Revista Brasileira de História da Matemática
Especial nº 1 – Festschrift Ubiratan D'Ambrosio – (dezembro/2007)
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

DECIMAIS INFINITOS

Nelo D. Allan
Unemat - Brasil

Introdução

Durante a segunda metade da década dos 50 ministramos várias vezes o curso de cálculo no ITA que na época seguíamos o livro de F. D. Murnaghan. Seu principal enfoque era o entendimento gradativo da construção dos números reais, pois tal construção é reconhecidamente difícil de se entender em primeira leitura; neste período estudamos e comparamos todos os processos de construções da Análise. Já aí, nos chegamos à conclusão que em princípio a melhor introdução aos reais seria via decimais infinitos. Na década dos 70 voltei ao cálculo e daí preocupou-me em apresentar maneiras didáticas de se introduzir os números reais e nossa preferência foi a de trabalhar com os decimais infinitos. Aí preparei meu primeiro texto sobre uma conferência sobre este tópico a qual foi apresentada, reformulada e revista, várias vezes. O problema matemático é construir a partir dos números racionais, ou classes de frações, um novo conjunto de números, onde as operações de adição, multiplicação e a ordem podem ser a ele estendidas. Nosso conjunto deve também ser universal no sentido de que a construção seja maximal.

Já na Grécia antiga os matemáticos esbarraram na incomensurabilidade. Nem todas as construções geométricas nos fornece resultados comensuráveis com os dados de partida; em termos atuais, se as medidas dos objetos originais forem racionais o resultado pode não ser racional. Este fato foi observado pelo matemático grego Hiparco: a diagonal do pentágono regular não é comensurável com o lado, i.e., a razão áurea de dois números racionais não é racional. Isto custou sua expulsão da Escola Pitagórica! O problema só foi resolvido pela Teoria das Incomensurabilidades de Eudoxus, aproximadamente um século depois. Esta teoria é uma teoria de razões e proporções e que nada mais é que uma primeira introspecção no conceito de limite; no caso aqui, o de <u>supremo,</u> definido em termos de razões e proporções (isto somente ficou claro no Século XIX). Daí decorre o princípio de exaustão atribuído a Arquimedes, porém já demonstrado por Eudoxus pelo menos um século antes, como também usada para o cálculo de π. Atualmente credenciamos a Eudoxus a criação do Cálculo Integral.

Em meados do Século XVI, os matemáticos começaram a trabalhar com series infinitas e limites, e logo após sentiu-se a necessidade de fundamentar o Cálculo Diferencial e Integral e já no Século XVIII vários matemáticos tentaram entender a noção de limite. Somente no início do Século XIX que Cauchy entendeu claramente que a fundamentação do Cálculo dependia de se tornar preciso o conceito de número real. Nesta época ele, Weiestrass e mais tarde Dedekind apresentaram processos de construção dos números reais. Nesta época já sabíamos construir muitos números; valores de funções como logaritmo e trigonométricas, que juntamente com os radicais sabíamos que elas tinham um grande número de valores não racionais. Em geral estas funções eram definidas por serie de potências, i.e., seus valores eram obtidos como limite de seqüências. A idéia de Cauchy foi caracterizar as seqüências convergentes e definir o número como sendo a classe de todas as seqüências que "convergem" para ele. Assim o número real é uma classe de seqüências de Cauchy. Este é a construção não depende da ordem dos racionais e somente da noção de distância.

Outro processo usado na construção dos números reais é o das seqüências de intervalos encaixantes: Suponhamos o número α já construído e digamos que ele esteja no intervalo **[0,1]** de racionais, i.e., o conjunto dos números racionais que estão entre **0** e **1** juntamente com estes. Dividimos **[0,1]** em dois intervalos **[0,.5]** e **[.5,1]**, e selecionamos o que contém, digamos que seja **[0,.5]**; a seguir dividimos este ao meio e tomamos o que contém α, procedemos indefinidamente. Obtemos uma seqüência de intervalos com cada um contendo o seguinte e cujo comprimento de cada um é o dobro do comprimento do seguinte. Assim os comprimentos dos intervalos tendem a zero. Esta seqüência não é única, pois poderíamos ter dividido o intervalo em um número qualquer de intervalos, digamos dez, e repetido o processo indefinidamente. Observando as propriedades destas seqüências de intervalos, definimos equivalência e daí o número real é uma classe de seqüência de intervalos encaixantes. Este método pode também ser generalizado, porém é mais complicado que o de Cauchy.

