

## ALGUNS ASPECTOS HISTÓRICOS SOBRE O DESENVOLVIMENTO DA ANÁLISE MATEMÁTICA NO BRASIL

Clóvis Pereira da Silva  
Curitiba - Brasil

### Introdução

Ao sermos convidados para escrever sobre a História da Matemática para compor o *Festschrift* em honra a Ubiratan D'Ambrosio, escolhemos produzir este texto sobre o desenvolvimento da Análise Matemática no Brasil, pelo duplo motivo seguinte. Por que no início de suas atividades acadêmicas e durante muitos anos Ubiratan trabalhou com fervor, dedicação e denodo contribuindo para os estudos e a pesquisa dessa subárea nas universidades brasileiras. Em segundo lugar pela necessidade de ser recuperada e divulgada a memória do saber nacional. Ubiratan defendeu sua tese de doutorado intitulada *Superfícies Paramétricas Generalizadas e Conjuntos de Perímetro Finito*, subárea Análise, em 8 de dezembro de 1963, após completar seus estudos pós-graduados, obtendo assim o grau de Doutor em Ciências (Matemática) pela EESC da USP. Trabalho que foi orientado por Jaurès P. Cecconi, professor do *Istituto Matematico Università di Genova*, Itália e que trabalhou como Professor Visitante na EESC da USP.

A Análise Matemática clássica foi desenvolvida, no velho Continente, no Cálculo Diferencial e Integral a partir do processo de passagem de uma função ao limite. Durante o processo de resolução das Equações Diferenciais e Integrais caracterizava-se o espaço de soluções dessas equações e assegurava-se a convergência dos processos de solução por aproximação.

Vários matemáticos europeus do século XIX e da primeira metade do século XX deram contribuições para o desenvolvimento da Análise Matemática clássica. Entre eles mencionamos: Weierstrass, Dirichlet, Hilbert, Lebesgue, Fubini, Vitali, Elia Levi, Picone, Volterra, Cauchy, Jordan, Bolzano, Arzelá, Pincherle, Hadamard e Beppo Levi, para citarmos apenas estes. Por exemplo, em 1906 Beppo Levi ao analisar questões relacionadas ao *Princípio de Dirichlet* introduziu o conceito de *Classes de Funções*, que depois recebeu o nome de *Funções Beppo Levi*, antecipando assim o conceito mais geral de *Funções de Sobolev*. Também é devido a ele o teorema sobre integração de seqüências monótonas de funções, importante teorema na *Teoria da Integração de Lebesgue*.

Em 1908 Maurice Fréchet tomando como ponto de partida o Cálculo das Variações, introduziu os *Espaços Abstratos*. As idéias contidas nas obras de Fréchet foram trabalhadas por vários matemáticos entre os quais citamos Stefan Banach. Os resultados obtidos por Stefan Banach a partir da década de 1920 e os resultados contidos em seu livro *Théorie des*

*Opérations Linéaires*, e ainda os resultados obtidos por Nicolas Bourbaki (cf. N. Bourbaki, 1954) exerceram na comunidade matemática internacional, e também na comunidade matemática brasileira, grande influência para o desenvolvimento da Análise Matemática em dimensão infinita.

A Análise Matemática por ser uma subárea básica para os estudos da Matemática Pura e por suas aplicações em outras subáreas da Matemática e também na Matemática Aplicada, na Física, na Estatística, na Economia, na Geofísica e ainda na Tecnologia, despertou a partir de 1934, grande interesse por parte da então pequena comunidade matemática nacional.

### **A Análise Matemática no Brasil – Alguns Aspectos Históricos**

O estudo dessa subárea da Matemática é recente no Brasil, se compararmos com seu estudo feito no velho Continente dos séculos XVIII e XIX, onde as escolas italiana, alemã e francesa deram valiosas contribuições.

No Brasil, como alunos da Escola Politécnica do Rio de Janeiro, Theodoro Ramos e Lélío I. Gama, já estudavam por conta própria na década de 1910 (início do século XX), a Análise Matemática clássica que não era ensinada naquela instituição<sup>1</sup>. Joaquim Gomes de Sousa e Otto de Alencar Silva, ambos no século XIX, desenvolveram trabalhos isolados em Análise Matemática clássica. A tese de doutorado de Theodoro Ramos que foi defendida na Escola Politécnica do Rio de Janeiro em 1918, foi em Análise. Seu título: *Sobre a Funções de Variáveis Reais*.

A partir de 1934 a Análise Matemática foi introduzida no Brasil como disciplina regular nos cursos de licenciatura e bacharelado em Matemática, iniciando pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da USP, e depois se estendendo para a Escola de Ciências da Universidade do Distrito Federal - UDF, para os cursos de bacharelado e licenciatura da Faculdade Nacional de Filosofia da Universidade do Brasil e para os cursos de outras Faculdades de Filosofia, Ciências e Letras sediadas em diversos estados brasileiros. Relembramos que existiu nos Departamentos de Matemática das Faculdades de Filosofia, Ciências e Letras das principais cidades brasileiras a Cátedra de Análise Matemática e Análise Superior até início dos anos 70.

Nas décadas de 1910, 1920, 1930 houve a preferência pela escola italiana<sup>2</sup>, por parte dos líderes da comunidade matemática brasileira. Na década de 1930 e primeira metade da década de 1940 o ensino e a pesquisa em Análise Matemática na cidade do Rio de Janeiro se desenvolviam de modo incipiente e abordando aspectos clássicos da Análise, como Cálculo das Variações e Equações Diferenciais. Na cidade de São Paulo, a partir de 1934 houve o ensino de Análise Matemática. Com a atuação de Luigi Fantappiè passaram a ser estudados aspectos não clássicos da Análise. Por exemplo os *Funcionais Analíticos*.

---

<sup>1</sup> Devemos informar ao leitor que a Escola Politécnica do Rio de Janeiro, uma escola de Engenharia, se destinava a graduar engenheiros e não matemáticos e tampouco professores de matemática. Nesse contexto é razoável esperar que entre as disciplinas ali ensinadas não houvesse o ensino de Análise Matemática.

<sup>2</sup> É sintomática a escolha, de um matemático e de um físico italianos, pela Comissão que criou a USP em 1934 para iniciar nessa instituição a área de Ciências Exatas.

De modo geral, um funcional é uma função com aplicações em  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , cujo campo de definição é um espaço de funções. Incluindo-se no espaço de funções uma topologia conveniente passam a ser entendidas aí as noções de limite, continuidade, etc.

Nas décadas seguintes à de 1940 matemáticos residentes em São Paulo e no Rio de Janeiro, após regressarem de seus estágios de pós-graduação em universidades sediadas no exterior passaram a desenvolver cursos avançados e realizar Seminários de formação para seus alunos em Análise Matemática, e direcionados a preparação de jovens talentosos que iriam completar suas formações em Matemática em boas universidades do exterior.

A partir dessa época houve a preferência, por parte dos líderes dessa subárea, pelos ensinamentos e pelos aspectos filosóficos introduzidos pela escola francesa que era liderada pelo grupo Nicolas Bourbaki.

