Revista Brasileira de História da Matemática
Especial nº 1 – Festschrift Ubiratan D'Ambrosio – (dezembro/2007)
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

MATEMÁTICA NA IDADE MÉDIA: ENTRE O MÍSTICO E O CIENTÍFICO

Arlete de Jesus Brito
Unesp - Rio Claro - Brasil

Quando nos referimos à matemática no período de tempo denominado por Idade Média, o fazemos como se ela fosse única e como se esta periodozação fosse válida para todas as sociedades existentes naquela época e desconsideramos as especificidades da produção matemática dos diferentes povos como os maias, os árabes, os chineses, para citar apenas alguns. No entanto, como não é possível abarcarmos nos limites deste texto todos estes vieses da história da matemática, optamos por realizar um recorte histórico para nossas análises, portanto, quando mencionarmos "matemática medieval" estaremos fazendo alusão aos textos sobre matemática produzidos no ocidente europeu entre os séculos IV e XIV[1]. Nossa escolha recaiu sobre este recorte por entendermos que ainda são poucos os estudos sobre a matemática européia naquele período de tempo[2].

A matemática grega da Antiguidade era criada, basicamente, por meio da especulação teórica, estava baseada nas leis da lógica e, desde Hipócrates de Quios (c. V a.C.) passou a ser organizada em sistemas axiomáticos. Porém a partir do século III, algumas mudanças se fizeram sentir na produção matemática, pois a cultura do império romano preferia as técnicas tradicionais de medidas e contagens necessárias ao cadastro do Império à geometria pura, além disto, a ruptura lingüística crescente entre Oriente e Ocidente praticamente inviabilizou, cada vez mais ao mundo romano do Ocidente, o acesso a obras gregas anteriores ao século III. Mas, apenas estas duas características do império romano não explicam a ruptura da matemática medieval com a grega da Antiguidade. Podemos apontar outros fatores, como por exemplo, o papel desempenhado pela Igreja católica naquele período no que se refere à produção, veiculação e manutenção das idéias e saberes.

A partir do momento em que o domínio das habilidades de leitura e escrita tornou-se praticamente restrito ao clero, o acesso aos conhecimentos já existentes e a produção de novos conhecimentos passaram a ser quase que uma exclusividade do mesmo. Este quase monopólio da Igreja sobre os saberes determinou quais deles poderiam ser transmitidos e que tipo de conhecimento deveria ser produzido. Muitos dos saberes greco-romanos foram

---

[1] No século seguinte, o conhecimento matemático árabe e as traduções de textos gregos da Antiguidade começam a influenciar fortemente uma nova produção matemática, na Europa.

[2] Para estudos sobre as matemáticas hindu e árabe pode-se procurar, entre outras, a revistra Historia Mathematica, números 1 (1974) 20 (1993) 22 (1995). Para análises das matemáticas chinesa, maia, hindu e árabe veja-se, por exemplo, os livros: A crista do pavão real, Knowledge across cultures, e Mathematics across cultures.

apropriados para dar sustentação filosófica aos dogmas cristãos; neste processo, aqueles que não se coadunavam com tais dogmas foram ou excluídos, ou alegorizados, ou ainda reduzidos e adaptados de modo a não contradizerem as idéias religiosas. Os conhecimentos matemáticos produzidos pelos pagãos não escaparam desse processo. Além do mais, o enfoque da produção cristã, entre os séculos VI e VII, recaiu sobre a criação não de novos conhecimentos, mas de manuais de estudo e ensino dos saberes já produzidos, de modo que a maioria das obras compreendidas nesse período restringe-se às traduções parciais de textos já existentes, como por exemplo, as realizadas por Anicio Manlio Severino Boécio (c. 480-524); os compêndios de teologia; os manuais em que se tentava reunir o conhecimento das artes liberais considerado importante para a exegese bíblica como os textos sobre as artes liberais de Magno Aurelio Cassiodoro (c. 480- 575), o *Livro dos Números* e as *Etimologias* de Isidoro de Sevilha (c 550 – 636), e os manuais utilizados em situações práticas como aqueles de gromática dos arquitetos de então.

Assim, esta matemática medieval se formou a partir da releitura que a sociedade ocidental da Idade Média fez de fragmentos da matemática grega, releitura esta muitas vezes revestida de aspectos simbólicos e realizada a partir das necessidades relacionadas tanto às especulações metafísicas quanto às questões de trabalho e de sobrevivência.

Aquela matemática era definida como “a ciência doutrinal que considera a quantidade abstrata” (*Etim.*, III, prefácio), como observamos nos textos de Isidoro de Sevilha e de Cassiodoro. Para compreendermos melhor esta definição é necessário precisar o que significaria, para aqueles autores, uma “ciência doutrinal”. Isidoro distingue as partes da filosofia em especulativa e prática. A especulativa seria aquela que “eleva-nos acima do visível, tornando possível contemplarmos as coisas divinas e celestiais, as quais só podem ser apreciadas com a mente, pois estão acima do corpo” (*Etim*., II, 24, 10). A filosofia especulativa subdividiria-se, segundo este autor, em natural, divina e doutrinal. Doutrinal seria “a que investiga a quantidade abstrata” (*Etim*., II, 24, 14). Dessas classificações, concluímos que a quantidade abstrata estaria entre “as coisas divinas e celestiais” que só podem ser contempladas com a mente, o que nos aproxima de um platonismo adaptado às idéias cristãs, como aquele encontrado em Santo Agostinho quando escreve em seu livro *Sobre a Ordem*:

> Tudo o que se conhece com a mente, e não o que se percebe pelos sentidos, está com Deus. Atrevo-me ainda a dizer mais (...) quem se entrega à percepção das coisas sensíveis, não apenas está separado de Deus, mas também de si mesmo. (II, 2, 5) (...) Esta disciplina [matemática] é a mesma lei de Deus que, sempre permanecendo fixa e inabalável Nele, de certo modo se imprime nas almas dos sábios, de modo que tanto melhor sabem viver e com tanta maior elevação quanto mais perfeitamente a contemplam com sua inteligência e a guardam com sua vida (II, 8, 25).