O processo matematicamente mais simples de construção é o chamado corte de Dedekind. Observamos que um número real separa os racionais em duas partes disjuntas **X** e **Y** tais que:1) fora de $\mathbf{X}\cup\mathbf{Y}$ existe no máximo um racional. 2) todo elemento de **X** é menor que todo elemento de **Y**, 3) que todo racional menor que um elemento de **X** está em **X**, e 4) que todo racional maior que um elemento de **Y** está em **Y**. O par **{X,Y}** é um corte de Dedekind. O conjunto dos números reais é o conjunto de todos os cortes de Dedekind dos racionais. Esta propriedade é mais usada na Geometria.

Todos estes processos de construção dos reais são equivalentes. A nosso ver a grande vantagem dos decimais é que o sistema decimal é introduzido bem cedo nos currículos atuais; desde o primário os estudantes já viram dízimas periódicas e estão cientes que um decimal é uma dízima se e só se ela representa certas frações. Em outras palavras os decimais infinitos já fazem parte do conhecimento do estudante mesmo que de maneira um pouco nebulosa. Outra conveniência é que a existência do supremo salta aos olhos do leitor. A grande inconveniência desta construção é o tratamento das operações. Aqui também temos que fazer identificações: números que "terminam" em noves com certos números que terminam em zeros.. Estas identificações já é a introdução a noção de limite..

O objetivo deste artigo é uma tentativa de apresentar elementarmente o conceito de número real e a noção de limite calcada fortemente nos decimais infinitos. Não nos preocuparemos em apresentar a teoria dos números reais completa; introduziremos os conceitos principais e trataremos apenas dos resultados que achamos esclarecer a noção de limite. Introduzimos o conceito de decimal infinito, conceito este que o estudante já tem alguma experiência com ele, e baseado neste conceito introduzimos a noção de número real; fazemos uma discussão do conceito de supremo e apresentamos a demonstração do teorema do completamento:

toda seqüência não decrescente e limitada superiormente de decimais infinitos admite um supremo. Observamos também que a construção feita a partir de decimais na base **dez,** é, do ponto de vista operacional independente desta base. Finalmente reproduzimos a definição de limite em termos de decimais.

Notação Posicional

O problema da representação de frações e da representação posicional é antigo; já os Babilônios se preocupavam com ele, pois necessitavam construir tabelas para a Astronomia. Eles usavam a base **hexadecimal**, ou base **sessenta**, o que permitia o uso de frações onde denominadores eram produto de potências de **2, 3** e **5** e contornavam o problema quando havia outro divisor no denominador, como **7** ou **11,** por exemplo. A Aritmética Babilônica era bastante avançada neste sentido, pois eles introduziram o zero na notação posicional. Já os Gregos eram mais voltados ao raciocínio lógico e não se preocupavam muito com os cálculos aritméticos. O próprio Gauss lamentou o fato de Arquimedes não ter se preocupado como problema da representação numérica, de não ter criado, ou redescoberto, o **zero**. Isto só aconteceu mais tarde com os Árabes. A representação decimal só apareceu por volta de **800DC** com os Hindus. O grande avanço surgiu quase que juntamente com a invenção da imprensa. Em princípio Nicola Chuquet, em **1484**, introduziu a nomenclatura de milhões, bilhões etc. como também tratou os radicais e foi a primeira tentativa de uma estruturação algébrica. Simon Stevin em **1585**, foi quem realmente introduziu os decimais no quotidiano, apesar de uma notação um pouco complicada. Pouco mais tarde em **1614**, John Napier introduz os logaritmos já usando uma notação bem próxima da usada hoje; ele já usa o ponto como o separador da parte inteira com a parte decimal do número. Aliás, no início a notação do símbolo separador era bastante diversificada e foi, por causa da dificuldade de impressão convergindo para ponto ou vírgula, isto porém só aconteceu no século passado. A introdução dos decimais foi um grande passo para a Ciência, pois permitiu a simplificação e expansão das tabelas astronômicas e mesmo, posteriormente o trabalho com os logaritmos.