Com a contribuição, na segunda metade da década de 1940, de António Aniceto R. Monteiro, matemático português formado na escola francesa, que trabalhou no Departamento de Matemática da FNF<sup>i</sup> da Universidade do Brasil e com a visita, na segunda metade da década de 1940 a esta Faculdade, do matemático Marshall H. Stone, da *University of Chicago*, entre outros visitantes, novos métodos da Análise Matemática foram introduzidos e pesquisados no Brasil. Citamos como sendo dessa fase as pesquisas sobre *Anéis de Funções Contínuas* e as pesquisas sobre *Espaços de Banach*, temas atuais para a época.

O curso que Marshall Stone ministrou na FNF<sup>i</sup> sobre o Teorema de Stone-Weierstrass e suas aplicações para uma Álgebra de Boole, despertou nos alunos grande interesse pelos estudos em *Teoria da Aproximação*. Entre os alunos desse curso estava o jovem Leopoldo Nachbin que passou a se interessar por esta subárea da Matemática.

São da década de 1940 a tese de José Abdelhay, docente da FNF<sup>i</sup> da Universidade do Brasil, intitulada *Bases Para os Espaços de Banach* e a tese de Leopoldo Nachbin intitulada *Topologia e Ordem*<sup>3</sup> ambas apresentadas em 1950, para concurso de provimento de Cátedra de Análise Matemática e Análise Superior, que seria realizado no Departamento de Matemática da FNF<sup>i</sup> da Universidade do Brasil. Este concurso jamais foi realizado para a Cátedra<sup>4</sup>.

A tese de José Abdelhay se baseava no Capítulo VII do livro de S. Banach acima referido, onde o autor aborda a existência de bases em espaços, atualmente denominados *Espaços de Banach*. Em sua tese José Abdelhay aborda os *Espaços de Banach* de dimensão infinita que possuem bases, dando atenção especial às propriedades que envolvem a noção de ordem parcial (cf. ABDELHAY, 1950, Cap. IV, V).

Ele estudou os seguintes assuntos: Bases Absolutas e Regulares, Complementos e Aplicações, Bases para Subespaços, Bases para Espaços Conjugados, Bases para os Espaços de Banach Complexos (cf. ABDELHAY, 1950).

A título de informação ao leitor não iniciado nesses assuntos da Análise, daremos informações sucintas e sem o rigor requerido da parte técnica sobre o Espaço de Banach.

---

<sup>3</sup> O título “Topologia e Ordem”, segundo o autor, é uma analogia à expressão “Ordem e Progresso” contida na bandeira brasileira.

<sup>4</sup> O mesmo concurso foi realizado 22 anos depois para provimento do cargo de Professor Titular da UFRJ. Nesta oportunidade Leopoldo Nachbin participou do concurso como candidato único.

Espaço de Banach é um conjunto  $E$  munido de um espaço vetorial  $V$  sobre um corpo  $K$ , e de uma função definida em  $V$ , indicada por  $\|x\|: x \in V \rightarrow \|x\| \in R$ , tal que.

- 1)  $\|x\| \geq 0$ ,  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ . Isto é, a função é nula em um ponto, se e somente se, esse ponto é a origem do espaço vetorial  $V$ ;
- 2)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in V$ ;
- 3)  $\|ax\| = |a|\|x\|, \forall a \in R$ ;
- 4) Se  $\{x_n\}$ , com  $n = 1, 2, 3, \dots$  é uma sucessão de vetores tal que  $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\| = 0$ , então existe um  $x \in V$ , tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$ .

A tese de Leopoldo Nachbin para este concurso introduzia os conceitos de: Espaço Topológico Normalmente Ordenado, Espaço Compacto Ordenado e abordava também aspectos da Teoria da Topologia Geral desenvolvida por P. Urysohn e por André Weil.

Este trabalho de Leopoldo Nachbin foi desenvolvido quando de sua estada na *University of Chicago* no final da década de 1940. Nesta mesma década quando ainda estava no Brasil, ele havia tido a idéia de combinar duas estruturas nas quais tinha trabalhado até então: Ordem e Topologia. Ao voltar a atacar este assunto Leopoldo Nachbin criou a *Teoria de Espaços Topológicos Ordenados* que generaliza topologias no sentido de que se a ordem é discreta, então seus resultados são aplicados em conhecidos teoremas da topologia.

O trabalho contém uma caracterização dos espaços topológicos normalmente pré-ordenados, caracterização esta obtida por meio de uma generalização do teorema de separação com resultados clássicos devido a P. Urysohn. Contém também resultados semelhantes aos que foram obtidos por André Weil sobre a caracterização de espaços uniformemente pré-ordenados (cf. NACHBIN, 1950, Cap. I, teoremas 1 e 2. Cap. II, teoremas 8 e 9).

A tese contém vários outros resultados, como por exemplo, sobre espaços ordenados compactos e sobre grupos topológicos compactos. Diversos matemáticos usaram em suas pesquisas os resultados e as idéias contidas nesse trabalho de Leopoldo Nachbin.

Ele abordou nesse trabalho os seguintes assuntos: Introdução composta de: Histórico, Teoria dos conjuntos, Espaços Topológicos, Conjuntos Ordenados, Grupos e Espaços Vetoriais. Espaços Topológicos Ordenados. Espaços Uniformes Ordenados. Espaços Vetoriais Topológicos Ordenados (cf. NACHBIN, 1950).

As duas teses acima citadas eram de boa qualidade. Elas abordaram assuntos de pesquisa em Análise Matemática que eram atuais para a época.

A partir do final da década de 1940 alguns líderes da comunidade matemática nacional, tais como Leopoldo Nachbin, Mauricio Matos Peixoto, e Marília Chaves Peixoto, no Rio de Janeiro; Candido Lima da Silva Dias, Omar Catunda e Chaim Samuel Hönig, em São Paulo, envidaram esforços para a formação de discípulos e assim desenvolver e expandir os estudos e a pesquisa da Análise Matemática nas universidades brasileiras.

Eles também estavam preocupados com a criação de estruturas e bases legais para a institucionalização, por parte do Governo Federal, de programas de pós-graduação *stricto sensu* no Brasil. Fato que veio acontecer na segunda metade da década de 1960.

Nas décadas de 1950, 1960 e 1970 havia um grupo de jovens talentosos estudantes brasileiros fazendo estágios em instituições como IMPA, ITA, USP, e posteriormente sendo direcionados para o doutorado em universidades norte-americanas e também para a USP. Esta instituição passou a conceder a partir de 1942 o grau de doutor em Ciências (Matemática) (cf. SILVA; AZEVEDO, 2005).

Nas décadas de 1950 e 1960 jovens talentosos como: Nelson Onuchic, Gilberto Francisco Loibel, Ubiratan D'Ambrosio, Rubens G. Lintz, Djairo Guedes de Figueiredo, Elon Lages Lima, Luis Adauto Medeiros, Hilton Vieira Machado, Augusto J. M. Wanderley, Pedro Nowosad e Geraldo Ávila, entre outros, passaram a se interessar também pelos estudos e pesquisa em Análise e em Topologia.

O interesse pelos estudos e pela pesquisa em Análise se ampliou consideravelmente no Brasil das décadas de 1960, 1970 e 1980, consolidando-se a partir de então. Para tal mister contribuíram a implementação de ações e metas para formação de Recursos Humanos qualificados, estabelecidas pelos líderes da comunidade matemática nacional; a criação do Colóquio Brasileiro de Matemática com sua primeira reunião em 1957<sup>5</sup>; a concessão pela FFCL da USP e pela EESC da USP do grau de doutor em Ciências (Matemática) antes da criação, pelo Governo Federal, de programas de pós-graduação *stricto sensu*.

