais, na fundamentação do cálculo de variações e em outros campos da matemática pura?

Os símbolos aritméticos são figuras escritas e as figuras geométricas são fórmulas gráficas, e nenhum matemático poderia passar sem estas fórmulas gráficas, tão pouco como para calcular algo, a inserção e a remoção de parênteses ou a utilização de outros símbolos analíticos.

A utilização de símbolos geométricos como rigorosos meios de demonstração pressupõe o conhecimento preciso e completo domínio de axiomas, que fundamentam essas figuras, e com isso essas figuras geométricas poderiam ser incorporadas no tesouro geral dos símbolos matemáticos. Por conseguinte é necessário uma rigorosa investigação axiomática em seu conteúdo conceptual. Como na adição de dois números, os algarismos não podem ser colocados um embaixo do outro de forma incorreta, mas, antes, somente as regras do cálculo, isto é, os axiomas da aritmética, determinam a operação correta com os algarismos. Assim é determinada a operação com os símbolos geométricos: através do axioma dos conceitos geométricos e suas combinações.

A concordância entre o pensamento geométrico e aritmético mostra-se também que nós seguimos, a todo o momento, a corrente de operação do pensamento até o axioma nas pesquisas aritméticas, tão pouco como nas reflexões geométricas; pelo contrário aplicamos, sobretudo no primeiro ataque a um problema, tanto na aritmética como na geometria, uma combinação rápida, inconsciente, indefinida e insegura, na confiança de um certo sentimento aritmético para comportamento dos símbolos aritméticos, sem o qual faríamos pouco progresso na aritmética, assim como na geometria sem a imaginação geométrica. Como exemplo de uma teoria aritmética operacionalizada de forma rigorosa com conceitos e símbolos geométricos, cito a obra de Minkowski "Geometria dos números"[6].

Ainda podem ser feitas algumas observações sobre as dificuldades e o domínio de tais dificuldades que os problemas matemáticos podem oferecer.

Se não chegarmos à resposta de um problema matemático, normalmente é porque ainda não reconhecemos o ponto de vista geral a partir do qual o problema apresentado aparece, somente como um simples elo de uma corrente de problemas análogos. Depois de termos achado este ponto de vista, o problema apresentado torna-se acessível em nossa pesquisa assim como também nos torna possível a posse de um método que pode ser aplicado para problemas semelhantes. Serve como exemplo a introdução dos meios de integração complexas através de Cauchy e a apresentação do conceito de ideal na teoria dos números através de Kummer. Este caminho para a chegada de um método geral é certamente o mais acessível e seguro; pois quem procura por métodos sem ter um problema definido diante dos olhos, na maioria das vezes procura em vão.

Na ocupação com problemas matemáticos, eu acredito que a especialização ocupa um papel ainda mais importante do que a generalização. Talvez na maioria dos casos, onde nós em vão procuramos uma resposta para uma questão, a causa do fracasso encontra-se no fato de que nós temos problemas mais simples e mais fáceis do que aqueles que ou não foram resolvidos ou ainda não foram completamente resolvidos. Tudo depende então de achar estes problemas fáceis e resolvê-los através de meios que sejam os mais completos possíveis e através de conceitos susceptíveis a generalizações. Esta regra é uma das mais importantes alavancas para o domínio das dificuldades matemáticas e a mim me parece que, na maioria das vezes, esta alavanca é usada, até inconscientemente.

Às vezes acontece que nós aspiramos à solução sob hipóteses insuficientes ou em sentido incorreto e por esta razão não chegamos ao objetivo. Então resulta a tarefa de demonstrar a impossibilidade da resolução do problema sob as condições prévias fornecidas e sentido exigido. Esta demonstração da impossibilidade já foi realizada por pessoas na antigüidade, quando eles mostraram, por exemplo, que existe uma relação irracional entre a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo isósceles. Na nova matemática a pergunta sobre a impossibilidade de certas soluções desempenha um eminente papel, e nós percebemos que problemas difíceis da antigüidade, como a prova do axioma das paralelas, a quadratura do círculo, ou a resolução da equação do 5º grau através de radicais, tiveram uma solução satisfatória e rigorosa quando foram atacados por outros caminhos que não os originais.