Vamos agora introduzir a notação posicional decimal. Ela resolve o problema de dar um nome a cada número. Comecemos por um exemplo: quando dizemos que temos **3456** bananas está implícito que temos **3** milhares, **4** centenas, **5** dezenas e **6** unidades de bananas e como, por construção do nosso sistema, uma dezena tem **10** unidades, cada centena tem dez dezenas, cada milhar tem dez centenas, e assim por diante. Assim estamos escrevendo que $\mathbf{3456 = 6 + 5.10 + 4.100 + 3.1000 = 6 + 5.10 + 4.10^2 + 3.10^3}$. Esta notação chama-se **notação posicional**. Em geral, seja **B={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}** o **conjunto dos dígitos na base decimal**; Como já apontamos acima, todo número inteiro positivo **a** se escreve, com $\mathbf{a = a_{-r}\bullet 10^r + ... + a_{-1}\bullet 10 + a_0}$, ou simplesmente $\mathbf{a = a_{-r}...a_{-1}a_0}$. Uma primeira tentativa de estender a notação posicional para racionais, é a criação do **decimal racional finito**, i.e., é uma expressão da forma $\mathbf{a = a_{-r}...a_0.a_1a_2...a_s}$ sua qual identificamos com o número racional $\mathbf{a = a_{-r}10^r + ... + a_1 + a_2/10 + ... + a_s/10^s}$; todo número racional cujo denominador é produto de potências de **2** ou **5** pode ser escrito desta forma. Nesta notação $\mathbf{a_{-r}\bullet 10^r + ... + a_{-1}\bullet 10 + a_0}$, ou simplesmente $\mathbf{a' = a_{-r}...a_{-1}a_0}$ é sua **parte inteira**, e sua parte decimal é por definição $\mathbf{a_1.a_2...a_S = a_1 + a_2/10 + ... + a_S/10^S}$. Esta notação tem a vantagem de transformar multiplicação por uma potência inteira **m** de **10** e simples deslocamento do ponto de **m** casas para direita se **m>0** e de **m** casas para esquerda para **m<0**, acrescentamos tantos zeros quantos necessários.

Aproximações

Vamos a seguir estender a noção de decimal. O primeiro exemplo de um processo infinito (potencial), no sentido que não termina nunca, ou não tem fim, é o das divisões sucessivas quando não é exata, por exemplo, **1/3:** se multiplicarmos o numerador desta fração por potências sucessivas de **10** obtemos sempre o mesmo resto **1** e o processo é periódico pois os quocientes e os restos das divisões se repetem indefinidamente. No caso de **1/7** obtemos os restos sucessivos **3, 2, 6, 4, 5, 1, 3,..**. e quocientes **1, 4, 2, 8, 5, 7, 1, 4,...**; escrevemos **1/7 = .142857142857.** Para **p<q** convencionamos escrever

$$\mathbf{p/q = a.a_1a_2...a_na_{n+1}...a_{n+N}\,a_{n+1}...a_{n+s}... = a.a_1a_2...a_n[a_{n+1}...a_{n+S}]}$$

entendendo que os quocientes das divisões sucessivas por **q** a partir n-ésima se repetem em **s** blocos, onde definimos $\mathbf{a_n = 10^{-n} \bullet [\text{parte inteira de } 10^n \bullet p/q]}$. O caso em **p>q** se reduz a este. Estas expressões chamam-se **dizimas periódicas**.

Por volta de **1400**, Al-Kishi trabalha tanto no sistema sexagenal como no decimal apontando o fato do decimal ser mais conveniente. F. Vieta em **1579**, incentivou aos matemáticos o uso do sistema decimal. Ele percebe que as aproximações já obtidas para π eram parte de um decimal infinito potencial que para ser precisamente definido necessita de algo que ele chama de fórmula analítica. A notação atual aparece pela primeira vez em John Marsh em **1742**. J.Robertson (1771), Jean Bernoulli III(1768) e mais tarde Gauss estudaram propriedades dos períodos de frações racionais de mesmo denominador.

A Escola Pitagórica já sabia da existência de medidas "não racionais": as diagonais de um quadrado e a de um pentágono não são comensuráveis com seus respectivos lados, i.e., $\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$ não são racionais. A demonstração deste fato é feita em qualquer Curso de Matemática, e o mesmo tipo de argumento se estende a um número algébrico qualquer, i.e., uma raiz de um polinômio irredutível a coeficientes racionais de grau maior que 1, é irracional.