A partir de 1965 foram criados Programas de pós-graduação *stricto sensu* nas principais universidades brasileiras com cursos de mestrado e doutorado nos quais eram e são ofertadas disciplinas de Análise Real e Análise Complexa, o que demandou especialistas em Análise.

A partir de então houve a formação constante de doutores em Análise Matemática em diversas especialidades. Uma rápida leitura de nosso trabalho que desenvolvemos em conjunto com Alberto de Azevedo e intitulado *Mestrados e Doutorados em Matemática Obtidos no Brasil entre 1942 e 2004* (cf. SILVA; AZEVEDO, 2005) nos sinaliza que a subárea Análise Matemática é a que mais titulou doutores nesse período.

Em São Paulo nas décadas de 1930, 1940, 1950, 1960 com a contratação de matemáticos estrangeiros pela USP, pelo ITA e pela EESC da USP, a pesquisa em Análise Matemática obteve grande desenvolvimento. Iniciou-se na USP a partir dos anos 30, uma excelente fase de formação de jovens matemáticos. Relembramos na USP a estada de Luigi Fantappiè na década de 1930 (ao regressar à Itália em plena 2ª Guerra Mundial, L. Fantappiè interrompeu seu projeto de formação de jovens matemáticos), e posteriormente as visitas de André Weil (Líder do grupo N. Bourbaki. Sob a influência de André Weil foi fundada na USP, a Sociedade de Matemática de São Paulo em 1945 e foi iniciada a publicação do *Boletim da Sociedade de Matemática de São Paulo*. Essa revista tornou-se internacionalmente reconhecida), Jean Delsarte<sup>6</sup>, A. Grothendieck, Jean Dieudonné, entre outros.

---

<sup>5</sup> O 26 Colóquio Brasileiro de Matemática que será realizado em julho/agosto de 2007 homenageará os 50 anos de existência dessa importante reunião científica.

<sup>6</sup> Em 1949 Jean Delsarte ministrou na USP um excelente curso extracurricular sobre Espaços Vetoriais Topológicos. Um dos alunos desse curso foi Candido Lima da Silva Dias. A redação do Capítulo I de sua tese: Espaços Vetoriais Topológicos e sua Aplicação nos Espaços Funcionais Analíticos, foi fortemente influenciada por esse curso.

Na EESC da USP houve a contribuição dada pelos professores: Jaurès P. Cecconi e Achille Bassi. Ainda em São Paulo, na USP, destacamos o trabalho em Análise que foi realizado por Omar Catunda e por Candido Lima da Silva Dias, alunos de L. Fantappiè<sup>7</sup>. Destacamos também o trabalho realizado por Chaim Samuel Hönl. Este dirigiu Seminários e formou discípulos em Análise Matemática. Um dos textos de Chaim Samuel Hönl, da década de 1950, e posteriormente publicado em forma de livro texto pelo IMPA é *Aplicações da Topologia à Análise*.

No Rio de Janeiro das décadas de 1950 e 1960 alguns matemáticos como Leopoldo Nachbin, Maurício Matos Peixoto e Elon Lages Lima lideraram linhas de pesquisa científica. O primeiro e o último lideraram respectivamente a Análise Funcional, a Topologia Geral, a Topologia Algébrica e a Topologia Diferencial. O segundo liderou a Teoria dos Sistemas Dinâmicos.

Com o surgimento da Análise Funcional na primeira metade do século XX várias técnicas da Análise clássica foram unificadas. A partir de então houve o natural interesse, por parte de alguns matemáticos, por métodos gerais na Teoria das Equações Diferenciais Parciais que acabassem com métodos particulares ligados às equações clássicas do Potencial, do Calor e da Corda Vibrante.

Paul Adrian Maurice Dirac desenvolveu na primeira metade do século XX o *Cálculo das Distribuições* que generalizava o Cálculo Diferencial e Integral. Posteriormente S. Sobolev construiu um formalismo matemático que atendia as várias restrições existentes no *Cálculo das Distribuições* da época. Sobolev introduziu os chamados *Espaços de Sobolev*. Estes são espaços de funções absolutamente contínuas tais que estas funções e suas derivadas até uma certa ordem estão no espaço  $L^p$ . Por se tratar de assunto não usualmente encontrado nos livros textos de Análise daremos a seguinte definição formal.

Sejam  $\Omega$  um aberto do  $R^n$ ,  $m \in N$  e  $1 \leq p \leq \infty$ . Se a função  $u \in L^p$  possui derivadas de todas as ordens em  $L^p$  no sentido do operador de derivação  $D^\alpha$  de ordem  $\alpha$ , e quando a derivada  $D^\alpha u$  é definida por uma função de  $L^p(\Omega)$ , então define-se um espaço denominado espaço de Sobolev.

Representa-se por  $W^{m,p}(\Omega)$  o espaço de Sobolev de todas as funções

$u \in L^p(\Omega)$  tais que  $\forall |\alpha| \leq m$ , a derivada  $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ .

Ao leitor interessado em um estudo inicial desse assunto onde são abordados problemas elípticos não homogêneos (cf. MEDEIROS; MIRANDA, 2000).

Ainda na primeira metade do século XX o matemático francês Laurent Schwartz introduziu o formalismo definitivo no que depois foi chamado de *Teoria das Distribuições*. Formalismo que dependia fortemente da teoria dos *Espaços Vetoriais Topológicos* que constituíam generalização natural dos *Espaços de Hilbert*<sup>8</sup> e dos *Espaços de Banach*. Sobre

---

<sup>7</sup> L. Fantappiè foi aluno de Vito Volterra o criador da Análise Funcional. Em verdade Volterra usava a expressão “função de linha”. O termo funcional foi atribuído por J. Hadamard. Não há dúvidas que o conceito de funcional foi a mais importante contribuição dada por Volterra à Matemática de sua época.

<sup>8</sup> Sem entrarmos em detalhes técnicos, informaremos o seguinte. Espaço de Hilbert é um espaço com produto interno que é completo.

*Espaços Vetoriais Topológicos* cf. o *Livre 5 de Éléments de Mathématiques* de N. Bourbaki.

Em verdade Laurent Schwartz é considerado o criador da *Teoria das Distribuições* um dos grandes desenvolvimentos da Matemática no século XX. Com a criação dessa importante subárea da Matemática Laurent Schwartz foi agraciado com o *Prêmio Medalha Fields* durante o *Congresso Internacional de Matemáticos* realizado em 1950 em *Harvard, Cambridge, Massachusetts, USA*.

No Brasil surgiu nesse contexto de desenvolvimento da Análise Matemática mundial das décadas de 1940 e 1950 o jovem Leopoldo Nachbin, que era adepto da escola francesa, e que se tornou conhecido internacionalmente a partir da década de 1950 por suas contribuições nessa área. Sob a influência de Antônio Aniceto Monteiro, ele se interessou por Conjuntos Ordenados, Reticulados, Álgebras de Boole, e publicou alguns resultados.

Na primeira metade da década de 1940 pesquisadores já haviam obtido resultados informando que em uma Álgebra de Boole ou álgebra booleana, todo filtro primo é maximal. Na segunda metade dessa mesma década Leopoldo Nachbin demonstrou que um reticulado distributivo com elementos 0 e 1, onde todo filtro primo é maximal é uma Álgebra de Boole (cf. NACHBIN, 1947)<sup>9</sup>.

