

O SEXTO PROBLEMA DE HILBERT: QUANDO O FIM SE TORNOU O MÉTODO

Wilson Castro Ferreira Jr.

UNICAMP - Brasil

INTRODUÇÃO: A Rivalidade

O assim chamado sexto problema proposto por David Hilbert no II Congresso Internacional de Matemática em Paris, 1900, estipula a axiomatização da Física. Mesmo levando em conta que Hilbert se refere tão somente à Física clássica, ainda assim esta proposta tem um escopo muito mais abrangente e difuso do que as outras 22 que consistiam em problemas técnicos e específicos da matemática pura. Neste ítem a sua ênfase está muito mais em estabelecer uma filosofia científica do que enunciar uma tarefa técnica, e tem muito mais a característica de um desafio programático do que de uma questão com resposta específica.

Por conta destas características é interessante abordar alguns aspectos do contexto histórico, sociológico, e científico que poderiam ter influenciado Hilbert a uma escolha tão peculiar e ousada, considerando-se que a sua influência direta na Física foi praticamente inexistente quando comparada ao seu enorme impacto em Matemática, pura ou aplicada, especialmente nos métodos de Física-Matemática.(*N.I*)

Ao final do século XIX, David Hilbert (1862-1943) em Göttingen e Henri Poincaré (1854-1912) em Paris representavam as duas principais lideranças matemáticas da Europa, e portanto do mundo científico de então.

A rivalidade entre estes dois centros não se resumia apenas a questões nacionais, que foram de fato aguçadas pela vitória prussiana na guerra de 1870 e pelo posterior sucesso de Bismarck na unificação alemã, mas também se estendia inequivocamente às personalidades de seus dois líderes e principalmente às suas visões, distintas, da matemática como ciência.

Em um nível pessoal, é interessante frisar que os trabalhos de Poincaré sobre as funções automórficas, o seu primeiro triunfo científico, foi coincidentemente logrado em detrimento do enorme esforço que Felix Klein empenhou no estudo desta área da matemática. A perda desta corrida intelectual representou um final traumático na carreira científica de Klein, (~1885), o que certamente não passou despercebido por Hilbert, seu “*protegé*”.(*Reid [1970]*).

Poincaré era dotado de uma personalidade renascentista, universal e dispersiva que se sentia à vontade tanto com aspectos técnicos da matemática quanto nas suas aplicações à Mecânica, Termodinâmica, Dinâmica dos Fluidos, Eletromagnetismo, Relatividade, Probabilidade, assim como em Filosofia. Catedrático em física matemática na Sorbonne e na École Polytechnique desde 1886 até sua morte em 1912, Poincaré lecionou em todas as áreas básicas da Física e Probabilidade e publicou várias notas de aula que se tornaram

textos célebres nos respectivos assuntos. Uma medida da universalidade de Poincaré pode ser avaliada pelo fato de que ele foi o único membro da Academia de Ciências da França eleito para todas as suas seções.

Entretanto, o grande contraste entre as personalidades de Hilbert e Poincaré está nas suas visões e atitudes com respeito à própria matemática. A abordagem de Poincaré era discursiva, elegante no trato da língua francesa, fortemente carregada de argumentos de fundo geométrico e intuitivo ainda que mantendo sempre um rigor matemático dentro dos padrões vigentes de sua época.

Embora ele tivesse sido, direta e indiretamente, o mestre de muitos, as suas aulas não eram consideradas claras e organizadas e, na verdade, Poincaré não deixou descendentes matemáticos à sua altura. Sua influência na escola francesa esvaneceu-se quase completamente nas décadas seguintes à sua morte, esquecida até com certo desdém pelo avassalador domínio da influência de Hilbert, em grande parte capitaneado por matemáticos ligados ao grupo Bourbaki. A herança filosófica e matemática de Poincaré foi cultuada e preservada entusiasticamente apenas nos vigorosos centros científicos que começavam a despontar no cenário mundial durante a primeira metade do século XX, alguns nos Estados Unidos mas, principalmente, na União Soviética.