Nosso próximo problema é como aproximar $z=\sqrt{2}$. Em primeira aproximação z=1. A seguir elevemos {1.1, 1.2, ..., 1.9} ao quadrado e obtemos que $1.96 = 1.4^2 < 2 < 1.5^2 = 2.25$. Repetimos o processo com {1.41, 1.42, ..., 1.49} obtendo que $1.41^2 < 2 < 1.42^2$. Na próxima etapa obtemos que $1.414^2 < 2 < 1.415^2$. Assim, pelo menos teoricamente, qualquer que seja o número *i* de casas decimais desejadas, podemos números racionais a e b tais que $\mathbf{a^2<2<b^2}$ e $\mathbf{b-a<10^{-(i+1)}}$, i.e., dizemos que obtivemos uma aproximação de $\sqrt{2}$ correta a **i** casas decimais. Podemos então escrever que $\sqrt{2}$ **= 1.414295**... entendendo que qualquer que seja a casa decimal **i**, dada a principio, temos um processo de determinar qual número de **B** que ocupa esta casa. Assim podemos pensar este "**número**" como sendo uma função que associa a cada inteiro **n,** o **n**-ésimo dígito de $\sqrt{2}$. Vamos então dar uma definição mais precisa no parágrafo seguinte.

Decimais

Seja **D** o conjunto de todas as funções, **f** dos inteiros $\mathfrak{I}$ em **B** tais que **f(i)=0** para todo **i<r**, para algum inteiro **r**, o qual indicaremos por **início[f].** Os elementos de **D** chamam-se **decimais infinitos**. Se **início[f]<0** chamaremos de **a** ao número $\mathbf{a := a_{-r}\bullet 10^{r} + ... + a_1\bullet 10 + a_0}$ e indicaremos o decimal **f** por $\mathbf{f := a.a_1a_2a_3...}$ onde por conveniência trocamos **f(n)** por $\mathbf{a_n}$. O número **a** chama-se a **parte inteira** de **f** e $\mathbf{.a_1a_2}$... sua **parte decimal** ou **mantissa**. Se **início[f]>0** escrevemos $\mathbf{f := .0...0a_ra_{r+1}....}$ O dígito $\mathbf{a_i}$ chama-se o ***i*-ésimo dígito de *f*** ou a ***i*-ésima casa decimal** de **f**. O decimal **f** tal que **f(i)=0**,para todo **i**, chama-se **decimal zero** ou simplesmente zero.

Diremos que dois decimais **f** e **g** são **<u>associados</u>**, **f~g**, se **f(i) =g(i), i<s, ou f(r) =g(r)+1,** ou ainda **f(i)=0** e **g(i)=9** para todo **i>s.**

Sejam dados **f** e **g** em **D**. diremos que **f < g** se ou **a<b***,* ou $\mathbf{a=b, a_1=b_1, a_2=b_2, a_{r-1}=b_{r-1}}$ e $\mathbf{a_r<b_r}$. **r** chama-se **<u>índice</u> <u>do</u> <u>dígito</u> <u>diferente</u>**. Observemos que dados **f** e **g** elementos distintos de **D**, ou **f<g** ou **f>g**. Observemos também que, por exemplo temos **.999... < 1.000...** e que entre estes dois elementos de **D** não existe nenhum outro elemento de **D**.

Um decimal **f** chama-se **<u>finito</u>** se existe um índice **s** tal que $\mathbf{a_i=0}$ para todo índice **i** maior que **s**, neste caso diremos que **f** termina em zeros. **f** termina em noves se existir um índice **N** a partir do qual todos seus dígitos são iguais a nove. Um decimal chama-se **<u>periódico,</u>** ou **<u>dízima</u> <u>periódica</u>**, se existir um menor inteiro **N'**′ e um inteiro positivo **s** tal que $\mathbf{a_{n+S}=a_S}$ para todo **n>N'.** **S** chama-se **<u>período</u>** de **f**. O decimal periódico se escreve $\mathbf{a.a_1...a_na_{n+1}...a_{n+S}a_{n+1}...a_{n+S}..}$ e o indicaremos por $\mathbf{f = a.a_1...a_n\ [a_{n+1}...a_{n+S}]}$. Chamaremos de **<u>decimal racional</u>** a um decimal finito ou uma dízima periódica não terminada em noves. Para todo decimal **i** e todo inteiro **n,** $\mathbf{f[n]:=a_{-r}\bullet 10^{r} +...+ a_n\bullet 10^{-n}}$, chama-se **<u>parcial</u> <u>ou</u> <u>aproximação</u> <u>de</u> <u>ordem</u> n <u>de</u> <u>f.</u>** Estes decimais são racionais.Os decimais onde a parte decimal é nula, i.e., $\mathbf{a_i=0}$ para todo **i>0**, chama-se **<u>decimais</u> <u>inteiros</u>**.