Nesta linha de pesquisa ele também obteve outros importantes resultados onde, por exemplo, demonstrou uma caracterização do reticulado completo de todos os ideais de um anel de Boole (cf. NACHBIN, 1949).

Em 1947 ele produziu sua primeira contribuição à Topologia e intitulada *Combinação de Topologias Metrisáveis e Pseudo-Metrisáveis*, que foi sua tese para obtenção do grau de livre-docente em Análise pela FNF da Universidade do Brasil. Relembramos que a aprovação nesse concurso dava ao candidato o grau de doutor.

Posteriormente Leopoldo Nachbin passou a se dedicar aos estudos e pesquisas em outras especialidades da Análise. Daremos a seguir algumas breves informações sobre seus resultados em *Teoria da Aproximação*. Na década de 1940 Leopoldo Nachbin publicou trabalhos nesta área onde ele estendeu o Teorema de Stone - Weierstrass às funções diferenciáveis. Para auxiliar o leitor que não fez ainda um curso de Análise Real relembramos o Teorema de Stone - Weierstrass (cf. RUDIN, 1971, p. 169 - 171).

Seja  $U$  uma álgebra de funções reais contínuas em um conjunto  $K$ . Se  $U$  separa pontos em um conjunto  $E$ , e não se anula em nenhum ponto de  $K$ , então a aderência uniforme  $B$  de  $U$  é constituída de todas as funções reais contínuas em  $K$ .

Este Teorema recebeu o nome de Teorema de Stone - Weierstrass por que é uma generalização de um Teorema de Weierstrass feita por Marshall Stone.

Na década de 1950 Leopoldo Nachbin passou a trabalhar também em *Aproximação Polinomial Ponderada* seguindo o problema clássico do matemático Serge Bernstein, e introduziu a noção de *Peso Fundamental*. Na década de 1960, ele reformulou o problema original de Bernstein onde definiu certos espaços ponderados que unificam a teoria de diferentes tipos de espaços vetoriais topológicos de funções contínuas. Nesta área, entre

---

<sup>9</sup> Nesta época, segunda metade da década de 1940, Marshall H. Stone havia demonstrado o seguinte resultado para uma álgebra de Boole: Um ideal é maximal se, e somente se ele for primo. O resultado obtido por L. Nachbin é uma recíproca do resultado obtido por Marshall Stone.

outros resultados, Leopoldo Nachbin estabeleceu condições para que um subespaço de funções contínuas de suporte compacto seja localizável sob uma subálgebra da álgebra das funções contínuas.

O período entre 1942 e 1954 marcou a época de glória nos estudos e pesquisas em *Espaços Vetoriais Topológicos*. O interesse por esta subárea da Matemática foi iniciado com o artigo de Jean Dieudonné intitulado *La Dualité dans les Espaces Vectoriels Topologiques*. Ann. Sci. École Norm. Sup., v. 59, p. 107 -139, 1942. Esta teoria foi fortemente motivada posteriormente pela criação, em 1944, da *Teoria das Distribuições*, por Laurent Schwartz que havia baseado sua teoria na dualidade de espaços localmente convexos.

Ao se interessar por este assunto Leopoldo Nachbin obteve importantes resultados em *Espaços Vetoriais Topológicos*, os chamados *Espaços de Hewitt – Nachbin*, nos quais seus resultados são sobre um completamento de um Espaço Completamente Regular  $E$  relativamente às funções reais contínuas não necessariamente limitadas sobre o espaço  $E$ .

O nome *Espaços de Hewitt – Nachbin* foi dado em homenagem a seus criadores. Estes resultados obtidos por Leopoldo Nachbin no final da década de 1940, talvez sejam sua mais importante contribuição à Topologia. Os mesmos resultados foram descobertos de modo independente por Edwin Hewitt, que ao ser informado por I. Kaplansky sobre o trabalho de L. Nachbin deu a este o crédito da descoberta.

Nesta época L. Nachbin não havia publicado seus resultados sobre o assunto, mas os havia informado a Marshall Stone. Estes resultados dizem respeito ao que foi chamado de espaços saturados, que posteriormente Nicolas Bourbaki chamou de espaços repletos (cf. N. Bourbaki, *Topologie Générale*. Paris: Herman, 1958-1961). Esses espaços aparecem de modo natural em diversas subáreas da Matemática, daí sua grande importância.

No IMPA da década de 1950 Leopoldo Nachbin e Elon Lages Lima foram responsáveis respectivamente pela introdução das linhas de pesquisa: Análise Matemática, em Variedades Analíticas e Topologia Algébrica. Ainda no IMPA Leopoldo Nachbin orientou os estudos de doutorado de José de Barros Neto, docente da USP, que defendeu na FFCL da USP, em 1960, a tese intitulada *Alguns Tipos de Núcleos – Distribuições*. (Cf. Notas de Matemática nº 22. IMPA, 1961).

Também foi discípulo de Leopoldo Nachbin no IMPA o jovem Luis Adauto da Justa Medeiros, que posteriormente foi complementar seus estudos com Felix E. Browder em universidades localizadas nos *USA*. Luis Adauto da Justa Medeiros defendeu sua tese de doutorado em 1965 no IMPA. Elon Lages Lima também foi discípulo de Leopoldo Nachbin nos primórdios do IMPA.

O trabalho de Leopoldo Nachbin a partir do IMPA nas décadas de 1950 e 1960 foi importante para o estabelecimento e desenvolvimento dos estudos e pesquisa em Análise Matemática em nosso país. Sua influência se deu em várias regiões do país. Ele foi um dos matemáticos que constantemente ministrava cursos e palestras em universidades sediadas em diversos estados e também em universidades sediadas no exterior.

Os Seminários dirigidos por ele na década de 1960 atraíram vários alunos, como por exemplo, o que foi realizado sobre Análise Funcional no qual foram abordados os temas: Caracterizações dos espaços de Hilbert entre os Espaços de Banach; Espaços de Hilbert de Funções Analíticas; Dimensão. E o seminário Análise onde foram estudados os assuntos:



Topologia e Aplicações Diferenciáveis do  $R^n$ ; Integração; Séries de Fourier; Funções Analíticas.

Com seus resultados contidos nos artigos ( cf. NACHBIN, 1952 e 1954) e combinados com os resultados obtidos pelo matemático japonês T. Shirota contidos no artigo *On Locally Convex Vector Spaces of Continuous Functions*. Proc. Japan Acad., v. 30, p. 294 – 294, 1954, Leopoldo Nachbin contribuiu de forma decisiva para importantes resultados da Análise, em *Teoria das Distribuições e dos Espaços Vetoriais Topológicos*, com o conhecido Teorema de Nachbin - Shirota que generaliza o Teorema de Hahn – Banach, entre outros.

Este talvez seja seu trabalho mais citado pela comunidade matemática mundial. Neste trabalho Leopoldo Nachbin mostrou a equivalência entre a propriedade da interseção binária e a propriedade de extensão. Nesta linha de trabalho ele também apresentou condições necessárias e suficientes para que um espaço de funções contínuas seja bornológico.

Os espaços localmente convexos tais que toda aplicação linear limitada sobre eles é contínua são chamados bornológicos (cf. N. Bourbaki *Espaços Vetoriais Topológicos in Éléments de Mathématiques*, livro 5). Por ser um resultado não encontrado regularmente nos livros textos de Análise, e para orientação do leitor, transcrevemos o Teorema de Hahn-Banach.