A matemática na Idade Média, seguindo uma tradição que vem desde os pitagóricos[3], era composta pela aritmética, música, geometria e astronomia, conjunto de matérias que Boécio denominava por “quadrivium”, mas que nas obras de Isidoro e Cassiodoro era

[3] Essa divisão já se encontrava no tratado *Sobre a harmonia* do pitagórico Arquitas de Tarento (c. 400 a. C.) (Cf. Nicômaco, livro I)

denominado por "matemática". A aritmética e a música seriam o estudo das quantidades discretas, enquanto a geometria e a astronomia seriam o das grandezas contínuas. Boécio fazia outra diferenciação. Segundo ele, a aritmética e a geometria tratariam das quantidades e grandezas imóveis, ou seja, dos números e figuras imóveis, ao passo que a música e a astronomia discorreriam sobre as quantidades e magnitudes móveis, isto é, números e figuras em movimento.

O estudo da quantidade em si mesma: aritmética

Na Idade Média, a aritmética ocupava um lugar de primazia entre as disciplinas do quadrivium. Tal primazia estava embazada na crença dos primeiros pitagóricos de que ela seria necessária aos termos geométricos tais como triângulo, quadrilátero, etc, que possuem os números implicados em suas concepções; que as razões harmônicas da música são aritméticas; e que o movimento dos astros formaria figuras governadas por quantitades. Segundo o neopitagórico Nicômaco de Gerasa (séc. I), ela seria

> (...) a ciência naturalmente prioritária, mais honrosa, mais venerável e mãe e enfermeira das demais. (...) Tudo o que tem sido arranjado no universo por um método sistemático parece, tanto em suas partes como no todo, ter sido ordenado de acordo com o número, pelo pensamento e mente daquele que criou todas as coisas. (VI, 1)

A idéia pitagórica de que todo o universo teria sido arranjado segundo um princípio numérico vai ao encontro da passagem da Bíblia na qual se afirma que "tudo foi criado em medida, número e peso" (Sab 11, 21), o que teria levado Santo Agostinho e muitos teólogos medievais após ele a adotarem tal crença acerca da formação do universo. Outro exemplo que corroboraria a relação entre os números e o milagre da obra divina seria, segundo aqueles teólogos, a criação do mundo em seis dias, uma vez que seis é o primeiro número perfeito. Matematicamente, número perfeito é aquele cuja soma de seus divisores próprios é igual a ele mesmo, por exemplo: $6 = 1+2+3$. Cassiodoro (IV, 585) e Boécio (I, 19) dissertaram sobre a importância metafísica deste número, enquanto Agostinho (*Cidade de Deus,* XXX, 102) afirmava que:

> Toda esta narração tem um objetivo: a perfeição do número seis, que é um mesmo dia repetido seis vezes, completando-se a criação em seis dias. E isto não porque Deus tivesse necessidade do tempo, como se não pudesse criar simultaneamente todas as coisas, Ele que haveria de formar depois com movimentos congruentes os tempos, mas porque o número seis significa a perfeição das obras".

O restante capítulo XXX do *Cidade de Deus* é dedicado a explicar porque o seis é um número perfeito. Para isso, Agostinho acorre ao conceito matemático de tais números, o que nos leva a concluir que, para o autor, o conceito matemático de número perfeito teria levado Deus a escolher o seis, primeiro número perfeito, para ser a quantidade de dias da criação, isto é à perfeição do número expressaria a perfeição da obra.

Esses trechos da Bíblia e do livro *Cidade de Deus* mostram como as crenças pitagóricas sobre um princípio numérico na formação do mundo acabaram por ser incorporadas e adaptadas às crenças cristãs de alguns pensadores da hierarquia eclesiástica, como, por exemplo, Agostinho e Isidoro. Este último, em seus argumentos sobre a importância dos números não nos deixa qualquer dúvida sobre essa crença, pois escreve: "suprime o número de todas as coisas e tudo se extingue. Tira o cálculo do tempo e tudo será abarcado por cega ignorância, não nos diferenciaríamos dos animais que não têm o raciocínio do cálculo" (Etim., IV, 586).

Aqui, a contagem do tempo adquire uma dimensão mais ampla do que aquela ligada às necessidades práticas, pois a própria humanidade do Homem estaria determinada pela possibilidade do cálculo do tempo. Agostinho também coloca o número como característica distintiva do ser humano e dos animais (*De Ordine*, XIX, 49), mas não a relaciona à contagem do tempo e sim à possibilidade do raciocínio numérico. Segundo ele, "eu sou superior [aos animais] não por fabricar coisas proporcionais, mas por conhecer as proporções".

Porém, a importância dada à aritmética, no medievo, não se explica apenas por estas questões metafísicas, mas também por suas aplicações práticas no cômputo do tempo, na administração de bens e na exegese bíblica. A medida do tempo foi, durante o período em questão, um dos problemas mais freqüentes[4] no meio intelectual eclesiástico, pois dela dependiam o conhecimento das horas dos ofícios, que variavam segundo as estações, e a determinação da data da Páscoa. As situações de administração financeira também faziam parte do cotidiano da alta hierarquia eclesiástica Segundo DIAZ (1982, p. 108), nas distintas sessões do concílio de Sevilha de 633, época em que Isidoro era bispo naquele episcopado, resolveram-se vários problemas de ordem econômica. A aritmética também foi usada para a compreensão de passagens da Bíblia nas quais os números estão presentes, conforme foi apontado tanto por Agostinho em *A doutrina cristã,* quanto por Cassiodoro (Prefácio, 558), e também por Isidoro, que escreveu o *Livro do Número* com o objetivo de atender à necessidade prática de ajudar os clérigos a explicar aos fiéis tais passagens. Sendo assim, enquanto a matemática grega da Antiguidade fazia uma diferenciação entre a aritmética que seria o estudo teórico dos números, por exemplo, o estudo dos teoremas sobre números pares e ímpares, e a logística que seria a utilização dos números em situações práticas, na matemática medieval, a aritmética era definida como a "disciplina que estuda a quantidade numérica em si mesma", independente do fato de estes números estarem ou não sendo aplicados em situações práticas.