O confronto intelectual entre Poincaré e Hilbert pode ser bem exemplificado pela forma como o matemático francês recebeu a publicação do livro em que Hilbert apresentava a sua axiomatização da Geometria, (*Grundlagen der Geometrie*, 1899, Teubner, Leipzig). A resenha que Poincaré escreveu sobre o livro contém frases como: “Pela lógica demonstramos, mas é pela intuição que descobrimos. A Lógica portanto permanece estéril a menos que seja fertilizada pela intuição”, “..para fazer geometria... alguma coisa além da Lógica é necessária... Parece-nos que o ponto de vista Lógico é o único interesse de Hilbert.... Dada uma sequência de proposições, ele supõe que tudo segue deste começo. Ele não se preocupa com a origem psicológica dos fundamentos”. (Reid[1970]). Nota-se aí uma não muito sutil mas elegante crítica ao projeto matemático que trazia a maior impressão da personalidade científica de Hilbert. O programa de axiomatização levado avante por Hilbert com grande completude e de forma tão cabal em Geometria, foi elogiado por Poincaré em sua resenha mas é impossível também não perceber a sua visão particular e preferencial do assunto que passo a passo é claramente explicitada e contrastada com a de Hilbert.

O Congresso de Paris em 1900 foi obviamente organizado e centralizado na figura de Poincaré a quem foi dado um lugar de destaque na sua programação e na sua condução. A sessão designada para a conferência de Hilbert, na qual ele apresentou os seus famosos 23 problemas, ocupava uma posição relativamente marginal na programação. A fama de Hilbert no entanto atraiu uma grande quantidade de interessados a esta sessão. A presença de Poincaré, a quem era claramente dirigida, ainda que evasivamente, várias observações e comentários da conferência, pareceu a muitos presentes como que meramente formal e sem transparecer qualquer interesse notável pelos assuntos tratados, e muito menos pelos desafios apresentados.

De qualquer forma, poderíamos dizer que a importância desta conferência para o desenvolvimento da matemática se deu mais pelo valor do prêmio de prestígio que a fama de Hilbert iria conferir aos bem sucedidos empreendedores (N.2), e pela concepção da

filosofia científica que acompanhava o programa de trabalho do que pelo significado particular dos problemas. É interessante observar ainda que o próprio Hilbert somente concluiu a elaboração destes problemas na antevéspera do Congresso, razão pela qual sua conferência somente foi publicada mais tarde e não consta dos seus Anais.

Em resumo, diríamos que os 23 problemas foram um meio encontrado por Hilbert para atingir a sua finalidade principal que seria o delineamento da sua concepção filosófica sobre a pesquisa em matemática “*vis a vis*” a de Poincaré, e “*tête a tête*” com o próprio.

O sexto problema apresenta esta característica de forma muito mais explícita já que não pressupunha uma “*solução*”, apenas uma atitude. Além disso, não sendo a Física, até então, um campo de interesse de Hilbert, o enunciado deste problema tem todos os ingredientes de uma “*declaração de guerra*” intelectual generalizada, que não poupa sequer o terreno mais familiar do adversário. A mesma estratégia empregada por Bismarck em outro contexto!

A GRANDE GUINADA: A ressonância entre o programa reducionista de Boltzmann e o programa axiomático de Hilbert

A atividade de pesquisa e aparentemente o interesse de Hilbert até a década de 1890 concentraram-se em áreas de matemática “pura”: teoria dos invariantes, teoria algébrica dos números e axiomatização da geometria. Não há registro de que ele tenha se interessado com alguma energia em questões da Física, Mecânica, ou mesmo em áreas da Matemática que se situavam na interface destas ciências, o que na época consistia basicamente nas equações diferenciais.

Ao contrário de Poincaré, Hilbert era um pesquisador de foco único e extraordinariamente intenso. O seu círculo social, por outro lado, abrangia uma grande variedade de personalidades proeminentes em suas respectivas áreas científicas, tais como Ludwig Prandtl (Mecânica de Fluidos), Karl Schwarzschild (Astronomia), Arnold Sommerfeld (Física), Carl Runge (Análise Numérica), assim como todo o universo da Física Teórica de então através de seu amigo mais íntimo Hermann Minkowski.

O meio científico daquela época era quase paroquial, e extremamente restrito em número e extensão e girava em torno dos centros representados por Paris, Viena, Cambridge-Oxford e Berlin junto com outras cidades universitárias alemãs. Hilbert esteve até 1895 em Königsberg, uma cidade do norte da Alemanha e relativamente modesta do ponto de vista científico. Neste ano, por providência de Klein, que dispunha de uma alta posição burocrática e razoável influência no governo imperial, Hilbert transferiu-se para Göttingen, uma pequena cidade universitária que todavia era herdeira de uma enorme e inescapável tradição matemática na linhagem de Gauss, Riemann e do próprio Klein.

