Revista Brasileira de História da Matemática
Especial nº 1 – Festschrift Ubiratan D'Ambrosio – (dezembro/2007)
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

MODALIDADES CONSTRUCTIVAS Y OBJETIVACION DEL CUERPO DE LOS REALES[1]

Luis Carlos Arboleda
Universidad del Valle - Colombia

Para Ubi quien me convenció firmemente, desde los primeros encuentros de una ya larga amistad de la que me enorgullezco, que "História e a filosofia da matemática não se separam e somos assim levados a refletir sobre a natureza do conhecimento matemático".

1. La "Realidad Profunda" de los Objetos Matematicos.

En el capítulo de sus memorias consagrado a reflexionar sobre su "invención" de la Teoría de la Distribuciones, Laurent Schwartz se refiere al fenómeno bien conocido según el cual, una vez formalizadas, las teorías ocultan la actividad matemática compleja que las produjo, y propone la intervención de la historia de las matemáticas para ayudar a los lectores a reconocer las huellas de esta actividad[2].

Schwartz observa que generalmente las personas se representan los procesos constitutivos de las teorías de una manera muy diferente a como ocurrieron. La imagen predominante es que "se progresa de principio a fin mediante razonamientos rigurosos, perfectamente lineales, en un orden bien determinado y único que corresponde a una lógica perfecta. No se reconocen los *zig zags*". Ello es lamentable, dice Schwartz, porque si se considera que en las matemáticas y las ciencias en general no hay derecho a dudas y errores, entonces ellas serán percibidas como demasiado rígidas, menos humanas y más inaccesibles.

Por el contrario, en el desarrollo de una indagación sobre un problema, lo más frecuente es que la respuesta demore en obtenerse. Generalmente después de una primera investigación, viene la fatiga. A veces se continúa pero sin éxito:

---

[1] Articulo elaborado en el marco del proyecto de investigación: "La constitución histórica de los números reales en la perspectiva de la formación de docentes". Colciencias, Universidad del Valle, código 1106-11-17688.

[2] Ver sobre este tema y los que siguen, el capítulo « L'invention des Distributions » EN : Schwartz (1997), pp. 223-266.

> y se guarda el problema en alguna parte de la cabeza para reflexionar sobre ello más tarde. De pronto se encuentra algo, pero tal vez no sea necesariamente interesante y no merezca desarrollarse ni publicarse. Así, uno puede continuar planteándose cuestiones conexas o incluso diferentes, hasta conformar un acervo de interrogantes. A menudo se encuentran soluciones simultáneas a muchos de tales problemas.

Más adelante, Schwartz vuelve a referirse en los siguientes términos a la necesidad de ir más allá de las primeras apreciaciones sobre la naturaleza del trabajo científico, particularmente en la enseñanza:

> El lector que lee un libro bien escrito no reconoce cuáles han sido las alegrías y sufrimientos de su autor. Puede ser instructivo develárselas. No se dispondría de tiempo en el liceo para estudiar las ciencias junto con su historia. La mayor parte del tiempo es necesario enseñar de manera imperativa y dogmática. Pero de tiempo en tiempo se debería hacer no solamente que los alumnos investiguen, sino también que conozcan la historia de las ciencias. Un poco de historia resulta fecundo en la exposición de una teoría nueva. Y no se hace suficiente historia de las matemáticas con los alumnos del liceo, como para mostrarles la extensión de los espacios franqueados por nuestros predecesores hasta llegar al estado actual de perfección. Igualmente es necesario que sepan que si una teoría está bien hecha aunque algunos aspectos suyos permanezcan inciertos, probablemente éstos serán los más interesantes para futuras investigaciones. El propósito de una ciencia no es atragantar con ideas bien hechas y bien acabadas, sino imaginar concepciones nuevas. Y éstas generalmente se engendran al superar obstáculos internos.

Con respecto a la naturaleza de las matemáticas, Schwartz comparte la convicción de muchos matemáticos de que sus objetos poseen una "realidad profunda". Ello se manifiesta ante todo en que los conocimientos matemáticos, una vez adquiridos, se organizan dentro de un campo de conciencia (o configuración del cerebro humano) dotado con una "estructura rígida". Además de responder a una lógica interna, el campo de conocimientos que conforma el patrimonio intelectual del matemático está regido por un ideal de belleza; de ahí que Schwartz hable de tal campo en términos de "mi palacio o castillo interior".

No es posible hacer matemáticas, es decir, recorrer cierto camino dentro del campo (como consecuencia de la acción de una red de conexiones neuronales), sino se respeta la estructura ordenada. Cualquier intento de transgredir este orden conservador es visto por la conciencia como una agresión del exterior. Si se plantea por la necesidad de incorporar un conocimiento nuevo, tomará tiempo a la conciencia asimilar tal necesidad, pues ello implica "reordenar toda una serie de fenómenos e imbricar lo que acabo de aprender en mis propios esquemas. Mi castillo estará entonces más perfeccionado que antes".

Los objetos matemáticos poseen una "realidad profunda" que se impone a nuestro entendimiento. Descubrimos los enteros, los primos y su ley de distribución, los racionales, los números e y π, la recta, etc. Pero las operaciones de "descubrimiento" e "invención" se interrelacionan en la constitución de conceptos o teorías. Un objeto matemático que se manifiesta en un primer momento como resultado de una invención o hallazgo de algo nuevo –algo que no existía antes y sobre lo cual tenemos gran libertad de escogencia-, pasa luego a convertirse en descubrimiento –es decir, en hallazgo de algo externo a nosotros frente a lo cual disponemos de mínimas posibilidades de escogencia.