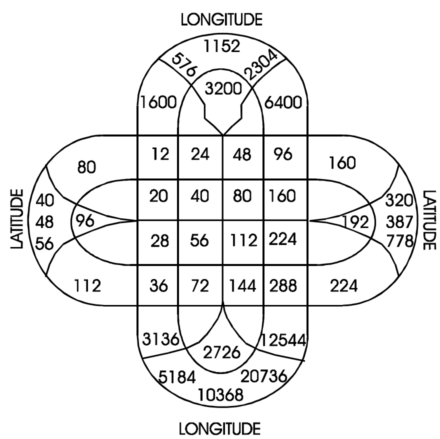
Apesar disto, os escritos acerca de aritmética que serviram de base para os estudos daquele período foram a tradução feita por Boécio do texto do neopitagórico Nicômaco de Gerasa e as compilações que se utilizam desta tradução, como os textos de Cassiodoro e de Isidoro. Deste modo, os estudos sobre aritmética encontrados em fontes escritas restringem-se a algo que poderíamos, hoje, denominar por teoria dos números. Naquela aritmética, o número era definido como uma reunião de unidades, o que fazia com que não só as frações, mas também a própria unidade não fossem consideradas números. Esta aritmética limita-se a classificações dos números e a exposição de propriedades dos mesmos. Inicia-se a

[4] Por solicitação do imperador Júlio César, o problema do calendário foi resolvido pela primeira vez pelo astrônomo Sosígenes que propôs três anos consecutivos de 365 dias e o quarto ano bissexto. Em tal calendário a duração média do ano é superior à real em 11 minutos e 14 segundos. O problema do calendário perdurou durante toda a Idade Média. O calendário juliano, introduzido em 46 a.C., foi aperfeiçoado, no século XVI, pelo papa Gregório XIII. No calendário gregoriano, usado atualmente, a duração do ano é superior à real em 26 segundos. (cf. BESKIN, 1987, p. 18-19)

classificação dos números em pares e ímpares. Os pares estão subdivididos em parmente par, parmente ímpar e imparmente par. Segundo Boécio (1086, a), parmente par seriam aqueles que podem ser divididos em duas partes iguais e estas por sua vez também podem ser dividas em duas partes iguais, e assim sucessivamente até a unidade. Ou seja, a seqüência dos números parmente pares forma o que hoje denominamos de progressão geométrica de razão 2, isto é 1, 2, 4, 8, 16... Uma das propriedades desta PG, apontada por Boécio (1087, a, b e c), afirma, em nossa linguagem atual, que a soma dos n-1 primeiros termos sempre será igual ao n-ésimo termo menos 1, por exemplo: 1+2+4 = 8-1. Também é observado que, em caso da seqüência possuir um número par de termos, o produto de qualquer par de termos extremos é igual ao produto dos termos do meio. Se a mesma possuir um número ímpar de termos, o produto de qualquer par de termos extremos será igual ao quadrado do termo do meio.

Parmente ímpar são aqueles cujas metades não podem ser divididas por dois, como os números 6, 10 e 22. Tais números formam uma progressão aritmética de razão 4 e a soma de qualquer par de termos extremos de uma seqüência será igual a soma dos termos do meio ou igual ao dobro do termo do meio, caso a seqüência tenha número ímpar de termos (cf. Boécio, 1088, c).

Imparmente par são aqueles que possuem as propriedades tanto dos parmente pares, quando consideramos o conjunto de seqüências, quanto as dos parmente ímpares, ao considerarmos cada seqüência em separado. São obtidos pela multiplicação de um dos termos da PG (4, 8, 16, 32, ...), pelos termos da PA (3, 5, 7, 9, 11, ...). Por exemplo, as seqüências (12, 20, 28, 36, ...) e (24, 40, 56, 72, ...) são sequências de números imparmente pares. Tais propriedades foram representadas por Boécio (1091, b) na seguinte tabela[5]:



[5] Tal tabela encontra-se na edição Migne do texto de Boécio. Nela, os números estão representados no sistema de nuneração indu-arábico, porém, certamente, no original era utilizado o sistema de numeração romano, uma vez que o sistema de numeração hindu-arábico, como o utilizamos hoje, não era conhecido a época de Boécio. Além disto, as compilações feitas por Cassiodoro e Isidoro de Sevilha a partir dos textos de Boécio, utilizam-se do sistema de numeração romano. Para uma análise completa desta tabela, ver (SCHRADER, 1968).

As quatro linhas centrais da tabela formam progressões geométricas de razão dois, enquanto as quatro colunas são progressões aritméticas. Os demais números representados na tabela relacionam-se às propriedades, já citadas, das seqüências, por exemplo, 12 X 96 = 24 X 48 = 1152; 12 X 48 = 24 X 24 = 576. Por outro lado, observamos também que os números da coluna central são as médias geométricas destes produtos, como 1152 é igual a $\sqrt{576.2304}$. Os números 48, 96, 192, 384, 40, 56, 80, 112, 160, 224, 320, 448 são somas dos termos das progressões aritméticas, conforme as propriedades referidas por Boécio. Além disto, os números da linha central são as médias aritméticas de tais somas.

Os números ímpares, naquela obra estão divididos em primos, compostos e primos entre si. Boécio (1096, c) se remete ao método das subtrações sucessivas para determinar se dois números são primos entre si. Tal método é uma interpretação aritmética do processo geométrico euclidiano de determinação da maior unidade de medida em comum entre dois segmentos, o que hoje denominamos por cálculo do máximo divisor comum entre dois números.

Outra classificação dos números pares, feita naquela aritmética, é em perfeitos, deficientes e superabundantes. Já expusemos aqui o significado de números perfeitos. Números deficientes são aqueles cuja soma dos divisores próprios é menor que ele mesmo, por exemplo, o número oito, pois 1+ 2+ 4 <8. Superabundantes são aqueles que a soma dos divisores próprios é maior que ele, por exemplo, o número 12 uma vez que, 1+2+3+4+6>12.

Boécio expõe um método de determinação de números perfeitos, porém sem justificá-lo. Segundo ele, para calcularmos números perfeitos, devemos listar a sequência dos números parmente pares e os adicionarmos respeitando a ordenação dos termos na progressão. Se a soma for um número primo, então a multiplicamos pela última parcela da adição. Por exemplo:

1 + 2 = 3
3 X 2 = 6 que é o primeiro número perfeito.