Parte e resultado deste efervescente clima encontramos o histórico texto de equações diferenciais parciais escrito por H.Weber com base nas notas de aulas de G.F.Riemann (G.F.Riemann-H.Weber-*Die Partielle Differential-gleichungen der Mathematischen Physik*, Editor-R. von Mises-Ph.Frank -, Braunschweig Vieweg 1928), emblemático em Göttingen desde os meados do século XIX. Este texto, de extraordinária contemporaneidade ainda hoje, certamente foi o modelo em que se baseou o futuramente mais conhecido “*Courant-Hilbert*”.

O método de trabalho científico de Hilbert era sistemático no sentido de atacar um grande problema de cada vez, e, após a obtenção de um corpo considerável de resultados, prosseguir para outra área. Isto foi feito com a teoria de invariantes, a teoria algébrica de números e com os fundamentos da Geometria, finalizado por ele em 1899. Portanto, a passagem do século coincidia com um momento de transição de foco para Hilbert; nesta terceira vez a mudança seria mais radical e de duração mais longa.

O trabalho de axiomatização da Geometria, finalizado imediatamente antes do Congresso de Paris, representou não apenas um sucesso matemático mas também um feito de grande significado simbólico uma vez que tratava exatamente da disciplina que foi a origem histórica do método axiomático. Além disso, observemos que o fundamento da Física clássica da época era a mecânica Newtoniana que por escolha do próprio Newton foi matematicamente estruturada a partir da Geometria Euclideana; no “*Principia*”, não há sequer uma demonstração com o uso do Cálculo Diferencial. Portanto, o método axiomático euclideano tinha suas raízes firmemente fundamentadas na Física histórica. Por outro lado, a Física de “*fin de siècle*” estava amplamente identificada com a linguagem e o próprio desenvolvimento do Cálculo Diferencial nos seus termos mais primitivos, onde abundavam as manipulações com infinitesimais e técnicas fisicamente plausíveis, (como o princípio de Dirichlet, um dos pontos a serem esclarecidos por Hilbert), que eram utilizados sem qualquer rigor matemático. A proposta de axiomatização da Física, (leia-se, mecânica Newtoniana), não seria portanto uma guinada científica aleatória, ainda que tenha sido uma transição radical na carreira de Hilbert que de agora em diante dirigia o seu foco de atenção primordialmente para questões relacionadas com a Física. A conexão entre a axiomática euclideana e o “*Principia*” de Newton é a primeira ponte nesta transição. (N.3)

Hermann Minkowski, que foi o amigo mais próximo e que maior influência exerceu sobre Hilbert até sua morte em 1909 sempre manteve um interesse sério pela Física. Somente após a vinda de Minkowski para Göttingen em 1902 podemos dizer que o interesse profissional de Hilbert pela Física se tornou um fato. Por iniciativa dele e com o entusiasmo contagiado de Hilbert ambos instituíram um ativo seminário de Física em Göttingen que abordava especialmente os aspectos geométricos da teoria da Relatividade.

Portanto, a formulação do “sexto problema” foi anterior a este surto de atividade em Física propriamente dita, e mencionava especificamente apenas o Cálculo de Probabilidades e a Mecânica, nesta ordem. (N.3). Era, poderíamos dizer, o resultado de uma visão preliminar e até certo ponto amadora que tinha mais a característica de um programa de trabalho pessoal que Hilbert haveria de perseguir com enorme energia durante as próximas duas décadas. A sua confiança na sua filosofia científica era tão grande que atribui-se a ele a frase: “Nós reformamos a Matemática, agora reformaremos a Física e depois a Química”!

Entretanto, apesar da analogia histórica entre a axiomatização da Geometria euclideana e da Mecânica Newtoniana, o ponto de vista esposado por Hilbert neste seu programa teve outras vertentes ideológicas que foram provenientes do trabalho do físico austríaco Ludwig Boltzmann, e isto está claro no próprio texto de sua conferência. (N.4).