Sejam  $E$  um espaço localmente convexo,  $G$  um sub-espaço de  $E$  e  $f$  uma aplicação linear contínua definida em  $G$ . Existe uma aplicação linear contínua  $f^*$  que a prolonga em  $E$ .

Para obter o chamado Teorema de Nachbin – Shirota, Leopoldo Nachbin abordou e resolveu o seguinte problema:

Seja  $F$  um espaço real normado. Decidir quando é verdade que é sempre possível estender toda aplicação linear contínua  $f$  em qualquer subespaço vetorial  $S$  de um espaço normado real  $E$ , com valores em  $F$ , a uma aplicação linear contínua  $f$  em  $E$  com valores em  $F$  preservando a norma de  $f$ .

Leopoldo Nachbin formou escola em nosso país. Ele também deixou valiosas contribuições em *Teoria da Aproximação*, cujos continuadores de suas idéias foram alguns dos seus descendentes matemáticos de primeira geração : João Bosco Prolla, Silvio Machado e Guido Ivan Zapata. Em *Holomorfia em Dimensão Infinita*, suas idéias foram continuadas por seus descendentes matemáticos de primeira geração: Augusto J. M. Wanderley, Roberto Luiz Soragi, Mário Carvalho de Matos, Jorge Alberto Barroso, Richard Martin Aron, Jorge Mujica Ascui e Phillip John Barroso, entre outros. Em Análise Funcional e em Funções de Variáveis Complexas ele também deu valiosas contribuições.

Ao deixar o IMPA no início da década de 1970 Leopoldo Nachbin foi trabalhar no IM da UFRJ. Nesta instituição ele estabeleceu para seus alunos do curso de doutorado um programa de pesquisa sobre o estudo da Análise Complexa em Dimensão Infinita. Uma das idéias da linha de pesquisa era obter resultados que estendessem a linha do problema clássico do prolongamento analítico e das superfícies de Riemann.

Nesta época Leopoldo Nachbin se convenceu que resultados clássicos já obtidos como o *Teorema de B. Malgrange* e o *Teorema das Distribuições* conectariam a *Teoria das Distribuições* à *Teoria das Equações Diferenciais* e à *Teoria das Funções de Variáveis*

*Complexas*. E acreditando também que as generalizações desses teoremas contribuiriam de forma decisiva para o bom desenvolvimento dessas teorias, ele estabeleceu no IM da UFRJ como programa de pesquisa o estudo da *Análise Complexa em Dimensão Infinita*.

O estudo clássico tinha importantes ramificações nos estudos das Equações Diferenciais e das Integrais Elípticas e nas Integrais Abelianas. Dessa forma e com base no problema formulado por Leopoldo Nachbin, seus alunos do curso de doutorado do IM da UFRJ passaram a desenvolver pesquisa em *Espaços de Germes de Aplicações Holomorfas em Espaços Vetoriais Topológicos Localmente Convexos*, dando assim valiosas contribuições para o desenvolvimento da Análise no Brasil.

Entre as contribuições de Leopoldo Nachbin e as de seus descendentes matemáticos, em *Holomorfia*, podemos citar a introdução por eles dos conceitos de holomorfia uniformemente pura e de tipos de holomorfia. Na década de 1970 Leopoldo Nachbin estendeu os conceitos de *tonelagem* e de *bornologia* para uma teoria análoga, utilizando propriedades de funções holomorfas.

Os espaços localmente convexos que satisfazem o teorema de Banach-Steinhaus são denominados *tolenados*.

Para uma relação da primeira geração de sua descendência matemática (cf. BARROSO; NACHBIN, 1997, p. 16 - 18).

Leopoldo Nachbin desenvolveu trabalhos nas seguintes subáreas da Matemática: *Sistemas Ordenados, Topologia, Espaços Vetoriais Topológicos, Análise Harmônica, Holomorfia em Dimensão Infinita, Teoria da Aproximação*.

Ainda no Rio de Janeiro podemos destacar a valiosa contribuição dada em Análise por Luis Aduino Medeiros, do IM da UFRJ, com seus trabalhos sobre Equações Diferenciais Parciais não Lineares e Controle Ótimo de Sistemas Governados por Equações Diferenciais Parciais, Inequações Variacionais.

Ele também tem orientado teses de doutorado em Análise e organizado eventos científicos em Análise como foi a organização e realização do *Colóquio de Análise*, realizado no IM da UFRJ em 1972, com a participação do matemático francês Jacques – Louis Lions e diversos membros de sua escola. Este matemático francês, que foi Presidente da *International Mathematical Union -IMU* no período de 1990 a 1994, muito contribuiu para o desenvolvimento da Análise em nosso país.

Posteriormente Luis Aduino Medeiros organizou em conjunto com Leopoldo Nachbin no IM da UFRJ, um plano de trabalho para que pesquisadores da escola de Jacques – Louis Lions visitassem o IM da UFRJ. Em 1977 foi realizado nessa instituição o *Simpósio Internacional em Mecânica do Contínuo e Equações Diferenciais Parciais*, com a participação, entre outros, de Jacques – Louis Lions. Em anos posteriores Luis Aduino Medeiros organizou a visita ao IM da UFRJ desse importante matemático francês que ali realizou várias conferências e diversos cursos.

Luis Aduino Medeiros tem participado ativamente do *Seminário Brasileiro de Análise*, reunião científica que se realiza desde 1975 duas vezes ao ano. Na 3ª reunião do SBA realizada em 1976 no IM da UFRJ, ele foi seu coordenador. Também tem sido membro da comissão organizadora de várias reuniões do SBA. Ele tem tido a energia e a capacidade de treinar jovens talentosos e de atrair para o IM da UFRJ vários pesquisadores

internacionais. A UFPA realizou, em honra a Luis Adauto Medeiros, no período de 26 a 29 de julho de 2006 o *I Encontro Internacional de Equações Diferenciais da UFPA*.

Ainda na cidade do Rio de Janeiro devemos mencionar as contribuições dadas por Alvércio Moreira Gomes, docente da FNFi da UB. Nas décadas de 1940 e 1950 o ambiente matemático na cidade do Rio de Janeiro passava pela fase de efervescência. Nesta fase o núcleo do ambiente matemático era o Departamento de Matemática da FNFi, que depois foi acrescido do Núcleo Técnico Científica de Matemática da FGV, do CBPF e do IMPA. Diversos Professores Visitantes estrangeiros foram convidados para ministrar cursos e orientar Seminários de formação no Departamento de Matemática da FNFi da Universidade do Brasil.

Em 1945 foi contratado como Professor Visitante para o Departamento de Matemática da FNFi da Universidade do Brasil, o matemático português António Aniceto R. Monteiro que ao chegar ministrou cursos, orientou Seminários de formação e organizou um grupo de pesquisa. Com base nas idéias divulgadas por António Aniceto R. Monteiro em Aritmética dos Conjuntos Ordenados e em Topologia Geral, assuntos atuais para a época, Alvércio Moreira Gomes elaborou um projeto de pesquisa e obteve resultados originais que foram publicados. São dessa fase os trabalhos: *Decomposition of Partially Ordered Systems*. Revista Científica, ano I, n. 2, 1950. *Completion by Cuts of Distributive Lattice*. Revista Científica, ano I, n. 2, 3, 1952.