1 + 2 + 4 = 7
7 X 4 = 28, que também é perfeito.

Utilizando nossa simbologia atual, podemos afirmar que, segundo Boécio, todos os números perfeitos podem ser obtidos pela fórmula $2^n(2^{n-1} - 1)$. Atualmente, devido as modernas técnicas computacionais, sabemos que nem todos os números produzidos por esta fórmula são perfeitos, mas que todos os perfeitos pares possuem esta forma.

Bem como na obra dos primeiros pitagóricos e dos neopitagógicos, o estudo de múltiplos, submúltiplos, proproções e números figurados também estava presente nos textos sobre aritmética da Idade Média, já citados aqui. Os números figurados estão presentes na obra de Nicômaco (livro II), fonte de Boécio. Porém, nela, eles são apresentados na parte destinada ao estudo da geometria.

Como é observado na obra de Boécio (1123, b), cada termo a_n da seqüência dos números triangulares é gerada a partir da soma dos n primeiros números naturais, no entanto, Boécio exclui os números figurados da geometria e coloca-os no livro II da Aritmética, não fazendo qualquer relação com a geometria. Cassiodoro também os insere na parte dedicada à aritmética, bem como Isidoro. Deste modo, aquela subordinação da geometria à

aritmética, discutida anteriormente, acaba por se tornar algo como uma formalidade, pois efetivamente a aritmética e a geometria são independentes, uma vez que os números figurados não fazem parte desta última.
Ao lado desta atritmética contida na obra de Boécio, encontramos, na Idade Média, uma tradição que observa os números sob uma perspectiva simbólica. Tal tradição encontra-se principalmente nas obras sobre matemática de Agostinho e de Isidoro.

O misticismo numérico: aritmologia

A aritmologia e a gematria podem ser consideradas como o estudo dos números a partir de um ponto de vista místico. A gematria, que consiste em um sistema criptográfico ao qual se atribuem valores numéricos às letras, teve sua origem na Grécia antiga devido ao fato de as letras e números ter as mesmas representações, por exemplo, α tanto poderia ser a primeira letra do alfabeto como o número um. A aritmologia não teve uma procedência única. Segundo SANTOS (1964, p. 119), trabalhos de aritmologia podem ser encontrados nos Vedas, entre os egípcios, babilônicos e gregos, dentre esses últimos, os pitagóricos foram os primeiros a desenvolver uma alegoria numérica.
A busca por uma explicação racional para o universo foi uma constante entre os filósofos gregos da Antigüidade. A necessidade de se explicar o porquê dos astros possuírem movimentos regulares fez com que os pensadores da escola Itálica postulassem que os objetos celestes eram seres inteligentes e possuíam uma alma, conforme podemos depreender por trechos do livro X das *Leis* de Platão.
A crença na existência da "alma do mundo" somada àquela que pressupunha implicitamente a unicidade da essência dos entes matemáticos e da manifestação dessa essência, além da convicção de que o conhecer era um identificar-se com essa essência unitária (cf. BACCA, 1944), levou os pitagóricos a acreditarem que o estudo dos números possibilitava não apenas um conhecimento racional do universo, mas uma identificação com a essência deste último. Daí a fusão entre o átomo, o ponto, o instante, e a unidade numérica, todos assimilados pela mônada. Neste processo, os números deixaram de ser apenas quantidades e passaram a ser associados a qualidades, como por exemplo, números perfeitos, números amigos, números masculinos, etc. Os pitagóricos criaram convenções de modo a acomodar o universo a esta teoria qualitativa dos números. Deste modo, a aritmética e a aritmologia passaram a conviver nas teorias pitagóricas.
A primeira sistematização aritmológica da exegese bíblica judeu-alexandrina foi realizada por Filon de Alexandria (sec. I) em seu tratado *Sobre os números*, mas a referência à aritmologia e à gematria como reveladoras de sabedoria pode ser encontrada na própria Bíblia, como por exemplo, na seguinte passagem do Apocalipse (Ap. 13,18): "Aqui há sabedoria. Aquele que tem entendimento, calcule o número da besta, pois é o número de um homem. O seu número é seiscentos e sessenta e seis". Dentre os padres cristãos, a aritmologia se fez presente constantemente, porém de uma maneira bastante difusa, na obra de Agostinho, enquanto Isidoro de Sevilha a faz sistematicamente em seu *Livro do número* no qual buscou expor os mistérios dos números, concentrando em uma única obra a aritmologia que estava dispersa na obra de Agostinho. Nesse tratado são estudados todos os números das duas primeiras dezenas, com exceção do dezessete, além dos números trinta, quarenta, quarenta e seis, cinqüenta e sessenta. Nele, Isidoro procurou mostrar a

existência intrínseca dos números tanto no macrocosmo quanto no microcosmo, de modo a ilustrar a passagem do livro da Sabedoria na qual se afirma que "tudo foi criado em medida, número e peso" (*Sab* 11, 21). Para tal, o bispo sevilhano utilizou-se não apenas de exemplos retirados das Sagradas Escrituras, mas também de uma extensa quantidade de exemplos de origem pagã. Isidoro afirmou, por exemplo, que os números se fazem presentes no macrocosmo na unidade do mundo e do Sol, pois "o mundo também é uno. Também o Sol de que vemos a luz claramente é uno" *(Lib. Num*, 2, 6*, ML, 180, b e c)*; nas fases da Lua já que o "número sete completa a forma da Lua, (...) pois um mais dois mais três mais quatro mais cinco mais seis mais sete resulta em vinte e oito" (*Lib. Num.*, 8, 44, ML, 188 b). Além disso, "[sete] são as esferas, os planetas no céu e também as transformações entre os elementos"(*Lib. Num., 8, 45, ML, 188 b).* Segundo o bispo sevilhano, os números também participariam do microcosmo, pois a natureza do ser humano, as fases de desenvolvimento do homem - denominadas desde a medicina da Antigüidade Tardia por "idades" -, e a estrutura anatômica do corpo humano também teriam uma determinação numérica.

A ligação entre o microcosmo e o macrocosmo seria feita por meio dos números, principalmente pela contagem do tempo. Este elo estabelecido pelo tempo entre corpo humano e universo está expresso na seguinte passagem das Etimologias:

> [na medicina] deve-se conhecer a Astronomia por meio da qual se examina o movimento dos astros e a evolução do tempo, porque alguns médicos sustentam que devido a tais variações nosso corpo também sofre alterações. (*Etim.,*IV,13, 4).