Ludwig Boltzmann (1844-1906) havia concluído em 1898 o seu monumental trabalho sobre teoria cinética de gases que consistia em um notável paralelo à axiomatização da Geometria. Neste trabalho, Boltzmann estabeleceu uma teoria

macroscópica de gases a partir de princípios fundamentais da mecânica Newtoniana de partículas, o que trazia um rigor quase matemático à Termodinâmica, uma área da Física que era considerada até então dentre as mais obscuras do ponto de vista conceitual. A teoria reducionista de Boltzmann iniciou um dos maiores triunfos metodológicos da Física de “*fin de siècle*” e se constitui em um dos principais pilares da Física contemporânea. Entretanto, é importante observar que a teoria cinética de Boltzmann baseava-se na hipótese física da existência de átomos como entidades fundamentais da matéria, o que era apaixonadamente combatido pelo químico W. Ostwald e principalmente pelo físico e filósofo Ernest Mach. A influência científica do primeiro e ideológica do segundo nos países de língua alemã era enorme. Uma medida da intensidade e acidez desta disputa entre os seguidores de Mach e Boltzmann pode ser avaliada pelo fato de que à ela se atribui a principal causa do trágico suicídio deste último em 1906.(Broda). Sendo Hilbert em 1900 um noviço nesta litigiosa área, não é de se admirar que na conferência de Paris ele apresente seus elogios a Mach exatamente um parágrafo antes de perfilar-se com a teoria atomística de Boltzmann.(N.3). Boltzmann era um incansável polemista e o seu programa reducionista deve ter causado uma ressonância nítida com o programa axiomático de Hilbert.

A visão de Hilbert para o “sexto problema” estaria muito mais concentrado no paralelo conceitual e metodológico entre reducionismo (micro-macro) e o método axiomático (axiomas-estrutura) do que em uma axiomatização de fato de princípios Físicos, o que de resto, supunha-se, àquela altura, que já estivesse sido completada pelas leis de Newton. Esta é uma visão completamente de acordo com o espírito reinante na época, quando se tinha por certa a construção de toda a Física a partir dos princípios fundamentais existentes restando apenas questões de método e detalhes.

Portanto, podemos concluir que o programa de axiomatização da Física proposto por Hilbert, na verdade consistia em um programa para a estruturação rigorosa dos *métodos matemáticos de processos limite* que pudessem relacionar teorias físicas macroscópicas com a teoria fundamental de Newton no nível microscópico. E isto é explicitamente declarado por Hilbert em sua conferência.(N.3)

OS MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA A TRANSIÇÃO DE ESCALAS: Um programa para o século XXI

O Cálculo de Probabilidades, intensamente utilizado como argumento e método na teoria cinética de Boltzmann, é o único método da “física-matemática” citado explicitamente por Hilbert no “sexto problema”. Isto mostra que Hilbert considerava esta área apenas como um método e não ainda como uma teoria matemática, o que de fato somente se concretizou com a axiomatização de Kolmogorov em 1933, que, a propósito, declara no prefácio de seu livro que o seu trabalho consiste na resolução, parcial, do “sexto problema” de Hilbert.

A ênfase de Hilbert no “*Calcul des Probabilités*” demonstra claramente que o seu programa de “axiomatização da Física” seguia paralelamente a filosofia reducionista de Boltzmann, não apenas no sentido lógico-constutivo como também com respeito aos métodos.

O paralelo geral entre as construções de estruturas matemáticas a partir de bases axiomáticas e a obtenção de teorias físicas macroscópicas fundamentadas na mecânica microscópica newtoniana é enfatizado por Hilbert nas vezes em que ele utiliza a expressão “...*idée de passage à la limite*..”.

O método matemático associado por Hilbert à implementação da “idéia de passagem ao limite” foi exclusivamente o “*Calcul des Probabilités*”, o que é justificável uma vez que o seu exemplo concreto e notável era o “*Vorlesungen über Gastheorie*” de Boltzmann.

Entretanto, é interessante observar que, se, por um lado Hilbert se enganou quanto ao exclusivismo atribuído ao método probabilístico, por outro lado ele acertou totalmente na “...*idée de passage à la limite*..”. O *limite* citado tem um caráter de aproximação assintótica e é característico dos métodos de aproximação que podem ser englobados no que comumente se denomina “métodos de múltiplas escalas”.