Se puede considerar a los complejos como una invención desde el punto de vista de su representación $x+iy$. Pero en cuanto demostramos que el anillo de los polinomios reales módulo (x^2+1) es un cuerpo que denotamos por $\mathbb{C}$, entonces se nos impone $\mathbb{C}$ con las leyes de su estructura. Las teorías de Weierstrass y Cauchy sobre las funciones holomorfas, el teorema de residuos y el teorema de Picard nos permiten descubrir la realidad profunda de $\mathbb{C}$ y comunicarla a los matemáticos del mundo (incluso a extraterrestres inteligentes como sugería Freudhental) mediante el uso de otras invenciones tecnológicas.

2. Los "Pensamientos Ciegos" en la designación de Objeto

El caso de los complejos es efectivamente un ejemplo elemental para introducir la distinción de fondo a la que parece estar apuntando Schwartz, entre designación escritural y modalidades admisibles de existencia de objeto. Se sabe que los algebristas italianos del siglo XVI utilizaron números imaginarios para expresar cantidades reales aún sin tener claridad del estatuto de objeto de esos números imaginarios que aparecían corrientemente en sus cálculos de raíces de ecuaciones o de soluciones de sistemas de ecuaciones simultáneas.

Al resolver la cúbica $x^3=3px+2q$ por la fórmula de Cardano, Bombelli encontró, en términos generales, que en la expresión $x=\sqrt[3]{q+\sqrt{q^2-p^3}}+\sqrt[3]{q-\sqrt{q^2-p^3}}$ la representación de la "cantidad real" x involucra cantidades imaginarias cuando $p^3>q^2$. Leibniz, por su parte, enfrentó una situación parecida en su estudio de las raíces de sistemas de ecuaciones de segundo grado del tipo $x^2+y^2=b$, y $x^2y^2=c$, las cuales se obtenían de la expresión $\sqrt{\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}$.

Leibniz sabía bien que si en la identidad:

$$\sqrt{b+2c}=\sqrt{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b}{2}-c^2}}+\sqrt{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b}{2}-c^2}},$$

se hace $c>\frac{b}{2}$, la "cantidad real" $\sqrt{b+c}$ se expresa en términos de esas

> cantidades llamadas imaginarias en el análisis común, pero que por más que las llamemos imaginarias no dejan de ser útiles, e incluso necesarias para expresar analíticamente magnitudes reales.[3]

En efecto, si en la identidad anterior se hace $b=2$ y $c=2$, se obtiene:

$$\sqrt{6}=\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}.$$

[3] Carta de Leibniz a Varignon de 1702. EN: Leibniz (1983), p. 81.

En la carta antes citada, Leibniz cuenta a Varignon que cuando le comunicó esta identidad a Huyggens, éste la consideró tan admirable que le respondió: “ahí hay algo oculto que nos resulta incomprensible[4]. Lo que era admirable para Huygens era aquello que desbordaba los cánones de la intuición; es decir, lo que resultaba inaceptable según el criterio de certeza que se deriva de la aplicación de las reglas cartesianas del cálculo ordinario con cantidades “reales”. Mientras que para Huygens la única actitud posible a este respecto era esperar a que se nos revelara ese algo cuya existencia no está garantizada por su designación escritural, en sí misma enigmática, para Leibniz era legítimo e incluso necesario operar con tales signos aparentemente sin objeto, de la misma forma como procedieron en su empleo los algebristas italianos.

La teoría leibniziana de los “pensamientos ciegos” es, de acuerdo con la afortunada fórmula de Gardies, una especie de prótesis filosófica que permite manejar una dificultad de naturaleza estrictamente matemática, de la única manera en que podía hacerlo el algebrista dadas las condiciones de su momento histórico[5]. No será difícil reconocer la libertad del matemático para inventar signos y operar con ellos combinando números reales e imaginarios, en los procedimientos operatorios empleados sin ningún prejuicio por Euler en álgebra y cálculo infinitesimal, o en los trabajos de Argand, Gauss y Cauchy sobre la representación geométrica de las entidades $x+iy$. Esta libertad se limita a medida que los matemáticos, se habitúan a tratar las entidades $x+iy$ como pares ordenados de números reales (x, y), y se reconocen en la tradición de Hamilton de formalizar las operaciones de adición y multiplicación entre los elementos del nuevo dominio, en términos de propiedades estrictamente lógicas de la estructura de un cuerpo algebraico $\mathbb{C}$.

Es en el marco de una “estructura organizada” de este tipo -el “castillo interior” de Schwartz-, en donde el matemático encontrará, en particular, el arsenal de técnicas y procedimientos objetivados que le permitirán desplegar su habilidad e ingenio para dar cuenta de la “realidad profunda” del objeto. A partir de cierto momento su familiaridad con las relaciones especializadas de la estructura lo llevará a comprender que al identificar un real x con el número complejo $(x,0)$, el cuerpo de los reales $\mathbb{R}$ se puede considerar como subcuerpo del cuerpo de los complejos $\mathbb{C}$.

Más adelante, nuestro matemático reconocerá que, a diferencia de $\mathbb{R}$, en $\mathbb{C}$ se verifica el teorema fundamental del álgebra (el hecho de que todo polinomio de grado n con coeficientes complejos admita n raíces), con lo cual aprenderá a distinguir a $\mathbb{C}$ de $\mathbb{R}$ ante todo por la propiedad de la estructura de ser algebraicamente cerrada. En fin, comprenderá que la estructura de $\mathbb{C}$ posee, por así decirlo, una objetividad de nivel lógico superior con respecto a la estructura de $\mathbb{R}$.

Al llegar a esta altura de la indagación sobre $\mathbb{C}$ en la vía propuesta por Schwartz, el historiador de las matemáticas observa que ha desaparecido la necesidad de apelar a la salida filosófica leibniziana de los “pensamientos ciegos”, pues la explicación de las

[4] Leibniz (1983), p. 51.
[5] Gardies (2004), p. 79

relaciones íntimas entre los reales y los complejos se hace ya en términos estrictamente matemáticos.