Como a aritmologia pagã só se refere aos dez primeiros números, a partir do onze, o único exemplo que encontramos no tratado de Isidoro que não está relacionado a temas cristãos é o do ciclo da Lua (*Lib. Num.,* 19, 87, ML, 196 a). Todos os demais excertos ligam-se a passagens bíblicas. Nesta aritmologia cristã, a unidade ocupa um lugar distintivo, além dos números três, relacionado à Trindade, e sete que também possuem um lugar de destaque nesse tratado. Segundo Isidoro, o sete, formado pelo "três que ilustra o mistério da Trindade e pelo quatro que ilustra as ações virtuosas" (*Lib. Num.,* 8, 35, ML, 186 b), significa o Espírito Santo e é um número sagrado, por isso Deus santificou sua obra no sétimo dia (cf. *Lib. Num.*, 8, 38, ML, 187 a). São citadas, entre outras, as seguintes passagens da Bíblia, nas quais se usa o número sete: no Gênesis (2:1), (4:15), (4:24), (7:3), (7:10), (8:4); nos Salmos (119:164); no Êxodo (25:37); Josué (6:4); Isaías (30:26); sete são as cartas que Paulo escreveu às igrejas, quais sejam, Romanos, Corintios, Gálatas, Efésios, Filipenses, Colossensese e Tessalonissenses; livro do Apocalipse (1:4), (1:16), (15:1).

Para Isidoro, a existência dos números em tudo o que diz respeito tanto à vida material quanto à espiritual é explicada pela perfeição dos mesmos, ou seja, no mais puro espírito pitagórico, o bispo sevilhano tenta mostrar que o número é perfeito e por isso "tudo foi criado em medida, número e peso" (*Sab* 11, 21). Esta visão pitagórica acerca do universo adaptada aos meios cristãos chegou a Isidoro, sem dúvida alguma, por meio de Agostinho que via na contemplação da aritmética um caminho para uma vida perfeita devido ao fato de esta arte ser quase divina:

> (...) Porque gradualmente se vai elevando a uma pureza de costumes e vida perfeita, não só pela fé, mas também pelo guia da razão. Pois aquele que considera

> a potência e a força dos números lhe parecerá grande miséria (...) que sua vida e sua própria alma se deslize por caminhos tortuosos e que dê um estrondo discordante por dominar-lhe as paixões carnais e os vícios. Mas quando a alma se ordena e embelece fazendo-se harmônica e bela, pode contemplar a Deus, fonte de toda a verdade" (De Ordine, II, 19, 50 e 51).

Portanto, o que se busca com a reflexão sobre os números não é apenas a compreensão matemática do universo, mas a purificação da vida para com isso atingir a contemplação de Deus. Por isso, na obra de Isidoro, as aplicações da aritmética à aritmologia estão em primeiro lugar, enquanto as aplicações práticas são em menor número e ficam em um segundo plano e deste modo, a aritmética se faz, na obra de Isidoro, a primeira e mais importante dentre as disciplinas da matemática.

A disciplina das grandezas e das formas: geometria

Na Grécia da Antiguidade, até a descoberta das grandezas incomensuráveis, a relação com o elemento empírico fez com que a geometria estivesse, dentre as disciplinas que compunham a matemática, em um segundo lugar, após a aritmética. O empirismo na geometria não estava apenas relacionado a sua origem, mas também a seu objeto, qual seja, o espaço. Segundo SZABÓ (1977, p. 339-350), enquanto, na filosofia grega, o espaço esteve ligado apenas às sensações, a geometria possuiu o estatuto de um conhecimento empírico, em que a visualização possuía papel preponderante, já que se estudavam as linhas e formas traçadas. Platão (*República*, VI, 510 d) se colocou contra esta concepção de geometria e afirmou (*República*, VII, 527 a) que as expressões usadas pelos geômetras, tais como "construir sobre uma linha", "quadrar", etc., eram errôneas, pois, segundo ele, a geometria trataria de realidades eternas. Porém, o elemento empírico continuou a ser historicamente associado à geometria, principalmente na cultura romana por meio de sua aplicação à arquitetura.

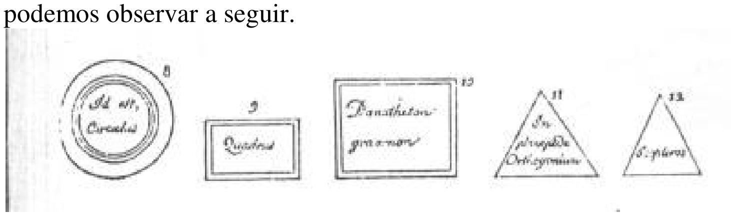
A geometria abordada nos textos medievais segue basicamente estas duas tradições: uma que é resultado de traduções ou de compilações dos estudos gregos sobre geometria "pura", e outro que resulta da geometria romana aplicada à arquitetura e a problemas de ordem prática.

A primeira destas tradições chegou a Idade Média por meio de traduções parciais dos *Elementos* de Euclides. Foram realizadas três traduções dos *Elementos* durante a Alta Idade Média: uma no século III devida a Censorino e que se limitava ao livro I dos *Elementos*; outra no século IV que continha partes dos livros XII e XIII; uma última, atribuída a Boécio que contém trechos dos primeiros cinco livros. Além destas traduções, podemos citar a obra de Capella (séc. IV) que traz algumas referências sobre a geometria euclidiana.

Esta geometria compõe-se de conceitos e definições provindos da geometria euclidiana, da astronomia, da astrologia e da geografia, e neste enleado de definições percebemos a presença constante de grandezas e de formas. Daí, a definição da geometria como a "disciplina das grandezas e das formas", encontrada no período em questão. As compilações realizadas a partir das traduções dos *Elementos* e do texto de Capela e a interpretação simbólica dos entes da geometria acabaram por distorcer alguns conceitos geométricos e as classificações dos mesmos. Podemos citar aqui como exemplo, a classificação de figuras planas encontrada nas *Etimologias*:

> segundo Platão, são em número de cinco. (...) A primeira é o círculo, que é uma figura plana denominada por forma circular, cujo meio é um ponto ao qual todos os demais convergem, denominado geometricamente por centro e pelos latinos como ponto do círculo. A figura quadrilátera é no plano quadrada e se forma com quatro linhas retas. O dianatheton grammon é uma figura plana. Orthogonium é uma figura plana com um ângulo reto isto é, de fato, um triângulo e tem um ângulo reto. Isopleuros é uma figura plana constituída sobre uma base (subter constituta) (Etim., III, 11, 2 e 12, 1).