Trabalhando em análise da noção de medida em Álgebras Ordenadas, tema de pesquisa introduzido na FNFi por António Aniceto R. Monteiro, Alvércio Moreira Gomes obteve resultados originais com os quais elaborou sua tese intitulada *Medida em Álgebras de Boole* para o concurso de livre-docente pela FNFi da Universidade do Brasil. Por algum motivo este concurso jamais foi realizado e assim Alvércio Moreira Gomes não obteve a livre-docência. Ao trabalhar com António Aniceto R. Monteiro, Alvércio Moreira Gomes idealizou a criação da coleção *Notas de Matemática* que foi implementada pelo matemático português e continuada a partir da década de 1950 por Leopoldo Nachbin.

Também Elon Lages Lima, do IMPA deu valiosas contribuições para o desenvolvimento da Análise e da Topologia. Encontramos ainda a contribuição dada por outros matemáticos estrangeiros, como foi o caso de Jean Dieudonné que como visitante ministrou no departamento de Matemática da FNFi da Universidade do Brasil em 1952, o curso intitulado *Análise Harmônica* que no sentido clássico tratava das Séries e Integrais de Fourier.

Na USP Omar Catunda e Candido Lima da Silva Dias, discípulos de L. Fantappiè, deram valiosas contribuições para o desenvolvimento da Análise Matemática<sup>10</sup>. Chaim Samuel Hönig também deu valiosa contribuição à Análise por meio de seus trabalhos publicados, cursos, palestras, orientação de alunos e direção de Seminários, entre os quais citamos o Seminário Teoria de Integração e Equações Integrais, e o Seminário Análise Funcional, ambos realizados nos anos 60. Neste último foram estudados os Espaços Vetoriais

---

<sup>10</sup> Cf. suas teses para obtenção do grau de doutor pela USP e para provimento de Cátedra em Análise. Cf. a tese de Candido Lima da Silva Dias para provimento de Cátedra intitulada *Espaços Vetoriais Topológicos e sua Aplicação nos Espaços Funcionais Analíticos*, que foi publicada In: Bol. Soc. Mat. de São Paulo, v. 5, p.1-58, 1950. Cf. ainda sua tese para obtenção do grau de doutor pela USP e defendida em 1942 e intitulada *Sobre a Regularidade dos Funcionais Definidos no Campo das Funções Localmente Analíticas*.

Topológicos. Chaim S.Hönig também publicou em 1ª edição pelo IMPA em 1976, o livro texto *Aplicação da Topologia à Análise*.

Chaim Samuel Hönig é um dos idealizadores do *Seminário Brasileiro de Análise* importante evento especializado que tem congregado pesquisadores e alunos interessados nessa subárea da Matemática. Ele participou das comissões organizadoras desse evento e foi o coordenador da 2ª reunião do SBA realizado no IM da USP em 1975. Esta reunião científica, que se realiza desde 1975, tem como principal objetivo incentivar a apresentação de trabalhos em andamento, permitindo aos autores interagir com seus pares. O SBA tem propiciado aos pesquisadores participantes das reuniões uma troca salutar de conhecimento de outras linhas de trabalho, induzindo-os a desenvolver trabalhos de pesquisa em conjunto.

Chaim Samuel Hönig foi também o idealizador do *Colóquio Brasileiro de Matemática*. Está aposentado pelo IME da USP, mas ainda participa ativamente das reuniões do *Seminário Brasileiro de Análise*. Suas linhas de pesquisa são: Teorias de Integração, Equações Integro -Diferenciais, Axiomas da Teoria dos Conjuntos na Análise Funcional, Desigualdades Integrais.

Ainda na USP encontramos contribuições feitas por outros docentes para a Análise. Citamos a tese de doutorado de Elza F. Gomide, que foi defendida em novembro de 1950 e intitulada *Sobre o Teorema de Artin-Weil*. Neste trabalho a autora resolveu um caso particular para a conjectura de Artin-Weil seguinte:

Seja  $V$  uma variedade, sem pontos singulares, definida sobre um corpo  $k$ . Seja  $N_v$  o número de pontos racionais de  $V$  sobre a extensão  $k_v$  de grau  $v$  de  $k$ , e consideremos a série de potências formal  $\sum_{v=1}^{\infty} N_v Z^{v-1}$ . Então teremos  $\sum_{v=1}^{\infty} N_v Z^{v-1} = \frac{d}{dZ} \log R(Z)$ , onde  $R(Z)$  é uma função racional de  $Z$ .<sup>11</sup>

Em sua pesquisa Elza F. Gomide considerou equações do tipo:

$$\sum_{i=1}^r a_i x_1^{m_{i1}} \dots x_s^{m_{is}} = 0, \text{ com } a_i \in k, a_i \neq 0, (i = 1, \dots, r) \text{ e os } m_{ji} \text{ inteiros positivos.}$$

No ITA e na EESC da USP também foram desenvolvidos programas envolvendo cursos, palestras, orientação de alunos e Seminários sobre Análise. Para tal contribuíram Francis D. Murnaghan, Kuo Tsai Chen, Jaurés P. Cecconi, Achille Bassi, Nelson Onuchic, Gilberto Francisco Loibel, Ubiratan D'Ambrosio, Rubens G. Lintz, Auster Ruzante, Antonio Fernando Izé, entre outros.

Na UNICAMP os estudos e pesquisas em Análise também despertaram grande interesse, haja vista as contribuições dadas por descendentes matemáticos de Candido Lima da Silva, Chaim Samuel Hönig, Leopoldo Nachbin que trabalharam e outros que ainda trabalham nesta instituição. Na UNICAMP encontramos as contribuições dadas por Geraldo S. Ávila, Mário Carvalho de Matos, Jorge Mujica Ascui, Ubiratan D'Ambrosio, Dicesar Lass

<sup>11</sup> Esta conjectura foi demonstrada por André Weil em 1949, para o caso de curvas algébricas e para variedades definidas por uma equação do tipo:  $a_1 x_1^{n_1} + \dots + a_r x_r^{n_r} = b$ , com  $a_i \in K$ ,  $n_i$  inteiros,  $i = 1, \dots, r$ .

Fernandez e a partir da década de 1980 a valiosa colaboração de Djairo Guedes de Figueiredo que tem orientado diversas teses de doutorado em Análise.

Ao obter o doutorado na *New York University*, Djairo Guedes de Figueiredo regressou ao Brasil e trabalhou no IMPA e na UnB, onde contribuiu para a consolidação do ambiente de estudos e pesquisas em Análise. Seu livro Análise I, da coleção Elementos de Matemática do IMPA, é um dos primeiros textos universitários de Análise em língua portuguesa (cf. FIGUEIREDO, 1975). Nos dias atuais, trabalhando na UNICAMP, Djairo Guedes de Figueiredo é o mais destacado analista brasileiro. Ele tem desenvolvido pesquisas em Equações Diferenciais Parciais, Equações Diferenciais Ordinárias, Análise Funcional Não-Linear, Análise Matemática, Análise Funcional

Na década de 1950 foi criado na UFPE um bom ambiente de estudos e pesquisa em Matemática com o apoio das agências de fomento em recursos humanos qualificados em C & T, e o apoio de renomados matemáticos brasileiros. Este ambiente matemático se manteve e foi ampliado fazendo com que a UFPE seja o mais importante centro matemático da região Nordeste.

