Revista Brasileira de História da Matemática
Especial nº 1 – Festschrift Ubiratan D'Ambrosio – (dezembro/2007)
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

O CONCEITO DE ÁREA DE FIGURAS PLANAS NA GEOMETRIA GREGA

Rubens G. Lintz
Mc Master University - Canadá
CLE – Unicamp – Brasil.

Neste trabalho iremos analisar o conteúdo dos livros I e II dos Elementos de Euclides, no que se refere ao conceito de área de figuras planas, de um modo mais organizado e adaptado ao pensamento matemático ocidental. Os historiadores da matemática não encontrarão aqui nada de novo, porém os interessados no ensino da matemática poderão utilizar o conteúdo deste trabalho para organizar seus cursos no ensino da geometria, assunto esse lamentavelmente relegado a um segundo plano pelos competentes técnicos do ministério da educação.

Por muito tempo aqui no Brasil a comunidade matemática ligada a alguns centros de estudo considerava um matemático dedicado ao ensino ou história da matemática como alguém que não tinha talento para a "pesquisa na matemática". Felizmente alguns matemáticos competentes se opuseram a esse pensamento bastardo, como o Prof. Ubiratan D'Ambrosio dentre outros e assim atualmente o estudo do ensino e da história da matemática, graças ao trabalho persistente desse dedicados heróis, atingiu o nível que merece em situação semelhante ao de países avançados, onde não predomina o pensamento medíocre, ainda existente entre nós, a respeito desse assunto.

1. Quando estudamos hoje os Elementos de Euclides, estamos na verdade lendo uma pálida lembrança do que realmente foi o texto original escrito por Euclides e seus colaboradores, apesar do trabalho árduo e persistente de inúmeros especialistas da história da matemática grega. Basta dizer que uma cópia grega dessa obra, a mais antiga que possuímos é do século V A.D., isto é, mais de setecentos anos depois de Euclides! Mais detalhes a esse respeito pode ser visto em (Heath, Sir T. L. [1]).

Por exemplo, o conceito de magnitude é vago e impreciso como se apresenta no livro V dos Elementos, isto é, como um objeto do qual podemos considerar múltiplos e submúltiplos, podemos adicionar tais objetos etc. A noção de igualdade entre esses objetos e a noção de maior e menor, como aí exposta, deixa muito a desejar. Provavelmente o que lemos hoje no livro V é resultado de resumos, cópias de cópias que de modo algum corresponde ao conteúdo original desse livro.

Neste trabalho iremos nos restringir a magnitudes representadas por <u>figuras no plano</u>, cuja noção de "área" é introduzida de maneira puramente geométrica, de acordo com o pensamento de Eudoxo, sem nenhuma conotação numérica, como se faz na matemática ocidental onde área de uma figura no plano é um número associado a essa figura com tais e tais propriedades. O pensamento de Eudoxo é exatamente contrário a isso, onde a noção de número é eliminada da geometria, para evitar os paradoxos decorrentes da noção de grandezas incomensuráveis estudadas pelos Pitagóricos. Para mais detalhes ver (Lintz, R.G, [1]).