Tais definições estão acompanhadas pelas seguintes representações que em alguns casos não colaboram para a compreensão dessas definições, e em outros, não correspondem a elas, como podemos observar a seguir.



Na descrição da figura quadrilátera podemos compreender a expressão “no plano quadrada” em dois sentidos, pois podemos traduzir o termo “quadrata” de duas maneiras diferentes. A primeira tradução deste termo seria “quadrado”, e deste modo, a figura quadrilátera seria um quadrado no plano. Pode-se argumentar que não faria sentido dizer-se “quadrado no plano”, já que todo quadrado é uma figura plana, porém, segundo HANI (s/d, p. 33), na simbologia cristã medieval não havia diferenciação entre cubo e quadrado, sendo assim, ao afirmar que o quadrado estava no plano, o intuito de Isidoro poderia ter sido o de especificar a figura à qual se referia, diferenciando o quadrado e o cubo pelo fato do primeiro estar contido no plano. Porém, a representação que dá de tal figura não é a de um quadrado, o que nos faz crer que a segunda possível tradução do termo “quadrata”, qual seja, traçada com esquadro, talvez seja mais pertinente nesta frase, pois a figura quadrilátera seria aquela “quadrada no plano a partir de quatro linhas retas”. Tal definição estaria de acordo com sua representação que possui quatro ângulos retos, sem ser, no entanto, um quadrado, pois as medidas de seus lados são diferentes. Deste modo, a figura quadrilátera estaria sendo definida a partir do aspecto prático de sua construção. O apelo ao modo de construção da figura para defini-la indica que, provavelmente, estes excertos foram retirados de algum texto sobre gromática. Outros dois aspectos que evidenciam tal procedência são apontados por FONTAINE (1959, p. 401). Um deles é o fato dos autores de obras sobre gromática utilizarem, nos textos latinos, termos gregos para expressarem conceitos, como ocorre nesta passagem das *Etimologias*, na qual são utilizadas as palavras gregas dianatheton grammon, orthogonium e isopleuros. A ausência de uma definição para o dianatheton grammon seria o outro aspecto apontado por FONTAINE, pois segundo ele, tal ausência é uma característica comum aos textos técnicos da época.

Outro exemplo que podemos citar do emaranhado de conceitos geométricos presente nas obras medievais é o relativo a grandezas incomensuráveis. Nas Etimologias, Isidoro afirma que “são grandezas racionais aquelas cujas medidas podemos conhecer e irracionais aquelas que não conhecemos as medidas que possuem” (*Etim.,* III, 11, 3). Apesar desta menção a "grandezas irracionais", não encontramos, na obra de Isidoro qualquer alusão à incomensurabilidade, diferentemente de Capella (VI, 718-720) que além de relacionar incomensurabilidade e números irracionais, também utiliza a definição euclidiana de grandezas comensuráveis e de incomensuráveis, qual seja, comensuráveis são aquelas que podem ser medidas por uma mesma unidade de medida e incomensuráveis aquelas que não possuem uma unidade de medida comum (*Elementos*, X, def. 1), e oferece alguns exemplos destas últimas.

Os gregos da Antigüidade representavam as grandezas incomensuráveis por segmentos de retas e diferenciavam as grandezas "enunciáveis" que seriam as aproximações dos números irracionais em questão e as "não enunciáveis" que seriam os próprios números irracionais. Deste modo, Platão (*Rep*., VIII, 546 c) declarava que o número sete é a diagonal enunciável do quadrado de lado cinco, isto é, sete é a medida inteira aproximada de $\sqrt{50}$. Isto significa que apesar de possuírem uma definição rigorosa (para os padrões euclidianos) de grandezas incomensuráveis, de representarem tais grandezas, de realizarem aproximações dos números irracionais, e de utilizarem tais números em situações práticas, como por exemplo, o uso da razão áurea na arquitetura, os gregos da Antigüidade consideravam que os números envolvidos em grandezas incomensuráveis não eram "enunciáveis", e isto explica a definição de "grandezas irracionais" dada por Isidoro.

A observação de tais confusões faz com que muitos historiadores da matemática considerem decadente a geometria medieval, porém, o ramo da geometria que mais se desenvolveu naquela época foi o aplicado, transmitido oralmente sob signo do segredo, na maior parte das vezes, mas que se apresenta em vários textos, como por exemplo, na Geometria de Boécio, que além de trazer uma tradução parcial dos Elementos, ainda contém, entre outras coisas, considerações sobre as diferentes unidades de medida utilizadas na época, uma exposição a partir de exemplos acerca da determinação de áreas, e um problema de aplicação do conhecimento geométrico a partir da contenda entre dois vizinhos sobre a posse de uma determinada extensão de terra. Isidoro, na composição de sua exposição sobre geometria, também utilizou textos técnicos, provavelmente voltados para a agrimensura. Isto explicaria o porquê da extensa explanação sobre medidas lineares e superficiais ter sido inserida, por Isidoro, no livro XV ("Acerca dos edifícios e dos campos"), capítulo 15 intitulado "Sobre as medidas dos campos" e o porquê da definição de ângulo também estar contida no livro XV, no capítulo 8 intitulado "Partes que compõem um edifício" não havendo qualquer menção a ângulo e medidas na parte dedicada à geometria do livro III.