A ocorrência de múltiplas escalas, tanto espaciais quanto temporais, em um determinado fenômeno físico é inevitável e a separação de seus efeitos faz parte do método científico inaugurado por Galileo. Um pouco de reflexão sobre a complexidade dos fenômenos físicos, que a rigor deveriam envolver todos os efeitos da escala atômica à escala astronômica, só nos leva a concordar com Albert Einstein quando afirmou que o notável afinal não é que tenhamos entendido melhor um fenômeno qualquer, mas que possamos entender qualquer coisa que seja.

O princípio fundamental que nos permite alguma compreensão do universo é a possibilidade de separar fenômenos em escalas “fracamente acopladas” pois, do contrário, não teríamos sequer como viver, já que nossos sentidos nos informam e nos capacitam a intervir apenas em nossa escala humana. A pressuposição de que é possível separar escalas é a própria base ideológica do método analítico com que Galileo fundou o moderno pensamento científico em detrimento da obsessão medieval pela “teoria do mundo”, ou a pedra filosofal.

Algumas separações de escalas são experimentalmente óbvias para o físico: “a fase da lua de Júpiter, ou o vôo de uma borboleta no Brasil teria alguma influência notável na queda de uma pedra na Torre de Pisa?”. Outras entretanto são extremamente sutis e localizadas, tornando-se indispensável a utilização de métodos matemáticos engenhosos para separa-las e qualifica-las.

Os métodos assintóticos e a teoria de Probabilidade são as técnicas matemáticas apropriadas para estabelecer a transição de informações de uma escala para outra e desacoplar, por exemplo, uma teoria macroscópica de fenômenos microscópicos.

A análise assintótica tem sua origem no próprio desenvolvimento do cálculo diferencial e talvez o seu exemplo mais antigo e conhecido seja a fórmula assintótica de Stirling para a função fatorial que, coincidentemente, é um resultado fundamental para o desenvolvimento do “*Calcul des Probabilités*”(N.6). Outros exemplos clássicos e importantes são os Métodos assintóticos de Laplace para integrais, (*Théorie Analytique des Probabilités*, 1782), e o método de Liouville-Green-Stokes para aproximação assintótica de soluções de equações diferenciais. Apesar da sua ocorrência freqüente, estes métodos não dispunham de uma sistematização até o final do século XIX. A sua utilização em

matemática pura era vista como anátema pela influente escola Weierstrassiana por causa do uso que fazia das séries divergentes. (Kline[1972]).

As séries assintóticas divergentes foram reintegradas ao corpo formal da análise matemática pelo trabalho de Poincaré sobre mecânica celeste em 1886 . Entretanto, até 1900 não havia uma teoria assintótica abrangente, nem em matemática nem em física. (Kline[1972]).

Em 1904, durante o IV Congresso de Matemática em Heidelberg, Ludwig Prandtl [1905] apresentou a sua teoria de camada limite que revolucionou a dinâmica de fluidos e, dentre outras coisas, tornou possível a nascente tecnologia aerodinâmica. A teoria de Prandtl está assentada sobre um sofisticado argumento matemático para a construção de uma aproximação assintótica que permite efetuar a transição analítica suave entre as equações de Euler para a dinâmica de um fluido ideal e as equações de Navier-Stokes para um fluido viscoso. Este argumento foi posteriormente generalizado em matemática aplicada e atualmente conhecido é como “método matching”, aplicado em inúmeros outros problemas de transição assintótica, especialmente em mecânica. É interessante lembrar novamente que, embora Prandtl fizesse parte do círculo social de Hilbert em Göttingen, não consta que eles tiveram qualquer discussão mais específica sobre estas questões. Talvez pudéssemos acrescentar aos exemplos de Freeman Dyson mais este histórico exemplo de “*missed opportunities*”.(Dyson[1972]).

A teoria eletromagnética de J.C. Maxwell foi um dos grandes triunfos da Física clássica pela síntese que realizou entre as teorias de campo elétrico de Faraday e a luz. Por outro lado, havia a necessidade de se estabelecer uma transição entre os fenômenos ondulatórios de alta frequência na teoria de Maxwell e as observações “macroscópicas” da Ótica geométrica de Newton que tinham características de trajetórias de partículas. Mais uma vez o método matemático que permitiu explicar e descreve a transição entre fenômenos com fundamentos em escalas tão distintas é baseado na aproximação assintótica de soluções de equações diferenciais parciais originalmente desenvolvidos por Liouville, Green e Stokes.(Kline[1972]). O desenvolvimento deste métodos teve uma enorme influência não apenas no desenvolvimento da Física e das suas aplicações como também no desenvolvimento da teoria de equações diferenciais parciais.(Keller[1978]). É interessante observar que este desenvolvimento foi em grande parte devido à escola de equações diferenciais parciais iniciada por Richard Courant na New York University que na década de 1940 passou a ser depositária mais fiel da herança matemática da antiga Göttingen.