2. Começaremos por recordar as noções de reta, semi-reta e ângulo e daqui por diante assumimos que o leitor tenha em mente os postulados de 1 a 5 dos Elementos, mesmo que não façamos menção explícita a eles.
As noções de ponto, reta e plano e figuras contidas no plano ou espaço têm uma existência de forte conteúdo espacial em oposição ao que acontece na geometria ocidental aversa a representações espaciais visíveis. Assim quando no postulado 1 se diz que dois pontos distintos definem uma reta isso tem significado espacial, plástico e visível e, portanto é impossível estudar geometria grega sem fazer desenhos. Assim a definição de ponto e reta dada nos Elementos tem apenas um sentido intuitivo e as características geométricas desse Elementos é fixada e esclarecida nos postulados. Portanto, vamos nos acostumar a considerar figura geométrica como algo "desenhado no papel", muito embora, por razões tipográficas, não faremos isso aqui, com a freqüência que mereceria ser feito. Baseado nisso diremos que uma semi-reta é qualquer uma das partes de uma reta *r* determinadas por um ponto P de *r*, isto é, temos a semi-reta "à direita" de P e aquela "à esquerda" de P e assim um ponto P de *r* a divide em duas semi-retas.
Dados dois pontos distintos A e B de uma reta *r* denominamos de segmento de extremidades A e B de r, indicando com $\overline{AB}$ a interseção da semi-reta à esquerda de B com a semi-reta à direita de A. Isso parece mais sofisticado do que dizer que $\overline{AB}$ é o "conjunto dos pontos" entre A e B. No entanto, de acordo com o pensamento grego, podemos falar em pontos A e B pertencentes a uma reta r, mas não como sendo *r* um <u>conjunto de pontos</u>. A reta tem sua identidade própria como figura no plano ou no espaço do mesmo modo que o ponto. Assim dizer que um ponto A pertence a reta *r*, do ponto de vista grego, significa o ponto A como entidade independente "colocado sobre" a reta *r*, algo que horroriza um matemático ocidental!
Há várias definições de <u>ângulo</u> consideradas pelos matemáticos gregos e uma discussão detalhada desse assunto pode ser vista em (Heath, Sir T. L. [1]). Aqui utilizamos uma definição de ângulo mais útil para nossas considerações. Assim seja *r* uma reta do plano e A um ponto do plano não pertencente a *r*. Seja $\overline{A_1A_2}$ um segmento de *r* e *s* uma semi-reta definida por A e por um ponto A' pertencente a $\overline{A_1A_2}$. A existência de s é garantida pelo postulado 1. A coleção de todas as semi-retas s do plano assim definidas quando consideramos todos as pontos pertencentes a $\overline{A_1A_2}$, no sentido indicado acima, denomina-se <u>de ângulo plano retilíneo</u>, de <u>vértice</u> A e lados definidos pelas semi-retas $\overline{AA_1}$ e $\overline{AA_2}$; observa-se que indicamos uma semi-reta definida por dois pontos A e B com AB sem a barra sobre AB. Isso na verdade significa a semi-reta definida pela reta por A e B contendo o ponto B. Convêm lembrar que o correspondente grego ao nosso verbo pertencer no

sentido geométrico é o verbo "κεῖμαι" que significa "jazer sobre" ou "estar localizado sobre". Isso evidencia que na matemática grega a noção de "pertencer", como "o ponto pertence à reta r" é na verdade equivalente a dizer que "o ponto P está sobre a reta r" e portanto é uma figura independente e não um "conjunto de pontos" como considerada na matemática ocidental. Por extensão denominaremos de <u>ângulo raso</u> ao conjunto de todas as semi-retas do plano com um ponto em A e outro ponto B em *r*, para todos os pontos B em *r*, ângulo completo é o conjunto de todas as semi-retas no plano com uma extremidade em um ponto fixo A e contendo qualquer outro ponto B do plano, assim um ângulo raso "contém" todos os pontos de um semi-plano e um ângulo completo, todos os pontos do plano, para usar uma linguagem pictórica.

Dois ângulos α e β de vértices A e B e lados respectivamente r_1 e r_2 de α e s_1 e s_2 de β são iguais, indicando-se $\alpha = \beta$ se colocado A sobre B pode-se colocar r_1 sobre s_1 de modo que r_2 caia sobre s_2 ou, em outras palavras, β é <u>sobreposto</u> a α. O conceito de <u>sobrepor figuras</u> é típico da matemática grega e não pode ser interpretado em termos da matemática ocidental e para uma discussão detalhada sobre isso ver (Lintz, R. G. [1]).Um ângulo α é menor do que um ângulo β, escrevendo-se $\alpha < \beta$, se existe um ângulo $\alpha' = \alpha$ tal que todas as semi-retas de α' então contidas em β, indicando-se $\alpha' \subset \beta$. Do mesmo modo define-se $\alpha > \beta$ e verifica-se que só há três possibilidades para dois ângulos planos α e β: $\alpha = \beta$, $\alpha < \beta$, $\alpha > \beta$, mutuamente exclusivas. Sejam α e β tendo um vértice comum A e um lado comum mas tal que, excetuado o lado comum, eles não tem nenhuma outra semi-reta em comum. Então o ângulo γ formado pelo vértice A e todas as semi-retas de α e todas as de β é denominado de soma de α e β, indicando-se $\gamma = \alpha + \beta$; por extensão para dois ângulos α e β quaisquer define-se $\alpha + \beta$ como sendo $\alpha' + \beta'$ onde α' e β' são iguais respectivamente a α e β, nas condições acima indicadas da definição de soma, que só é definida se γ é menor que um ângulo completo.