As raízes da geometria prática medieval estão intimamente ligadas à incorporação das associações de construtores aos mosteiros cristãos. No momento em que o sistema feudal se efetivou, as associações de artífices passaram a ser juridicamente inviáveis, pois todos os indivíduos deviam estar em uma relação de vassalagem ou de servidão para com um senhor feudal. Os construtores incorporaram-se aos mosteiros que lhes liberava dessa relação e forneciam algo essencial para sua profissão: a livre passagem entre os reinos, daí a denominação dada, na época, a esses artífices de "pedreiros livres" (Cf. HANI, s/d). Esses pedreiros livres possuíam uma tradição neoplatônica e neopitagórica que remontava aos collegias romanos e que acabou sendo também incorporada pelo cristianismo, o que levou a várias representações medievais de Deus como um arquiteto, com compasso na mão, criando o universo.

Os instrumentos utilizados pelos arquitetos medievais eram, basicamente, o esquadro, o compasso, a vara de medir, o prumo e a escala. Segundo OLIVEIRA (2002), muito dos desenhos arquitetônicos medievais não tinham anotado as escalas utilizadas e isto se deve ao fato de que tanto a planta quanto a elevação eram determinadas por progressões geométricas, que dispensavam anotações no desenho, o que garantia a exclusividade de execução para os que dominavam os segredos da profissão.

A seção áurea, ou seja, o número irracional ϕ ($\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}$) e o $\sqrt{2}$ estavam sempre presentes entre as medidas utilizadas pela arquitetura medieval. A seção áurea teria sido descoberta pelos pitagóricos ao estudarem as razões existentes no pentágono estrelado, enquanto se supõe que o irracional $\sqrt{2}$ teria sido descoberto por meio da incomensurabilidade entre a medida da diagonal e a do lado do quadrado, ou também das relações existentes no pentágono estrelado. Tais medidas eram construídas com os instrumentos geométricos de então. Devido à sua tradição pitagórica, os arquitetos acreditavam que tais números faziam parte da constituição do corpo humano e da composição do mundo, por isso, utilizavam-no na construção dos templos cristãos - principalmente nas catedrais góticas – e pretendiam que tais templos fossem a imagem da criação de Deus, buscando realizar a identificação homem-mundo-templo. Esta crença existiu até o Renascimento, como podemos observar pela interpretação que Leonardo Da Vinci (sec. XV) fez do corpo humano a partir das relações numéricas já apontadas anteriormente pelo arquiteto romano Vitrúvio. A análise da ilustração de Da Vinci, denominada *Homem Vitruviano*, destaca a existência da seção áurea, nas proporções do corpo humano.

A arquitetura medieval utilizou intensamente o quadrado, o triângulo e o círculo, apesar de o octógono e o polígono estrelado de oito pontas terem sido usados na fase final do gótico. Naquela arquitetura, o quadrado e o cubo simbolizavam a fixação do tempo, ou seja, a eternidade, a imutabilidade de Deus e a Terra que estaria imóvel frente à atividade do céu, enquanto o círculo e a esfera simbolizavam a infinidade e perfeição de Deus, o céu e a passagem do tempo. O triângulo estaria ligado à santíssima trindade. Toda esta simbologia está presente em cada detalhe da igreja cristã – tanto quanto permitia a tecnologia da época – não apenas na arquitetura gótica, mas também na pré-românica, como podemos notar pela edificação da igreja de Santa Maria Del Naranco, construída na Espanha por volta de 850.

A arquitetura medieval colocou problemas à geometria, como aqueles de volume e de corte das pedras para construção, que exigiram o desenvolvimento de novos conhecimentos geométricos, porém estes estavam voltados para questões empíricas não havendo sobre eles grandes teorizações. A geometria teórica voltou a se desenvolver na Europa Ocidental a partir do século XII, devido, entre outros, aos livros *Pratica da Geometriae* e *Líber Quadratorum* de Fibonacci (1170-1250), do tratado sobre triângulos de Jordanus Nemorarius (c. 1230) e da edição dos *Elementos* realizada por Campanus de Novara (c. 1260).

A harmonia dos corpos celestes: música

Na Antigüidade, a música ocupou posições diferentes entre as artes liberais, ora a tradição relacionava-a com a gramática, como afirmava Quintiliano, ora com a matemática, como pretendiam os pitagóricos, Platão e Cícero (*De Oratore*, I, 187 e III, 127 apud GILSON, 1995, p. 205). Já na Idade Média, Agostinho, no *De Ordine,* relacionava explicitamente a gramática e a música. A relação entre matemática e música está presente na obra de Boécio (De Arithm, I, 1, ML, 1081 b) que, utilizando Nicômaco, define a música como "o estudo dos números relativos" e dedica os cinco livros de seu tratado *De Musica* ao estudo das relações numéricas existentes na harmonia musical.

Segundo TIBY (in ROLLAND-MANUEL (org), s/d, p. 424), a luta entre estas duas tendências opostas perdurou não apenas na Antigüidade, mas também na Idade Média, não obstante os autores do medievo colocarem a música entre as disciplinas do quadrivium. É o que podemos observar nas obras de Agostinho. Seu *De Musica* é composto por seis livros. Apesar de, no primeiro, ser feito um estudo sobre os números da música, os quatro livros seguintes são dedicados à análise das relações entre a música e os versos, e, no sexto livro, encontramos uma tentativa de se realizar a união do sensível e do inteligível no que se refere ao estudo da música. Um século depois de Agostinho, Boécio contrapõe em seu *De Musica* as teorias pitagóricas (livros I e II) e aquelas de Aristóxeno (livro III). Esta mesma divergência é encontrada na obra de Isidoro, pois se por um lado, Isidoro dá primazia às palavras em seus capítulos sobre música e a define como perícia, por outro, coloca-a dentre as disciplinas do quadrivium, apesar de os números da harmonia musical pitagórica estarem contidos nas *Etimologias* em apenas três passagens.

A Igreja buscava determinar qual deveria ser o tipo de música praticada entre os cristãos. Segundo CORBIN (in ROLLAND-MANUEL (org), s/d, p. 629) entre os séculos IV e VI a Igreja não aceitava a música senão como condição de aperfeiçoamento moral e como parte do culto divino. O modo grego frígio[6] (tom, semitom, tom, tom, tom, semitom, tom) era o que melhor se adequava a essas limitações colocadas à música pela Igreja. Boécio (*De Mus*., I, 1, ML, 1170 b) afirma que Pitágoras, ao examinar o curso das estrelas, compreendeu que elas foram colocadas em movimento pelo som do modo frígio. Tal passagem de Boécio demonstra uma adaptação das teorias pitagórico-platônicas aos ideais cristãos de música, uma vez que na obra do neoplatônico Proclo, a alma do mundo havia sido criada a partir do modo em *mi*, ou seja, modo grego dórico.