A análise da transição (assintótica) entre a clássica mecânica Newtoniana e a revolucionária teoria quântica, surgida repentinamente logo após o Congresso de 1900, seria uma das principais questões da Física matemática do século XX que encontrou um espírito preparado, inadvertidamente, convenhamos, pela visão que Hilbert programou em sua conferência. (Maslov[1981]).

Além disso, é também neste período de duas décadas, iniciado em 1900, que irão surgir os monumentais trabalhos de Hilbert em análise matemática que caracterizam o conteúdo de um dos mais importantes textos da física-matemática, o famoso “*Courant-Hilbert*”. É ainda neste período que Hilbert passa a ter como alunos e seus continuadores, matemáticos com profundo interesse e importância no desenvolvimento da física matemática, tais como Hermann Weyl, Erhard Schmidt, e Richard Courant.

O vigoroso e vasto desenvolvimento da análise assintótica e da teoria de probabilidade, vistos como métodos de análise de teorias de transição micro-macro, pode ser bem entendido como resultado, em parte, e talvez jamais previsto, daquilo que Hilbert insinuou como finalidade no sexto problema. O fim assim se tornou o método.

Em 1922, David Hilbert retira-se quase que completamente do cenário da física-matemática e imprime a última grande guinada científica de sua carreira que o levaria de volta e vez ao seu amor da juventude : os fundamentos da matemática.

NOTAS:

N1- Bem entendido, a influencia *indireta* de Hilbert na Física por intermédio dos métodos matemáticos tal como apresentados no histórico texto “Courant-Hilbert” foi incomensurável. O contrário se poderia dizer quanto aos princípios e teorias básicas da Física. H.Weyl (1946/1947):” *(Hilbert) greatly enjoyed his contact with physicists...The harvest however can hardly be compared with his achievements in pure mathematics.The maze of experimental facts....is too manifold...for the axiomatic method..Men like Einstein and Niels Bohr grope their way in the dark toward their conceptions of general relativity or atomic structure by another type of experience and imagination than those of the mathematician.....Thus Hilbert’s vast plans in physics never matured*”

V.I.Arnold: “*Hilbert tried to predict the future development of mathematics and to influence it by his problems...The influence of H. Poincaré and of H.Weyl...was much deeper*”

N2-Hoje, além do prestígio científico, a resolução de problemas matemáticos podem gerar receitas pecuniárias consideráveis. O Clay Mathematics Institute (CMI: <http://www.claymath.org>) fundado em 1998, instituiu uma lista de sete problemas fundamentais em matemática pura e suas aplicações, em computação (P=NP?), Física (Yang-Mills) e mecânica (Navier-Stokes e turbulência), além da conjectura de Poincaré e um problema de Hilbert (hipótese de Riemann), cujas soluções serão premiadas, cada uma, por US\$1 milhão!!

N3-“*Les recherches sur les principes fondamentaux de la Géometrie nous conduisent à envisager ce probleme: ‘Traiter sur ce modèle les branches de la Physique où les Mathématiques jouent aujourd’hui un rôle prépondérant; ces branches de la Science sont, avant toutes autres, le Calcul des Probabilités et la Mécanique’*”.(Parágrafo inicial do item VI da conferencia de Hilbert).

N4- “*Quant aux principes de la Mécanique, nous possédons déjà au point d vue physique des recherches d’une haute portée; je citerai, par exemple, les écrits de MM March, Hertz, Boltzmann et Volkmann...Ainsi le livre de M. Boltzmann sur les ‘Principes de la Mécanique’ nous inciter à établir et à discuter au point de vue d’une manière complète et rigoureuse les méthodes basées sur l’idée de passage à la limite, et qui de la conception atomique nous conduisent aux lois du mouvement des continua. Inversement on pourrait, au moyen des méthodes basées sur l’idée de passage à la limite, chercher de déduire les lois du mouvement des corps rigides d’un système d’axiomes reposant sur la notion d’états d’une matière remplissant tout l’espace d’une manière continue....*”(pg. 82 do artigo da conferencia de Hilbert).