Em Recife trabalharam importantes matemáticos estrangeiros, entre os quais vários portugueses, que deram valiosas contribuições para a formação do ambiente de ensino e pesquisa em Matemática na UFPE. Diversos foram os jovens talentosos que orientados por esses matemáticos, e que após realizarem estudos de formação foram realizar doutorado em universidades sediadas no exterior e no Brasil. Entre os talentosos jovens dessa época citamos Fernando Cardoso, que foi orientado por Ruy Luis Gomes, matemático português, e que em 1968 obteve o grau de Ph. D. pela *New York University*. Fernando Cardoso regressou à UFPE onde trabalha atualmente. E Aron Simis que realizou estudos em Álgebra sob orientação de Paulo Ribenboim, na *Queen's University, Canadá*. Ele trabalha na UFPE. O estudo e pesquisa em Análise se espalharam, a partir do Rio de Janeiro e de São Paulo, para várias universidades brasileiras. Talentosos estudantes foram enviados para obterem seus doutorados em Análise em importantes centros estrangeiros. Outros foram enviados para obterem o doutorado em universidades sediadas no eixo Rio de Janeiro – São Paulo, e nessa fase alguns doutores estrangeiros se radicaram no Brasil. Os doutores titulados em instituições sediadas no estrangeiro voltaram para suas instituições de origem, tais como UFPE, UFMG, UFRJ, UFSCar, ICMC da USP, UnB, UFF, UFBA, UFRGS, PUCRJ, IMPA e formaram grupos de pesquisa, continuando dessa forma com o trabalho de seus orientadores.

Por exemplo, na UFRGS há um grupo de pesquisa em Análise formado por cinco docentes. Este grupo trabalha nas seguintes linhas de pesquisa: Equações Diferenciais Parciais, Análise Funcional, Métodos Probabilísticos em Equações Diferenciais Parciais.

Os grupos, já consolidados e existentes em várias universidades do país, têm produzido pesquisa em Análise Matemática. Atualmente as pesquisas em Análise se direcionaram para várias especialidades como por exemplo em: Teoria Local de Formas Automórficas e Operadores Lipschitzianos, Equações Diofantinas, Equações Diferenciais e suas Simetrias, Equações Integro-Diferenciais, Sistemas de Equações e Derivadas Parciais, Métodos Probabilísticos em Equações Diferenciais Parciais, Teoria das Singularidades, Análise Funcional não-Linear, Equações Diferenciais Parciais Não Lineares, Controle Ótimo de Sistemas Governados por Equações Diferenciais Parciais Não Lineares, Inequações

Variacionais, Equações Diferenciais Ordinárias, Análise Harmônica, Análise Funcional, Teoria Espectral, Teoria do Espalhamento para Equações Elípticas e Hiperbólicas, Sólitons (que são ondas de grande amplitude que se propagam em meios não-lineares e interagem sem mudanças substanciais na sua forma), Sistemas Hamiltonianos, Espalhamento Inverso e Análise Global, Equações Diferenciais da Física Matemática, Problemas Inversos e Aplicações.

Para que o leitor não especializado em Análise tenha uma idéia da aplicação dos Problemas Inversos, informamos que essa área tem sido objeto de grande atividade de pesquisa nos dias atuais. Os Problemas Inversos têm interagido com aplicações em Tomografia Computadorizada, em Geofísica, em Finanças Quantitativas e em Semi-Condutores.

Citamos outro matemático que trabalhou também em Análise e em Topologia. Gilberto Francisco Loibel. Ele foi, a partir da EESC da USP, um dos grandes impulsionadores dos estudos e pesquisa da Análise no Brasil. Além de orientar teses de doutorado ele criou um grupo de pesquisa que se notabilizou pelos estudos e pesquisa em Teoria das Singularidades. Gilberto Loibel foi um dos principais impulsionadores, na segunda metade do século XX, do excelente ambiente de estudos e pesquisa em matemática da região de São Paulo que compreende as cidades de São Carlos, Rio Claro e Campinas.

Ainda nesta região do Estado de São Paulo encontramos a valiosa contribuição dada em Análise, por Nelson Onuchic, já falecido. Ele trabalhou no ITA, na FFCL de Rio Claro, atual UNESP e na EESC da USP, atual ICMC da USP. Sua descendência matemática muito tem contribuído para o desenvolvimento do ensino e da pesquisa em Análise.

No ICMC da USP há grupos trabalhando nas seguintes linhas de pesquisa em Singularidades: Geometria e Classificação de Singularidades. Propriedades Genéricas de Subvariedades em Espaços Euclidianos. Singularidades de Problemas de Bifurcação. Topologia, Complexidade e Combinatória de Conjuntos de Bifurcação. Singularidades de Equações Diferenciais Implícitas. Diagramas de Aplicações.

### **Bibliografia**

ABDELHAY, José. Bases Para os Espaços de Banach. Tese apresentada para concurso de Cátedra a FNFfi. Rio de Janeiro: 1950.

BANACH, Stefan. Théorie des Opérations Linéaires. New York: Hafner Publ. Comp., 1932.

BARROSO, Jorge Alberto; NACHBIN, André (orgs.). Lembrando Leopoldo Nachbin. Rio de Janeiro: EdUFRJ, 1997.

BOURBAKI, Nicolas. Les Structures Fondamentales de L'Analyse. Livre I. Théorie des Ensembles. Paris: Éditeurs Hermann & C., 1954.

\_\_\_\_\_. Elements of the History of Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 1994.

DIAS, Candido Lima da Silva. Sobre o Conceito de Funcional Analítico. An. Acad. Bras. Ciênc., v. 15, n.1, p. 1 – 9, 1943.

\_\_\_\_\_. Aplicação da Teoria dos Funcionais Analíticos ao Estudo de uma Solução de uma Equação Diferencial de Ordem Infinita. An. Acad. Bras. Ciênc., v. 15, n. 1, p. 242 – 253, 1943.

\_\_\_\_\_. Sobre a Continuidade dos Funcionais Analíticos. Boletim da Sociedade de Matemática de São Paulo, v. 3, p. 21 – 30, 1949.