Considerações finais

Podemos afirmar que a unidade entre a aritmética, a geometria, a música e a astronomia – não tratada aqui – estaria, na matemática medieval, fundamentada sobre uma crença baseada na interpretação mística pitagórica e cristã da formação do universo.

As disciplinas que compunham a matemática seriam conhecimentos doutrinais, ou seja, apreensíveis apenas por meio do raciocínio, a partir dos quais se alcançaria a contemplação das coisas divinas, mas também saberes importantes devido às suas utilizações práticas, tais como, o uso em situações de negócio, na contagem do tempo, na medição de terras, na construção de templos e na exegese bíblica, isto é, não há separação entre teoria e prática

[6] Para uma análise mais completa sobre estes modos musicais veja-se (BRITO, 2005)

nestas disciplinas, apesar de termos nos utilizado desta dicotomia em nosso texto para fins de análise. "Aritmética" é o termo utilizado tanto para a aplicação dos números no cômputo do tempo ou em situações de ordem financeira, quanto na exegese bíblica e na contemplação da obra de Deus; "geometria" é o vocábulo usado tanto nas situações de medição prática quanto naquelas de contemplação do céu; a música traz em si as características de perícia e de disciplina. A separação antiga entre aritmética e logística, e entre geometria e geodésia, não está mais presente nesta matemática.
Porém, a par desta transformação, uma crença subjacente a esses saberes se manteve, qual seja, a de que Deus criou tudo *"com medida, número e peso"* (Sab., 11:21). Ao ajustar as premissas pitagórico-platônicas sobre a existência de um princípio numérico na constituição do mundo aos saberes cristãos, os autores da época como Cassiodoro e Isidoro acabaram por consolidar e, posteriormente, difundir uma crença que se apresentava de modo fluido na obra de Agostinho e até mesmo na Bíblia. Esta crença persistirá não só durante a Idade Média, mas também na Idade Moderna. Tal convicção, juntamente com as condições político-econômico-sociais dos séculos XV e XVI, reinterpretada à luz dos 'novos' saberes tornados disponíveis aos europeus pelas traduções das obras matemáticas gregas, possibilitou o surgimento da revolução científica operada, entre outros, por Kepler (1571-1630) e Galileu (1564-1642), cujos textos indicam-nos como essa crença estava subjacente a seus trabalhos. Ela só será abalada pela filosofia de Kant (sec. XVIII) e definitivamente contestada e abandonada com o surgimento e aceitação das geometrias não-euclidianas no século XIX (cf. BRITO, 1995).

Referencial bibliográfico

AGOSTINHO. De civita Dei. Edição bilíngue latim/espanhol. Madrid: BAC, 1958.
AGOSTINHO. De Ordine . Edição bilíngue latim/espanhol. Madrid: BAC, 1957.
BÍBLIA DE REFERÊNCIA THOMPSON – 3ª edição - Tradução João Ferreira de Almeida. Flórida: Ed. Vida, 1994. 1750 páginas
BOÉCIO, A. M. S. De Arithmetica. Patrologia Latina. Vol 63. Paris: Ed. Migne, 1882
BOÉCIO, A. M. S. De Geometria. Patrologia Latina. Vol 63. Paris: Ed. Migne, 1882
BOÉCIO, A. M. S. De Musica. Patrologia Latina. Vol 63. Paris: Ed. Migne. 1882
BRITO, A. J. Geometrias não-euclidianas: um estudo histórico-pedagógico. Dissertação (Mestrado em Educação). FE/ UNICAMP. Campinas, 1995.
BRITO, A. J. O quadrivium na obra de Isidoro de Sevilha. Tese (Doutorado em Educação). FE/UNICAMP. Campinas. 1999.
BRITO, A. J. A matemática de Isidoro de Sevilha e a tradição pitagórica. Revista Brasileira de História da Ciência. V. 3 (1). Jan/jun 2005, p. 49 a 57.
CAPELLA, M. The marriage of Philology and Mercury. NY: Columbia University Press, 1977.
CASSIODORO, A. De Artibus ac Disciplinis Liberalium Litterarum. Patrologia Latina. tomo 70. Paris: Ed. Migne, 1865.
FONTAINE, J. Isidore de Seville et la culture classique dans l'Espagne visigotique. Paris, 1959.
GERASA, N. Introduction to arithmetic. The Great Books. Vol IV. Chicago: William Benton Publisher, 1952.

HANI, J. O simbolismo do templo cristão. Lisboa: Ed. 70, s/d.
ISIDORO. Etimologías. Vol. I e II. Edicion bilingüe latim/espanhol. Version Española Jose O Reta y Manuel A. M. Casquero. Introdução general de DIAZ, M. C. D. Madrid: BAC, 1983.
ISIDORO. Liber Numerorum. Patrologia Latina. Tomo 83. Paris: Ed. Migne, 1862.
LAWLOR, R. Sacred geometry. London: Thames and Hudson, 1984.
OLIVEIRA, M. M. Desenho de arquitetura pré-renascentista. Salvador. EDUFBA. 2002
PLATÃO. La Republique. Edição bilíngue francês/grego. Paris: Société D'Édition 'Les Belles Lettres", 1947.
PLATÃO. As leis incluindo Epinomis. Tradução Edson Bini. Bauru: EDIPRO, 1999.
PLATÃO. Timeu e Crítias. SP: Ed. Hemus, 1984.
ROLLAND-MANUEL (org). A música da origem à atualidade. Vol I. Tradução Fernando Lopes Graça. Portugal: Ed. Arcádia Ltda, s/d.
SANTOS, M. F. Tratado de simbólica. S Paulo: Ed. Logos Ltda, 1964.
SCHRADER, D. V. De Arithmetica, Book I, of Boethius. The mathematics teacher. Vol LXI. (6). octuber, 1968. p. 615 a 628.

Arlete A. Jesus Brito
Departamento de Educação - IB
Unesp – campus de Rio Claro
Rio Claro – São Paulo - Brasil

E-mail: arlete@rc.unesp.br