Con ello se ha esfumado también el prejuicio intuicionista sobre la existencia de objeto al estilo de Huygens, ya que una vez se dispone de una explicación sobre la representación de los reales en términos de leyes de la estructura de los complejos, nada sobre la naturaleza de estos números permanecerá oculto a nuestra comprensión. Independientemente de las modalidades empleadas por el matemático para representarse y estudiar este objeto, $\mathbb{C}$ se nos impone por las leyes de su estructura, como dice Schwartz en sus memorias. O en palabras de Hermite en carta a Stieltjes[6] y que el propio Schwartz hace suyas[7]:

> Creo que los números y las funciones del análisis no son el producto arbitrario de nuestro entendimiento; pienso que existen por fuera de nosotros con el mismo carácter de necesidad que las cosas de la realidad objetiva, y los reencontramos o los descubrimos, y los estudiamos, como los físicos y los zoólogos.

Sin embargo, esta opinión no deja de tener reparos como lo muestra Gardies quien, no obstante, se sirve de la misma cita como *leitmotiv* en la conclusión de su estudio sobre las modalidades de existencia de los objetos matemáticos[8]. En resumen, Gardies está de acuerdo con Hermite en que los objetos de la matemática (en concreto los números y las funciones del análisis) no son un producto arbitrario de nuestro entendimiento y que existen independientemente de nosotros e independientemente de sus modos de representación.

Pero su existencia dista mucho de ser comparable a la existencia de los objetos de los físicos, los zoólogos, los botánicos o los geógrafos. Estos últimos pertenecen al primer orden de existencia, en el sentido de que sus propiedades constitutivas se expresan en predicados de sustancias primeras. Por su parte, la existencia objetiva de los números y las funciones no podría ni siquiera equipararse a la existencia de los objetos de la geometría euclideana, pues sus propiedades constitutivas se expresan en términos de predicados de predicados.

Desde este punto de vista, hay entonces tantos modos de existencia como modos de cuantificación de existencia. Conviene examinar con cierto detalle estas ideas de objetividad que parecen concordar con las propias percepciones del matemático.

3. Construcción y Predicación Lógica de Existencia

Según el enfoque ontológico logicista de Gardies, la existencia de objeto se reduce en última instancia a una existencia lógica. Tales o cuales objetos, por ejemplo, de la geometría euclideana, existen en tanto el geómetra griego argumenta sobre ellos mediante predicados. Los objetos son, pues, aquello de lo que habla el geómetra griego en el

---

[6] Baillaud et Bourget (1905). En este mismo sentido se puede citar la carta 166 sin fecha: "Confieso que no admito ninguna solución de continuidad, ninguna ruptura, entre las matemáticas y la física, y que los números enteros me parece que existen por fuera de nosotros y que se imponen con la misma necesidad y la misma fatalidad que el sodio, el potasio, etc." Op. cit., vol. 1, pp. 331-332. Ver también las interesantes cartas que sobre esta cuestión dirige Hermite a Mittag-Leffler el 24 de diciembre de 1880 y el 28 de noviembre de 1882 EN: Hermite, Ch. (1984), 49-285.

[7] Schwartz (1997), p. 266.

[8] Gardies (2004), p. 121 et p. 137-138.

discurso de los *Elementos*. Obviamente Gardies reconoce que tales objetos tienen referentes en el mundo de la experiencia inmediata, pero su interés por la existencia del objeto comienza a partir del momento de su inscripción en el discurso. Gardies prescinde pues, de una teoría que explique este proceso de inscripción, como podría ser, por ejemplo, la naturaleza de los actos de razonamiento constitutivos del objeto, a partir la explicación de determinado fenómeno del mundo o de la solución de determinado problema.

La constitución comienza con el acto primigenio en virtud del cual, obrando de acuerdo con las leyes de la gramática, se le asigna nombre propio a los objetos mundanos y se enuncian proposiciones que designan relaciones o propiedades entre ellos. Tales enunciados se refieren obviamente a hechos o estados de cosas en los cuales están implicados los objetos. Es decir, nombres propios y proposiciones se enmarcan dentro de límites de la experiencia: en el caso paradigmático para Gardies de los *Elementos*, esta experiencia corresponde a actos del geómetra griego de predicación en lógica de primer orden.

Pero lo que en definitiva importa a Gardies es que cualesquiera hayan sido los efectos del dominio de la experiencia, el geómetra griego fue capaz de cuantificar las proposiciones que llegó a enunciar. Es decir, el geómetra griego pudo reconocer gramaticalmente que determinados objetos poseían ciertas propiedades (designación por comprensión), o que tales objetos pertenecían a ciertos conjuntos (designación por extensión). Así, por ejemplo, las proposiciones del Libro I definen, mediante predicados de individuos, una buena parte de los objetos que se introducen en los libros geométricos, es decir, del I al VI para una y dos dimensiones, y del XI al XIII para la tercera.

Por ejemplo, dice Gardies, cuando se le asigna a un objeto la propiedad de "ser segmento", no hay ninguna ambigüedad en la utilización del verbo ser. Un segmento no es otra cosa que un segmento para toda la clase de segmentos. Tales proposiciones (predicados de individuo) nos dicen qué son los puntos, qué son las líneas (rectas o no), qué son las superficies (planas o no), qué son los ángulos (planos o no), rectos o no, obtusos, agudos; qué son los círculos, qué son las figuras rectilíneas como los triángulos (escálenos, isósceles, equiláteros, rectángulos, obtusángulos, acutángulos), los cuadriláteros (cuadrados, oblongos, rombos, trapecios), etc. Se dice que estos objetos geométricos tienen una existencia del primer orden pues son predicados de sustancias primeras.