- \_\_\_\_\_. Espaços Vetoriais Topológicos e sua Aplicação nos Espaços Funcionais Analíticos. Boletim da Sociedade de Matemática de São Paulo, v. 5, p. 1 – 58, 1950.
- FIGUEIREDO, Djairo Guedes. The Coerciveness Problem for Forms Over Vector Functions. Communications on Pure and Applied Mathematics, v. 16, p. 63-94, 1963.
- \_\_\_\_\_. Some Remarks on Fixed Point Theorems for Nonlinear Operators in Banach Spaces. An. Acad. Bras. Ciênc., v. 39, p. 345-349, 1967.
- \_\_\_\_\_. On the Approximate Solution of Linear Functional Equations in Banach Spaces. Journal of Mathematical Analysis and Applications, v. 24, p. 654-664, 1968. Em conjunto com L. A. Karlovitz.
- \_\_\_\_\_. Maximal Monotone Operators and Nonlinear Integral Equations of Hammerstein Type. Bulletin of the American Mathematical Society, v. 76, p. 700-705, 1970. Em conjunto com Felix. E. Browder; C. P. Gupta.
- \_\_\_\_\_. On a Boundary Value Problem Arising in Elastic Membrane Theory. Anais da Academia Brasileira de Ciências, v. 44, p. 181-183, 1972.
- \_\_\_\_\_. The Dirichlet Problem for Nonlinear Elliptic Equations: A Hilbert Spaces Approach. Lectures Notes in Mathematics, v. 446, p. 144-165, 1975.
- \_\_\_\_\_. Análise I. Rio de Janeiro: EdUnB/Livros Técnicos e Científicos, 1975.
- \_\_\_\_\_. Nonlinear Perturbations of a Linear Elliptic Problem Near Its First Eigenvalue. Journal of Differential Equations, v. 30, p. 1-19, 1978. Em conjunto com J. P. Gossez.
- \_\_\_\_\_. Estimation a Priori Pour les Solutions Positives de Problemes Elliptiques Superlineaires. C. R. de l'Académie des Sciences de Paris-Mathématique, v. 290, p. 217-220, 1980. Em conjunto com P. L. Lions; R. Nussbaum.
- \_\_\_\_\_. Double Resonance in Semilinear Elliptic Problems. Communications in Partial Differential Equations, v. 6, p. 91-120, 1981. Em conjunto com H. Berestycki.
- \_\_\_\_\_. A Variational Approach to Superlinear Elliptic Problems. Communications in Partial Differential Equations, v. 9, p. 699-717, 1984. Em conjunto com S. Solimini.
- \_\_\_\_\_. On Pairs of Positive Solutions for a Class of Semilinear Elliptic Problems. Indiana University Mathematics Journal, v. 34, p. 591-606, 1985. Em colaboração com P. L. Lions.
- \_\_\_\_\_. The Exact Number of Solutions for a Class of Ordinary Differential Equations Through Morse Index Computation. Journal of Differential Equations, v. 96, p. 185-199, 1992. Em colaboração com P. N. Srikanth.
- \_\_\_\_\_. On the Periodic Fucik Spectrum and a Superlinear Sturm-Liouville Equation. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, v. 123, p. 95-107, 1993. Em colaboração com B. Ruf.
- \_\_\_\_\_. A Liouville -Type Theorem for Elliptic Systems. Annali Della Scuola Normale Superiore de Pisa, v. 21, p. 387-397, 1994. Em colaboração com P. Felmer.
- \_\_\_\_\_. On Nonquadratic Hamiltonian Elliptic Systems. Advances in Differential Equations, v. 1, p. 133-170, 1996. Em conjunto com C. A. Magalhães.
- \_\_\_\_\_. Análise I. Volume 1. Rio de Janeiro: LTC – Guanabara, 1996, 256 p.

\_\_\_\_\_. On Linear Perturbations of Superquadratic Elliptic Systems. Lectures Notes in Pure and Applied Mathematics, v. 194, p. 121-130, 1998. Em colaboração com M. Ramos.

\_\_\_\_\_. Infinitely Many Solutions of Nonlinear Elliptic Systems. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, v. 35, p. 51-68, 1999. Em colaboração com T. Bartsch.

\_\_\_\_\_. A Nodal Domain Property for the  $p$ -Laplacian. C. R. Académie des Sciences de Paris, v. 330, p. 669-673, 2000. Em colaboração com J. P. Gossez; M. Cuesta.

\_\_\_\_\_. Nonvariational Elliptic Systems. Discrete and Continuous Dynamical, v. 8, n.2, p. 289-302, 2002. Em colaboração com C. O. Alves.

GOMIDE, Elza Furtado. Sobre o Teorema de Artin-Weil. Boletim da Sociedade de Matemática de São Paulo, v.3/6, p. 1 - 18, 1948/1951.

HÖNIG, Chaim Samuel. Classificação dos Grupos Aditivos de Números Racionais. Boletim da Sociedade de Matemática de São Paulo, v. 3, p. 33 - 47, 1951.

\_\_\_\_\_. Sur les Topologies Semi-Régulières. Anais da Academia Brasileira de Ciências, v. 27, n. 1, p. 1-6, 1955.

\_\_\_\_\_. Sur Quelques Propriétés Topologiques des  $P$ -Espaces. An. Acad. Bras. Ciênc., v. 29, n. 3, p. 319 - 322, 1957.

\_\_\_\_\_. Sur les Groupes Sans Torsions. Comptes Rendus des Académie des Sciences de Paris, v. 258, p. 1679-1682, 1964.

\_\_\_\_\_. The Dirichlet and Substitution Formulas for Riemann-Stieltjes Integrals in Banach Spaces. Functional Analysis, v. 18, p. 135-189, 1976.

\_\_\_\_\_. Análise Funcional e o Problema de Surtm-Liouville. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1978.

\_\_\_\_\_. Equations Intégrales Généralisées et Applications. Publ. Math. d'Orsay., v. 5, p. 1-50, 1981/1982.

\_\_\_\_\_. On a Remarkable Differential Characterization of the Functions that are Kurzweil - Henstock Integral. Atas Seminário Brasileiro de Análise, v. 33, p. 331-341, 1991.

\_\_\_\_\_. Functional Analytic Axioms and Set Theory. Comp. Appl. Math, v. 13, p. 205-213, 1994.

LIMA, Elon Lages. Análise no Espaço  $R^n$ . Brasília: EdUnB/Ed. Edgard Blücher, 1970.

MEDEIROS, Luis Adauto da Justa. Funções de Variáveis Complexas. Publicação nº 2, v.I, Série A João Pessoa: ICM/UFPB, 1966.

----- José Abdelhay. Trabalhos de Matemática. Obra Póstuma. Rio de Janeiro: IMUFRJ, 1996.

MEDEIROS, Luis Adauto; MIRANDA, M. Milla. Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos). Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2000.

NACHBIN, Leopoldo. Une Propriété Caractéristique des Algèbres Booléennes. Portugal Math. v. 6, p. 115 - 118, 1947.

\_\_\_\_\_. Combinação de Topologias Metrisáveis e Pseudo-Metrisáveis. Notas de Matemática n. 1, 1947.

\_\_\_\_\_. On a Characterization of the Lattice of all Ideals of a Boolean Ring. Fund. Math. v. 36, p. 137 - 142, 1949.



- \_\_\_\_\_. Topología e Ordem. Tese apresentada para concurso de Cátedra à FNFi. Chicago: 1950.
- \_\_\_\_\_. A Theorem of the Hahn-Banach Type for Linear Transformations. Trans. Amer. Math. Soc., v. 68, p. 28 – 46, 1950.
- \_\_\_\_\_. On the Continuity of Positive Linear Transformations Topological. Proc. International Congress Math., v. 1, p. 464 – 465, 1952,
- \_\_\_\_\_. On the Continuity of Positive Linear Transformations. Proc. Internacional Congress Math, v. 1, p. 464 – 465, 1952.
- \_\_\_\_\_. Vector Spaces of Continuous Functions. Proc. Nat. Acad. Sci., v. 40, p. 471- 472, 1954.
- RUDIN, Walter. Princípios de Análise Matemática. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico/EdUnB, 1971. Tradução para a língua portuguesa de Eliane Rocha H. Brito.
- SILVA, Clóvis Pereira da; AZEVEDO, Alberto. Mestrados e Doutorados em Matemática Obtidos no Brasil entre 1942 e 2004. In [www.sbhmat.com.br](http://www.sbhmat.com.br). 2005.

**Clóvis Pereira da Silva**

Professor aposentado pelo Departamento de  
Matemática da UFPR  
Curitiba – PR - Brasil

**e-mail:** [clovisps@brturbo.com.br](mailto:clovisps@brturbo.com.br)  
<http://clovisps.blog.uol.com.br>