3. <u>Triângulos e polígonos no plano</u>. Sejam três pontos A_1, A_2 e A_3 no plano não pertencentes a mesma reta e sejam os segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$ e $\overline{A_1A_3}$ e consideremos os ângulos α de vértice A_1 e lados $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{A_1A_3}$, β de vértice A_2 e lados $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{A_2A_3}$ e γ de vértice A_3 e lados $\overline{A_2A_3}$ e $\overline{A_1A_3}$. A figura plana formada pelos segmentos acima e os pontos de interseção de três semi-retas dos ângulos α, β, γ se denomina <u>triângulo plano T</u>. Os pontos A_1, A_2, A_3 se denominam <u>vértices</u> de T, os segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_1A_3}$ se denominam <u>lados</u> de T e os pontos pertencentes às três semi-retas indicadas acima constituem o <u>interior</u> de T; os pontos do plano não pertencentes a T se denomina de <u>exterior</u> de T, os lados de T formam a fronteira de T.

<u>Polígono plano P</u> é a figura do plano formada pela reunião de um numero de triângulos T_1, T_2, ... T_n tendo em comum no máximo partes de suas fronteiras. Usaremos a notação:

$$P = (T_1, T_2, \ldots T_n)$$

O conjunto de todos os pontos pertencentes aos triângulos de P denomina-se de figura poligonal F e os triângulos de P constituem uma triangulação de F. Dados dois polígonos P_1

e P_2 se todos os triângulos de P_1 pertencem a P_2 indicaremos $P_1 \subset P_2$ e com a notação $P_2 - P_1$ significamos todos os triângulos de P_2 que não pertencem a P_1. Observe-se que se F_1 e F_2 são as figuras poligonais definidas por P_1 e P_2 respectivamente então $F_2 - F_1$ não é necessariamente igual a $P_2 - P_1$ como conjunto de pontos no plano.

4. Igualdade de triângulos e polígonos. Dois triângulos T_1 e T_2 são iguais se puderem ser sobrepostos no sentido discutido anteriormente e indicamos

$$T_1 \underset{=}{s} T_2$$

Dois polígonos P_1 e P_2 com mesmo numero de triângulos

$$P_1 = (T_1, T_2, \dots T_n)$$
$$P_2 = (T'_1, T'_2, \dots T'_n)$$

são iguais por triangulações, indicado-se $P_1 \underset{=}{t} P_2$ se for possível organizar os triângulos de P_1 e P_2 de modo que

$$T_i \underset{=}{s} T'_i,\ 1 \le i \le n.$$

Dois polígonos P_1 e P_2 são equivalentes, indica-se

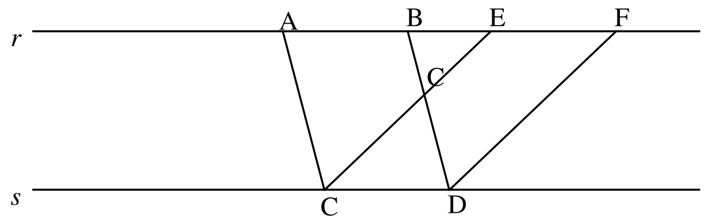
$$P_1 \underset{=}{e} P_2$$

Se existirem duas figuras planas F e F' iguais por superposição e figuras F_1 e F_2 contidas em F e F', respectivamente iguais por superposição às figuras definidas por P_1 e P_2 respectivamente e tais que $F - F_1$ e $F' - F_2$ são iguais por superposição. Nota-se que $F - F_1$ e $F' - F_2$ não são figuras poligonais em geral, mas são partes do plano e a elas também se aplica a operação de superposição.
Dois polígonos P_1 e P_2 são iguais se existirem polígonos $P'_1, P'_2, \dots, P'_n$ em número finito com

$$P_1 \underset{=}{s} P'_1, \quad P'_n \underset{=}{s} P_2 \quad \text{e} \quad P'_i \underset{=}{e} P'_{i+1},\ 1 \le i \le n.$$