En cuanto al objeto número entero positivo, Gardies muestra que el autor euclidiano lo define en el libro VII directamente como individuo, es decir con una modalidad de existencia diferente a los predicados de individuos de los objetos geométricos. Se trataría de escapar por esta vía a las dificultades a las cuales esta última forma de predicación conduce a Platón en *Hipias mayor*. Si se afirma que "Hipias es uno" o que "Sócrates es uno", se llega al absurdo de que Hipias y Sócrates no pueden ser nada más que uno. Si se afirma que "Hipias y Sócrates son dos", hay que admitir previamente que "Hipias es dos" y "Sócrates es dos".

La definición del número directamente como individuo, no impide que en el libro VII se "formalice" un discurso aritmético sobre este objeto a partir de los términos indefinidos de unidad y adición. Formalización *sui generis*, ya que el autor euclidiano no estaba entonces en condiciones de definir los naturales como se hace hoy en día en la aritmética, es decir, sea en términos de comprensión como predicados de predicados, o como conjuntos de conjuntos en términos de extensión.

Gardies propone considerar la primera de estas modalidades.[9] Designemos por P la propiedad que designa el número 1, y denotémosla por $1(P)$. Esta propiedad significa dos cosas: que existe al menos un objeto x tal que Px, y que no existe otro objeto y tal que Py. Lo cual puede formalizarse de la siguiente manera:

$$1(P) := \exists\left[Px \wedge \forall y(Py \Rightarrow x \text{ es idéntico a } y)\right].$$

Nuestra comprensión de la propiedad del uno está mediada por la comprensión del significado de lo que es la identidad:

$$a \text{ es idéntico a } b := \forall Q\left(Qa \Rightarrow Qb\right).$$

Así, pues, la definición del número 1 y de los enteros subsiguientes, comporta un vocabulario estrictamente lógico de conjunción, implicación y cuantificador universal y, por ello mismo, supera los límites de la lógica de primer orden. La existencia objetiva del número natural se ubica en un segundo orden lógico; por consiguiente consiste en una modalidad de existencia distinta a los objetos de la geometría griega que se ubican en el primer orden lógico.

Con lo cual se comprueba la razón de fondo que conduce a Gardies (y probablemente a todo matemático moderno que se represente en Schwartz) a compartir la opinión de Hermite antes señalada, de que la existencia de los números enteros positivos (*a fortiori* de la sucesión de los otros sistemas numéricos y de las funciones), reposa estrictamente en su representación lógica, y que en este sentido tal existencia es independiente de nuestras propias representaciones de tales objetos.

Pero también se constata la diferencia de la posición de Gardies con respecto a la pretensión de matemáticos como Hermite (incluido Schwartz) de no distinguir el modo de existencia de números y funciones, de los modos de existencia de objetos de otros campos de estudio, incluidos los objetos euclidianos, con un grado de mayor "proximidad" con la realidad natural.

4. Del buen uso de la Metáfora "Construccion de Objeto"

Restaría por aclarar el sentido que tiene una operación constructiva de objeto matemático para un enfoque ontológico logicista como el de Gardies. La construcción sería el paso de un nivel lógico de existencia objetiva a otro. En el caso del número natural, su construcción se reduce a disponer de la posibilidad de enunciar predicados de predicados en el segundo nivel de orden lógico. Esta operación se realiza mediante una relación de equivalencia, la equipotencia entre conjuntos o predicados de sustancias primeras del primer orden.

De ahí en adelante, los números enteros relativos, los racionales, los reales y los complejos se suceden lógicamente unos después de otros, y siempre su existencia se

[9] Gardies, « Le nombre entier entre syntaxe et sémantique ».

construirá sobre la base de modalidades previas de existencia, mediante relaciones de equivalencia o abstracción de relaciones de estructura. Por ejemplo, $\mathbb{R}$ se construye a partir de $\mathbb{Q}$ mediante una relación de equivalencia que permite definir a los reales como representantes de clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy de racionales.

En determinadas condiciones históricas y psicológicas, la construcción de las entidades de un orden superior no apela a la operación lógica que consiste en establecer una relación de equivalencia sobre un dominio de objetos de un nivel inferior. La definición de un número real por medio de la cortadura de Dedekind es de este tipo, pues nos podemos representar directamente el número real como un conjunto de racionales no acotado en uno de sus extremos. Esta operación directa puede darse también a partir de la verificación lógica de propiedades de la estructura más adecuada a determinado dominio de objetos.

Desde este punto de vista, $\mathbb{C}$ se caracteriza por estar dotado de una estructura algebraica cerrada con respecto a $\mathbb{R}$, siendo $\mathbb{R}$ un subcuerpo de $\mathbb{C}$. Por otra parte, comparada con la estructura de cuerpo ordenado de $\mathbb{Q}$, la de $\mathbb{R}$, en tanto cuerpo ordenado, cumple adicionalmente las propiedades de ser arquimediano y completo; por otra parte, $\mathbb{Q}$ es un subcuerpo de $\mathbb{R}$.

Ocurre, dice Gardies, como si a veces el sentido de abstracción del matemático le permitiera reconocer más directamente entidades o propiedades abstractas (estructuras) con las cuales está más familiarizado, que los dominios de objetos que satisfacen las propiedades comunes a tales entidades.[10] Sea la completitud de $\mathbb{R}$ o la clausuratividad algebraica de $\mathbb{C}$, la percepción que se tiene de estos procesos de objetivación estructural es que ellos reposan en el ingenio del autor que supo reunir en un conjunto inextensible las propiedades operatorias que le permitieron fundamentar sus razonamientos.