---

[6] Hermann Minkowski (1864-1909), Leipzig, 1896

Provavelmente este curioso fato, ao lado de outros fundamentos filosóficos, o qual nos convence (o que todo matemático concorda, mas que até agora, no mínimo, ninguém se apoiou através de demonstrações), eu penso na convicção de que cada determinado problema matemático exige uma rigorosa solução, quer a resposta para a questão colocada dê certo, quer a impossibilidade de sua resolução e com isto justifica-se o fracasso de todos experimentos. Apresenta-se um problema qualquer não resolvido, como a questão colocada sobre a *constante C* na irracionalidade de Euler-Mascheroni, ou a questão se existem infinitos números primos na forma $2^n + 1$. Por mais inacessível que estes problemas nos pareçam, e por mais perplexos que estejamos diante deles, temos portanto a segura convicção de que sua solução através de uma quantidade finita de processos lógicos puros podem dar certo.

O axioma da solubilidade de cada problema é somente uma particularidade característica do pensamento matemático ou é possível uma lei geral inerente à natureza de nosso pensamento que todas as perguntas colocadas possuem respostas? Encontra-se também em outras ciências velhos problemas que trouxeram grandes contribuições para o bem da ciência através da prova de sua impossibilidade de resolução. Eu recordo do problema do *Motus Perpetuum* Depois de tentativas inúteis da construção do *Motus Perpetuum*, pesquisou-se, pelo contrário, as relações que existem entre as forças naturais quando um *Motus Perpetuum* é impossível[7], esta pergunta ao contrário levou às descobertas da lei sobre a conservação da energia que, por vez explica a impossibilidade do *Motus Perpetuum* no sentido originalmente planejado.

Esta convicção de que a solubilidade de um problema matemático nos dá um forte estímulo durante o trabalho, nós ouvimos um grito contínuo que vem de dentro: *Da ist das Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik gibt es kein Ignorabimus!* (*aí está o problema, procura a solução. Você pode encontrá-la através do pensamento puro, pois na matemática não existe "ignoremos"!*).

Não se pode medir a quantidade de problemas que existe na matemática, e assim que um problema é resolvido aparece em seu lugar uma enorme quantidade de novos problemas. Como amostra, permitam-me nomear em seguida certos problemas isolados de diferentes disciplinas matemáticas, cujas discussões é esperado um avanço na ciência.

Vamos abranger os princípios da análise e da geometria. Os mais importantes e estimulantes acontecimentos dos últimos séculos estão nestes campos, como me parece, os resultados aritméticos do conceito de Continuum nos trabalhos de Cauchy, Bolzano, Cantor e a descoberta da geometria não-euclidiana por Gauss, Bolyai, Lobachevsky. Eu dirijo-me aos senhores para solicitar inicialmente sua atenção para alguns problemas pertencentes a esses campos.

1. Problema de Cantor sobre a potência do Continuum
Dois sistemas, ou seja, dois conjuntos
2. A não contradição dos axiomas da aritmética
3. A igualdade do volume de dois tetraedros com a mesmas áreas da base e mesmas alturas

---

[7] Helmholtz: Über die Wechselwirkung der Naturkräfte und die darauf bezüglichen neusten Ermittelungen der Physik. Vortrag, gehalten in Königsberg 1854.

4. O problema da linha reta como a menor distância entre dois pontos
5. A noção de grupo contínuo de transformações de Lie sem a hipótese da diferenciabilidade das funções definidoras do grupos
6. Tratamento matemático para os axiomas da física
7. Irracionalidade e transcendência de determinados números
8. O problema de números primos
9. Prova da mais geral lei de reciprocidade em um corpo numérico qualquer
10. A decisão sobre a resolubilidade de uma equação diofantina
11. Formas quadráticas com quaisquer coeficientes numéricos algébricos
12. Extensão do teorema de Kronecker sobre corpos abelianos a um domínio de racionalidade algébrica qualquer
13. Impossibilidade da resolução da equação geral do sétimo grau através de funções de somente 2 argumentos
14. Prova da finitude de certos sistemas de funções completos
15. Fundamentação rigorosa do cálculo enumerativo de Schubert
16. Problema da topologia de curvas e superfícies algébricas
17. Representação de formas definidas através de quadrados
18. Construção do espaço a partir de poliedros congruentes
19. As soluções de problemas regulares no cálculo de variações são sempre necessariamente analíticas?
20. Problemas gerais dos valores de fronteira
21. Demonstração da existência de equações diferenciais lineares tendo grupo monodrômico prescrito
22. Uniformização de relações analíticas por meio de funções automórfas
23. Mais desenvolvimento dos métodos do cálculo de variações

David Hilbert