Verifica-se facilmente que relação de igualdade entre triângulos e polígonos acima definida é reflexiva, simétrica e transitiva. É para garantir a transitividade que a definição de igualdade de polígonos é um pouco sofisticada. Nos Elementos de Euclides usa-se linguagem mais intuitiva mas menos rigorosa. Um polígono P_1 é menor que um polígono P_2, escrevendo-se $P_1 < P_2$ se existirem figuras poligonais F_1 e F_2 iguais por superposição respectivamente às figuras definidas por P_1 e P_2, tais que $F_1 \subset F_2$ como conjuntos de partes do plano. Do mesmo modo se define maior do que e então dados P_1 e P_2 só existem três possibilidades mutuamente exclusivas, $P_1 = P_2$, $P_1 < P_2$, $P_1 > P_2$.

Como ilustração dos conceitos introduzidos acima demonstraremos que dois paralelogramos P_1 e P_2 de mesma base contidos entre retas paralelas *r* e *s* como na fig. 1 abaixo são iguais como polígonos.



Na fig. 1, P_1 =ABDC e P_2 = EFDC. Consideremos a figura poligonal AFCD. Tirando dela P_2 resulta o triângulo AEC. Também tirando dela P_1 resulta o triângulo BFD. Mas, como é fácil ver esses triângulos são iguais por superposição e portanto $P_1 = P_2$ por definição.

Daí também resulta que tanto P_1 como P_2 são iguais ao retângulo de base CD e altura igual à distância das retas *r* e *s*.

Deixamos como exercício ao leitor demonstrar que um triângulo é igual a um retângulo de mesma base e altura metade da altura do triângulo. Iremos usar isso abaixo.

Da definição de igualdade de polígonos tem-se que: de figuras poligonais iguais retirando-se figuras poligonais iguais resultam figuras iguais. Também decorre da definição de igualdade se em um polígono P substituirmos cada triângulo de P por figuras iguais, a reunião de todas essas figuras é igual à figura definida por P.

Baseado nessas idéias vamos demonstrar o teorema abaixo:

<u>Teorema fundamental dos polígonos planos</u>: qualquer polígono P é igual a um quadrado Q, considerado como uma figura poligonal.

Para isso seja P dado por,

$$P_1 = (T_1, T_2, \ldots T_n)$$

Temos que T_1 é igual a um retângulo R_1 e em II, Prop. 14 dos Elementos de Euclides demonstra-se que R_1 é igual a um quadrado Q_1. Então considerando-se agora T_2 temos que T_2 é igual a um quadrado Q_2. Pelo "Teorema de Pitágoras"em uma forma geométrica considerada nos Elementos a reunião de Q_1 e Q_2 é igual a um quadrado Q_{12}. Considerando assim, usando-se todos os triângulos de P chega-se a um quadrado $Q_{12\ldots n}$=Q que é igual a P.

Na demonstração de Prop. 14 acima indicada e nas demais referentes à igualdade de polígonos usa-se com freqüência o fato seguinte: se um polígono P é reunião de triângulos iguais e o mesmo para outro polígono P' então se P = P' e têm o mesmo número de triângulos, então os triângulos de P são iguais aos de P'. Isso se demonstra por absurdo; de fato se o triângulo T igual aos triângulos de P fosse diferente de T', igual aos triângulos de

P', então deveria ser ou T > T' ou T < T'e em um caso ou outro resultaria P≠P', contrário à hipótese.