La intervención del sujeto es menos evidente en operaciones de abstracción mediante relaciones de equivalencia, ya que la realidad del nuevo objeto aparece estrictamente como consecuencia lógica de operaciones establecidas sobre objetos de un nivel lógico inferior. Una operación de este tipo es la que permite definir los reales como clases de equivalencia de racionales. Pero dentro de esta modalidad de construcción lógica, hay casos en que aquello que permite definir el nuevo concepto (*definiens)* no es de nivel inferior al concepto definido (*definiendum*). Gardies se refiere en particular a la manera en que Dedekind, con base en las ideas de Bolzano, formula la primera definición de conjunto infinito en la historia de las matemáticas[11]:

Se dice que un conjunto S es "infinito" si existe una aplicación biyectiva de un subconjunto propio de S en S, o si S es "equipotente" a una de sus partes propias; en el caso contrario, S es "finito".[12]

En esta proposición tenemos: a) un *definiendum* (aquello que va a ser definido): el conjunto infinito S, y b) un *definiens* (aquello que permitirá definir al *definiendum*): la biyección de S con una de sus partes propias. Esta biyección es una relación de

[10] Ver Gardies (2004), p. 134-137.

[11] El texto original de Dedekind de 1888 se puede consultar en la edición comentada y anotada en español: Ferreirós (1998).

[12] Ver esta definición y el análisis epistemológico del correspondiente aparte sobre finito e infinito de la obra de Dedekind, en Dugac (2003).

equivalencia, pero no opera en un nivel lógico inferior sino en el mismo nivel lógico del objeto que se va a definir.

Las consideraciones anteriores permiten constatar que los procesos constitutivos de objetos matemáticos comportan distintas modalidades, desde el punto de vista de la naturaleza y función de las operaciones lógicas, y del papel que se le reconozca a la intervención de las percepciones humanas. Sobre esta base se erige entonces la diversidad de modos de existencia. El desconocimiento de esta diversidad de modalidades de existencia induce a menudo a abusar de la metáfora de la *construcción.*

El uso de este término con la pretensión filosófica de reducir a la unicidad la infinidad numerable de modos de existencia posibles, moviliza todos los riesgos de una metáfora: el beneficio de la simplificación que ella comporta es tanto más abusivo, en cuanto más confianza nos produce. Gardies propone "aceptar el término construcción sólo si se limita su uso y alcance a subrayar que los objetos cuya existencia se dice que ha sido construida, vienen lógicamente después, o, si se prefiere, que presuponen, si no otras existencias, al menos la posibilidad de modos previos de existencia".[13]

5. El Enfoque Estructural y la Construcción de Objetos

El pensamiento de Dedekind sobre la manera como se realiza la extensión gradual de los niveles de existencia de los sistemas numéricos a partir del dominio $\mathbb{N}$ de los naturales, es una referencia histórica obligada de aquel constructivismo que le parece admisible a Gardies. En el prólogo a la primera edición de "¿Qué son y para qué sirven los números?", Dedekind afirma que cuando estamos ya en disposición de los números naturales, las sucesivas extensiones del cero, de los números negativos, quebrados, irracionales y complejos, se realizan reduciéndolas siempre a las nociones previas y sin que se inmiscuyan ideas extrañas sobre el número como medida de magnitud. Incluso llega a vislumbrar que "todo teorema del álgebra y del análisis superior, por alejado que esté, puede expresarse como un teorema sobre números naturales"[14].

Pero, por otra parte, Dedekind es igualmente un referente del uso indebido de la metáfora unitaria de la construcción, la cual se fundamenta en su caso en cierta concepción filosófica sobre el poder mental creador del matemático. En "Continuidad y números irracionales", es llamativo que al definir los irracionales en el parágrafo 4, ubique el acto intelectual creador al mismo nivel lógico de la operación de cortadura[15]:

> Ahora, cada vez que encontramos una cortadura $(A_1 \mid A_2)$ que no es producida por ningún número racional, *creamos* un nuevo número irracional α que consideramos completamente definido mediante esa cortadura $(A_1 \mid A_2)$; diremos que el número α corresponde a esa cortadura, o que produce esa cortadura.

[13] Gardies (2004), p.137-138.
[14] Ferreiros (1998), p. 99.
[15] Ferreirós (1998), p. 87. Ferreirós explica la concepción filosófica de Dedekind sobre los números como un "intelectualismo no constructivista" en Ferreirós (1999); p.134

En la carta a Weber del 24 de enero de 1888, después de explicar que α es algo *nuevo* que el espíritu *crea*, reafirma su convicción de que [16]:

> Somos de linaje divino y poseemos sin duda alguna capacidad creativa, no sólo en asuntos materiales (ferrocarriles, telégrafos) sino muy especialmente en asuntos espirituales.

Al margen de esta retórica sobre los números como creación libre del entendimiento, lo importante es que Dedekind concibe la extensión gradual de los sistemas numéricos como una introducción de objetos nuevos mediante una cascada de sucesivas abstracciones basadas en niveles previos de existencia y, cuestión más importante aún, reduciendo siempre tales existencias a predicaciones sobre los naturales.

Hay que destacar igualmente que el pensamiento de Dedekind es subsidiario de un cierto enfoque estructural en virtud del cual los objetos matemáticos son entidades de naturaleza cualquiera cuya existencia está determinada por determinadas relaciones aritméticas. Ello puede constatarse fácilmente en su definición de los naturales en el parágrafo 6 de "Qué son y para qué sirven los números"[17]:

> Si en la consideración de un sistema simplemente infinito N ordenado por una representación ϕ se prescinde totalmente de la peculiar naturaleza de los elementos, únicamente se retiene su diferenciabilidad y sólo se consideran las relaciones mutuas en que los pone la representación ordenadora ϕ, se llama a estos elementos *números naturales* o *números ordinales* o también *números* a secas, y al elemento base 1 se le llama *número base* de la *serie numérica* N.

En la parte final de la definición, Dedekind enfatiza el papel de las relaciones aritméticas que se establecen en el dominio N de estos objetos y que caracterizan su estructura:

> Las relaciones o leyes que se derivan de las condiciones (previamente definidas)..., y que por tanto son siempre las mismas en todos los sistemas ordenados simplemente infinitos, sean cuales sean los nombres que casualmente correspondan a cada uno de los elementos..., constituyen el objeto inmediato de la *ciencia de los números o aritmética*.