N5-D Kendall, et.al.- *Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987)*, Bull. London Math. Soc. 22 (1) (1990), 31-100): "...Kolmogorov's major part in setting up the theory was to answer the probability part of Hilbert's Sixth Problem .

If Kolmogorov made a major contribution to Hilbert's sixth problem, he completely solved Hilbert's Thirteenth Problem in 1957 when he showed that Hilbert was wrong in asking for a proof that there exist continuous functions of three variables which could not be represented by continuous functions of two variables.

N6-J.Stirling -*Methodus Differentialis* , 1730 . $\log(n!) = \log\left[(2\pi n)^{\frac{1}{2}} n^n e^{-n}\right] + O\left(\frac{1}{n}\right)$.

N7-Harold Grad: " *The study of singular limits is a singular preoccupation of applied mathematics--....* "in, *Rarefied Gas Dynamics, Academic Press 1974 pg.37.*

BIBLIOGRAFIA:

L.Boltzmann-*Vorlesungen über die Principe der Mechanik*, 2 vols. Barth, Leipzig, 1897, 1904.

L.Boltzmann-*Vorlesungen über Gastheorie*, 2 vols. Barth, Leipzig, 1896, 1898.

L.Boltzmann- *23 Populäre Schriften*, Barth , Leipzig 1905.

E.Broda-*Ludwig Boltzmann- Man, Physicist, Philosopher*, Ox Bow Press Woodbridge, Conn. USA, 1983

R.Courant-D.Hilbert- *Methoden der mathematischen Physik*, Springer-Verlag, Berlin 1924

L.Corry-*David Hilbert and the axiomatisation of physics (1894-1905)*, Arch.Hist.Exact Sci. 51 (1997), 83-198, e 53(1999) 489-527.

F.J.Dyson-*Missed Opportunities*, Bull. Am. Math. Soc. 78(5), 635-652, 1972.

J.Glimm-D.H.Sharpe-*Multiscale Science: A Challenge for the Twenty-First Century*, SIAM News, October 1997, pg. 4-19.

I.Grattan-Guinness- *A Sideways Look at Hilbert's Twenty-three Problems of 1900*, Notices of AMS 47(7), 2000, pg. 752-757.

D.Hilbert-*Grundzuge einer allgemeine theorie der linearen integralgleichungen*, Teubner, Leipzig 1912.

D.Hilbert-S.Cohn-Vossen-*Anschauliche Geometrie, Berlin 1932, (Geometry and the Imagination*, AMS 1998)

D.Hilbert-*Grundlagen der Geometrie, 1899, Teubner, Leipzig.*

D.Hilbert-"*Sur les problèmes futurs des mathématiques*, Compte Rendus du Deuxième Congrès International des Mathématiciens, Gauthier-Villars 1902, 58-114.

J.B.Keller- *Rays, Waves and Asymptotics*, Bull Am.Math.Soc. 84(5) 1978, 727-750.

F.Klein-*Lectures on Mathematics*, AMS 2000 . (1893).

M.Kline-*Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford Univ. Press 1972

A.N.Kolmogorov-*Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, 1933.*

- V.P.Maslov-M.V.Fedoryuk-*Semiclassical Approximations in Quantum Mechanics*, Reidel 1981.
- I.Newton-*The Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy*, translation and introduction by I.B.Cohen, Univ.Calif. Press 1998
- H.Weyl-*David Hilbert and his Mathematical Work*, Boletim da Soc. De Mat. de São Paulo1, 76-104 (1946) e, 2,37-60, (1947).
- L.Prandtl-*Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung, Verhandlungen des III Internationalen Mathematiker-Kongresses (Heidelberg 1904)*, Teubner, Leipzig 1905, pg. 484-491.
- C.Reid-*Hilbert*, Springer-Verlag, 1970.
- G.F.Riemann-H.Weber-*Die Partielle Differential-gleichungen der Mathematischen Physik*, Editor-R. von Mises-Ph.Frank -, Braunschweig Vieweg 1928

Wilson Castro Ferreira Jr. - IMECC - UNICAMP.
e-mail: wilson@ime.unicamp.br