5. Igualdade de figuras planas. Nos caso de figuras quaisquer do plano, ou em linguagem matemática ocidental, sub-conjuntos do plano, a igualdade entre elas é definida pelo método de exaustão inventado e sistematizado por Eudoxo. Infelizmente todos os seus trabalhos originais se perderam e o que sabemos dele é em grande parte via os Elementos de Euclides. Como Arquimedes usou muito o método de exaustão passou-se a atribuir a ele sua invenção, o que não corresponde à realidade histórica.

Uma parte do método de exaustão consiste em afirmar que duas magnitudes, em nosso caso figuras planas, são iguais por exaustão se é falso que uma seja maior ou menor que a outra.

Comecemos por esclarecer o que entendiam os matemáticos por figura plana. Assim F, uma parte do plano é uma figura plana se dado um quadrado Q arbitrário existe um polígono P_i contido em F e outro polígono P_e contendo F tal que a diferença $P_e - P_i$ está contida num polígono P menor do que Q, isto é, cujo quadrado correspondente como indicado antes, está contido em Q. Por exemplo, círculos, retângulos e polígonos são figuras planas, porem essa noção corresponde ao que na matemática ocidental se denomina de conjunto plano mensurável segundo Peano-Jordan.

Sejam F_1 e F_2 figuras planas. Diremos que F_1 é menor do que F_2, indicando $F_1 < F_2$ se existe um polígono P_1 contendo F_1 que é menor do que qualquer polígono P_2 que contem F_2. Do mesmo modo define-se $F_1 > F_2$ se for $F_2 < F_1$.

A segunda parte do método de exaustão diz o seguinte: Se uma magnitude dada A, pode-se tirar outra magnitude B tal que A – B seja menor do que uma magnitude D arbitrária. No caso de figuras planas esse enunciado tem um sentido preciso e para inúmeros exemplos do uso desse método para figuras planas o leitor pode se dirigir ao livro XII dos Elementos de Euclides.

Para terminar recordaremos aqui a noção ocidental de medida de Peano-Jordan para que o leitor sinta a diferença entre o método puramente geométrico da matemática grega e o método numérico, dependendo de número real da matemática ocidental.

Seja F um sub-conjunto do plano limitado. Denominamos de medida exterior de F, ao ínfimo das áreas dos polígonos P_e contendo F, onde área de um polígono é a soma das áreas dos triângulos que o formam e área de um triângulo é o numero real dado pela medida do comprimento de sua base pela altura dividido por dois. Indicaremos

$$m_eF = \inf_{P_e \supset F} |P_e| \ , \ |P_e| = \text{área de } P_e$$

Se existirem polígonos P_i contidos em F definiremos a medida interior de F, como sendo

$$m_iF = \sup_{Pi \subset F} |P_i|$$

Se não existe nenhum polígono contido em F, faz-se $m_iF = 0$.

Diz-se que F é mensurável segundo Peano-Jordan, se

$$m_iF = m_eF$$

e ao valor comum denomina-se de medida de F segundo Peano-Jordan, indicando mF.
Em conclusão, sendo as figuras geométricas entidades espaciais é absolutamente necessário separar número de figura, para evitar os paradoxos dos pitagóricos, como fez Eudoxo. Já no ocidente onde "entidades geométricas" são apenas representações pictóricas de entidades abstratas a elas não se aplicam os paradoxos pitagóricos e então tudo se reduz a números reais que são também puras abstrações.
Nas aplicações praticas dos engenheiros e físicos o ponto de vista dado pela logística, coisa inferior segundo Platão, coincide com o ponto de vista ocidental de medida de grandezas físicas, como comprimento, largura, altura etc de corpos na realidade física, porque aí tudo é aproximado mesmo e então não se necessita de rigor lógico, basta bom-senso!

Referências

Heath, Sir T. L. – [1] –*The Thirteen Books of Euclid's Elements*, 3 vols, Dover Publ., New York (1956), USA.

Lintz, R. G. – [1] – *História da Matemática*, Vol 1, #45, Coleção CLE, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência – UNICAMP, Campinas (2007), Brasil.

Rubens G. Lintz
Mc Master University - Canadá
CLE – UNICAMP - Brasil