Anotemos que Shapiro[18] cree encontrar en la cita anterior argumentos para defender una interpretación de Dedekind como precursor, en cierta medida, de un estructuralismo *ante rem*. Esencialmente Dedekind identificó el patrón común a la colección infinita de los números naturales, en el sentido de reconocer una relación de sucesor, un primer elemento y la verificación del principio de inducción.

Otro aspecto fundamental de esta filosofía de las matemáticas es que la existencia de los objetos es relativa a la estructura. Los universales existen previa (e incluso independientemente) de las entidades en que se instancian. La estructura de números naturales es previa al número 2. 2 no es cosa distinta al lugar que le asigna la "función ordenadora" (relación de sucesor) en la estructura de los naturales. La "esencia" de los naturales son las relaciones que se establecen entre ellos.

[16] Ferreirós (1998), p. 174.
[17] Ferreirós (1998), p. 118
[18] Ver Shapiro (1997); pp. 170-176.

Los objetos no tienen una existencia ontológica independiente, pero en todo caso poseen una identidad estructural. Esta identidad es independiente de la modalidad de existencia suya con respecto a cualquier sistema que ejemplifique la estructura. Por ejemplo, la realidad estructural de 2 es invariante con respecto a su representación {{ø}} en el modelo Zermelo de N y su representación {ø, {ø}} en el modelo von Neumann de N. De ahí que un estructuralista *ante rem* asuma con gusto como divisa propia la siguiente posición de Poincaré[19]:

> "Los matemáticos no estudian objetos sino relaciones entre objetos; en consecuencia les es indiferente reemplazar unos objetos por otros con tal que las relaciones no cambien. La materia no les importa, lo único que les interesa es la forma".

En el vocabulario del estructuralista *ante rem* los objetos de naturaleza cualquiera entre los cuales se establecen relaciones invariantes, comparten el mismo universal o satisfacen la misma propiedad o participan de la misma forma.

Una relación de equivalencia que se establece sobre un dominio previo, permite obtener un objeto o entidad nueva en un nivel de existencia superior. Este objeto es la forma de la cual participan objetos del dominio anterior que pertenecen a la misma clase de equivalencia, y comúnmente se lo designa como representante de la clase. Los reales son representantes de clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy de racionales. La unicidad de este representante está garantizada por una cortadura $(A_1 \mid A_2)$, y por la existencia de una sucesión convergente de racionales que corresponden a $(A_1 \mid A_2)$. Históricamente hablando, lo anterior se verifica por la equivalencia entre las construcciones de los reales de Cantor y de Dedekind.

6. Objetivación de Procedimientos Operatorios en la Contruccion de R

La extensión del nivel de existencia del cuerpo ordenado $\mathbb{Q}$ al nivel superior de existencia del cuerpo $\mathbb{R}$, ordenado arquimediano y completo, puede entenderse como construcción de la nueva entidad por medio de las propiedades de la estructura del dominio anterior. Desanti ha llamado la atención sobre la necesidad de clarificar la naturaleza de esta construcción[20].

En primer lugar, se verifica la invarianza del principio de identidad en la extensión para garantizar la equivalencia de las operaciones entre sucesiones y entre reales. Sabemos que[21] dos sucesiones de Cauchy $\{s_n\}$ y $\{v_n\}$ son *equivalentes*, si $\lim_{x\to\infty}(s_n - v_n) = 0$, es decir, si

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \geq 1 \;\; \forall n > N \quad |s_n - v_n| < \varepsilon.$$

---

[19] Poincaré (1902); p.32.

[20] Las ideas que siguen han sido elaboradas con base en el capítulo: "Le concept de nombre réel" en: Desanti (1968); p. 37-51.

[21] En lo que sigue hemos tenido como referencia la explicación formal con enfoque histórico de la extensión, que se encuentra en: Hainer, and Wanner (1995).

Esta propiedad se designa por $\{s_n\}-\{v_n\}$, y se puede demostrar que define una relación de equivalencia sobre el conjunto de las sucesiones de Cauchy de racionales. Es decir,

$$\{s_n\}\sim\{s_n\} \text{ (reflexiva)}$$
$$\{s_n\}\sim\{v_n\} \;\Rightarrow\; \{v_n\}\sim\{s_n\} \text{ (simétrica)}$$
$$\{s_n\}\sim\{v_n\},\ \{v_n\}\sim\{w_n\}\Rightarrow\ \{s_n\}\sim\{w_n\} \text{ (transitiva)}.$$

Es posible establecer una partición del conjunto de sucesiones de Cauchy de racionales en *clases de equivalencia,*

$$\overline{\{s_n\}}=\left\{\{v_n\} \mid \{v_n\} \text{ es una sucesión de Cauchy de racionales y } \{v_n\}\sim\{s_n\}\right\}.$$

Los elementos de las clases de equivalencia se llaman *representantes.*

Definimos entonces a los *números reales* como representantes de clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy de racionales. Es decir,

$$\mathbb{R}=\left\{\overline{\{s_n\}} \,\middle|\, \{s_n\} \text{ es una sucesión de Cauchy de racionales y } \{v_n\}\sim\{s_n\}\right\}.$$

El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales puede interpretarse como subconjunto de $\mathbb{R}$ en el siguiente sentido: si *r* es un elemento de $\mathbb{Q}$ ($r \in \mathbb{Q}$), la sucesión constante $\{r,r,r,\dots\}$ es una sucesión de Cauchy de racionales. El número racional *r* se identifica entonces con el número real $\{r,r,r,\dots\}$.

En segundo lugar, se requiere verificar que es posible definir las operaciones de la estructura de cuerpo de $\mathbb{R}$ a partir de las correspondientes operaciones del sistema de sucesiones convergentes de racionales. Aquí es pertinente tener en cuenta la importante observación de Desanti sobre el hecho de que en la extensión se piensa a $\mathbb{Q}$ como un "objeto ideal". Esto significa que en cierto momento de la construcción, la representación familiar de la estructura "precedente" de $\mathbb{Q}$ (por ejemplo, como sistema de parejas ordenadas (a,b) de enteros), es reemplazada por la presencia de $\mathbb{Q}$ como una entidad dentro del sistema de sucesiones convergentes. Como idealidad matemática, $\mathbb{Q}$ participa de la realidad de $\mathbb{R}$: cumple algunas de las leyes de la estructura de $\mathbb{R}$. De hecho $\mathbb{Q}$ es un subcuerpo ordenado de $\mathbb{R}$.

Entonces, para poder trabajar en el dominio operatorio de $\mathbb{R}$ se requiere definir las operaciones usuales a partir del sistema de sucesiones convergentes. Sean $s=\overline{\{s_n\}}$ y $v=\overline{\{v_n\}}$ dos números reales. Definimos su suma (diferencia), producto (cociente) por

$$s+v:=\overline{\{s_n+v_n\}},\ \ s\cdot v=\overline{\{s_n\cdot v_n\}}.$$

En tercer lugar, se requiere interpretar la relación de orden en ℝ en función del orden de ℚ. Sean $s=\overline{\{s_n\}}$ y $v=\overline{\{v_n\}}$ dos números reales. Definimos:

$$s<v \ :\Leftrightarrow\ \exists\varepsilon'>0\ \exists M\geq 1\ \forall m\geq M\quad s_m\leq v_m-\varepsilon',$$
$$s\leq v \ :\Leftrightarrow\ s<v \ \text{ o } \ s=v.$$

Se puede demostrar que el orden $\leq$ es total; es decir, que para todo par de reales *s* y *v* tales que $s\neq v$ tenemos s < *v* o *v* < *s*. Con base en lo anterior y mediante la definición usual del valor absoluto de un número *s*, obtenemos la siguiente definición del valor absoluto de un real:

$$|s| = \overline{\{|s_n|\}} \quad \text{para} \quad s = \overline{\{s_n\}}.$$

Para acabar de clarificar la naturaleza de la construcción que permite dar cuenta de la realidad del nuevo dominio ℝ por sucesivas y graduales "tematizaciones" a partir de las condiciones que posibilita la estructura del dominio anterior ℚ, falta aún evidenciar una modalidad plausible de la operación que permite "completar" a ℚ en ℝ. Desanti recuerda el procedimiento de la construcción histórica de los reales de Cantor. Sea R^* el sistema que completa a ℚ. R^* está conformado por todas las sucesiones de Cauchy extraídas de ℚ. Cantor construye el sistema R^* con el fin de identificar las condiciones para que las sucesiones de Cauchy converjan a un límite único en R^*. Un aspecto significativo en este proceso es que "los objetos que pertenecen al sistema R^*, tales que toda sucesión de Cauchy converge a un límite único en R^*, se pueden componer entre sí y con los objetos que pertenecen a ℚ de acuerdo con las mismas leyes"[22].

Conviene pues, examinar la teoría formalizada del análisis real para descubrir en la prueba de un teorema clásico de completitud la manera en que tales procedimientos históricos han quedado objetivados. El criterio para examinar la cuestión es tener en cuenta un principio que Michael Detlefsen ha denominado "ideal invariantista" [23]. Correspondería al ideal griego de profundidad genética de la prueba que consiste en buscar las condiciones de la objetividad en las propiedades de los objetos (geométricos) mismos, por oposición a las propiedades que estarían en la mente del geómetra.

Con este criterio, los aspectos esenciales de la construcción histórica de la *completitud*, al menos en la modalidad empleada por Cantor, estarían objetivados en los procedimientos y técnicas empleados en la demostración de un teorema fundamental para la constitución del concepto teórico, como el siguiente [24]:

Una sucesión $\{s_n\}$ de números reales es convergente (con un número real como límite) si y solo si es una sucesión de Cauchy.

---

[22] Desanti (1968), p. 45.
[23] Detlefsen (2005), pp. 236-317.
[24] Reproducción de la prueba que se encuentra en Hairer and Wanner (1996); p. 180.

La demostración de que toda sucesión convergente es de Cauchy, es inmediata. Se trata de demostrar el converso.

Sea $\{s_i\}$ una sucesión de Cauchy de números reales, tal que cada uno de los s_i es una clase de equivalencia de sucesiones de Cauchy de racionales; es decir, $s_i = \overline{\{s_{in}\}}_{n\geq 1}$. La idea es escoger para cada i un número cada vez más pequeño (por ejemplo $1/2i$) y aplicar la definición de la sucesión de Cauchy de racionales para obtener

$$\exists N_i \geq 1 \ \ \forall k \geq 1 \ \ \left|s_{in} - s_{i,n+k}\right| < \frac{1}{2i}\cdot$$

Luego hacemos $v_i := s_{i,N_i}$ y consideramos la sucesión de racionales $\{v_i\}\cdot$

a) Demostramos primero que $|v_i - s_{im}| < 1/i.$ Dada la definición anterior de valor absoluto de un real como clase de equivalencia, el número real $|v_i - s_i|$ se representa por la sucesión de Cauchy de racionales $\{|v_i - s_{im}|\}_{m\geq 1}$. Entonces, para $m \geq N_i$,

$$|v_i - s_{im}| = \left|s_{i,N_i} - s_{im}\right| < \frac{1}{2i} = \frac{1}{i} - \frac{1}{2i},$$

dado el orden de los reales y tomando un $\varepsilon' = 1/2i,$ se sigue que $|v_i - s_{im}| < 1/i.$

b) En seguida probamos que $\{v_i\}$ es una sucesión de Cauchy de racionales. Como el valor de $|v_i - v_{i+k}|$ no cambia independientemente de que sea un número racional o real, entonces

$$\begin{aligned}|v_i - v_{i+k}| &= |v_i - s_i + s_i - s_{i+k} + s_{i+k} - v_{i+k}| \\ &\leq |v_i - s_i| + |s_i - s_{i+k}| + |s_{i+k} - v_{i+k}| < \frac{1}{i} + \varepsilon + \frac{1}{i+k} < 2\varepsilon\end{aligned}$$

para un i suficientemente grande y para $k \geq 1$. La clase de equivalencia de los $\{v_n\}$, denotada por $s := \overline{\{v_n\}}$, será nuestro candidato para el limite de $\{s_i\}$. De la anterior desigualdad se deduce que $|v_i - s| < 3\varepsilon$ (para un i suficientemente grande) y entonces $v_i \to s\cdot$

c) Finalmente probemos que $s_i \longrightarrow s$. De las partes a) y b) de esta prueba y de la desigualdad del triángulo, se deduce que

$$|s_i - s| \leq |s_i - v_i| + |v_i - s| < \frac{1}{i} + 3\varepsilon < 4\varepsilon$$

para un i suficientemente grande. Entonces $s_i \longrightarrow s$, y así queda probado el teorema.

La demostración hace evidente una característica de la emergencia de $\mathbb{R}$ completo que la construcción histórica oculta: todo este entramado operatorio se fundamenta en una teoría implícita de conjuntos. Como observa Desanti [25], para que $\mathbb{R}$ emerja como objeto del sistema R^* de sucesiones convergentes, se ha requerido contar con la posibilidad de componer racionales x con entidades x^* que pertenecen a cierto sistema o cadena de extensiones conjuntistas. x^* es un manera de designar los sucesivos resultados de aplicar sobre $\mathbb{Q}$ una "escalera" de operaciones de distinta naturaleza y función lógica.

Esta forma de entender la construcción de $\mathbb{R}$ por un encadenamiento de campos operatorios preconstituidos a partir del cuerpo de $\mathbb{Q}$, aproxima la posición de Desanti al empleo que a Gardies le parece aceptable de la metáfora de construcción: subrayar que los objetos cuya existencia se dice que ha sido construida, presuponen modos previos de existencia.

En resumen, se puede convenir de manera general que las construcciones históricas de Dedekind y de Cantor respondieron a la necesidad de **resolver el problema** de llenar las lagunas operatorias de $\mathbb{Q}$; la una de naturaleza *algebraica* ($\mathbb{Q}$ no es cerrado por la operación raíz cuadrada); la otra *topológica* ($\mathbb{Q}$ no es cerrado por la operación del paso al límite).

En la búsqueda de la solución se emplearon **procedimientos de investigación** conformados por conceptos y técnicas dentro de un entramado lógico de operaciones definidas sobre $\mathbb{Q}$.

El proceso dio lugar a la **construcción de un objeto matemático nuevo**, $\mathbb{R}$, como extensión permisible de las propiedades de la estructura de $\mathbb{Q}$. El nuevo objeto adquirió entonces una realidad independiente de las circunstancias previas en las que fue introducido.

Referencias

BAILLAUD. B. ET H. BOURGET (ed.)(1905) "Correspondance d'Hermite et de Stieltjes", 2 vols., Gauthiers-Villars, Paris. [http://historical.library.cornell.edu/cgi-bin/cul.math/docviewer?did=01700002&view=50&frames=0&seq=7]

DESANTI, J.-T. (1968) *Les idéalités mathématiques*. Seuil, Paris.

DETLEFSEN, M.(2005) "Formalism". EN: SHAPIRO, S. (ed.) (2005).

DUGAC, P. (2003) *Histoire de l'Analyse. Autour de la notion de limite et de ses voisinages*. Vuibert, Paris

FERREIRÓS, J. (1999) *Labyrinth of Thought. A History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics*. Birkhäuser, Basel.

FERREIRÓS, J. (ed.)(1998) *Richard Dedekind: ¿Qué son y para qué sirven los números? y otros escritos sobre los fundamentos de la matemática.* Alianza Editorial, Madrid.

GARDIES, J.-L. (2004) *Du mode d'existence des objets de la mathématique.* Vrin, Paris

[25] Desanti (1968), p. 46.

GARDIES, J.-L- Sin fecha. « Le nombre entier entre syntaxe et sémantique ». Documento en pdf. [http://www.peiresc.org/New%20site/Actes.Dhombres/Gardies.pdf]

HAINER, E. and WANNER, G. (1995) *Analysis by Its History*. Springer-Verlag, New York.

HERMITE, CH. (1984) « Lettres à Gösta Mittag-Leffler », publiées et annotées par P. Dugac. *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*, 5, pp. 49-285. [http://archive.numdam.org/article/CSHM_1984__5__49_0.pdf]

LEIBNIZ, G.-G., *Oeuvre concernant le Calcul infinitésimal*. Traduit par la première fois du latin en français, avec de notes, par Jean Peyroux. Librairie A. Blanchard, Paris,

POINCARÉ, H. (1902) *La science et la hypothèse.* Flammarion, Paris, 1968.

SHAPIRO, S. (ed.) (2005) *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic.* Oxford University Press, New York.

SHAPIRO, S. (1997) *Philosophy of Mathematics. Structure and Ontology*. Oxford University Press, New York.

SCHWARTZ, L. (1997) *Un mathématicien aux prises avec le siècle.* Editions Odile Jacob, Paris.

Luis Carlos Arboleda
Instituto de Educación y Pedagogía
Universidad del Valle, Colômbia.

E-mail: arboleda@univalle.edu.co