Vamos identificar o decimal racional finito $\mathbf{a.a_1...a_S0000}$... ao número racional $\mathbf{a + a_1\bullet 10^{-1} +...+ a_S\bullet 10^{-S}}$ e a dízima periódica, não terminada em noves, com o racional

$$\mathbf{f = a.a_1...a_n[a_{n+1}...a_{n+s}] = (10^{n+s}\bullet f[n+s] - 10^{s}\bullet f[n)/(10^{n}\bullet(10^{s}-1))}$$

Esta fórmula resume a maneira usual de se transformar dízimas em frações; depois de definido multiplicação por potências de dez, e adição de decimais, verificamos que $\mathbf{10^{n+s}\bullet f}$ e $\mathbf{10^{s}\bullet f}$ tem a mesma parte decimal e sua diferença é portanto um número inteiro, o numerador da fração acima.

Observemos que a cada racional **p/q**, podemos associar a dízima **f** onde **f(i)** é o quociente da divisão de $\mathbf{10^{i}\bullet p}$ **módulo q**; obteremos uma dízima periódica porque os restos das referidas divisões se repetem, pois estão entre **0** e **q-1**. A posteriori verificamos que esta

última dízima representa **p/q**. A ordem de **D** quando restrita aos racionais coincide com a ordem dos racionais.
Podemos construir decimais os quais podemos mostrar que não são periódicos. Seja **d** um inteiro positivo **d** menor que $\mathbf{10^{m}}$, que não divisível por nenhuma potência **m** de um número diferente de zero e um. Seja **a** a maior **m**-ésima potência menor que **d** e seja $\mathbf{t_i}$ a maior **m**-ésima potência contida em $\mathbf{d \bullet 10^{m \bullet i}}$. Definamos $\mathbf{a_k = t_k - 10 \bullet t_{k-1}}$. Obteremos um decimal chamado de **m**-ésima raiz de **d**. Por exemplo, se **b=2**, teremos $\mathbf{a_0=1, t_1^2=196<200, t_1=14, a_1=4}$ **... .**

Seqüências de Decimais
Primeiramente observemos que dados dois decimais **f** e **g**, com **f>g**, é fácil de se construir um decimal racional entre **g** e **f**. Se **f** não termina em zeros, um tal racional é a parcial **f[N]** onde **N** é o índice do dígito diferente. Dado **f** temos que **f[1]<f[2]<f[3]<...<f** e a seqüência **{f[N]}** tem a seguinte propriedade: dado **g<f** existe **f[N]** entre **g** e **f**. Isto nos leva a seguinte:
DEFINIÇÃO: Seja **S** um conjunto de decimais ; diremos que um decimal **s** é o **supremo**, (resp. **ínfimo**), de **S**, i.e., **s=SupS,**(resp **infS**), se **s>a**,(resp **s<a**) para todo a em **S**, e se **b<s**,(resp **b>s**), então existe um elemento de **S** que esta entre **s** e **b**. Caso **s** esteja em **S, s** chama-se elemento **maximal**,(resp. **minimal**), de **S**.
Observe-se que o buraco que existe entre os números terminados em noves e os terminado em zeros associados, acarreta que um número terminado em zeros não pode ser ínfimo de um conjunto a menos que esteja nele e aí será seu mínimo. Analogamente um número terminado em noves não pode ser supremo de um conjunto a menos que seja seu máximo. Por construção temos sempre que **f =Sup{f[N]}.**
Uma seqüência de decimais é uma função **F** do conjunto dos naturais **{1,2,3,4,...}** em **D** a qual será indicada por **{F(N)}**. Diremos que uma seqüência $\mathbf{\{f_N\}, f_n=F(n)}$ de elementos de **D** é crescente (resp. decrescente) se para todo **n**, $\mathbf{f_n<f_{n+1}}$(resp. $\mathbf{f_n>f_{n+1}}$). Uma seqüência é limitada superiormente (resp. inferiormente) se existir um decimal inteiro **h** tal que $\mathbf{f_n<h}$ (resp. $\mathbf{f_n>h}$) para todo **N**.

A seguir enunciaremos e demonstraremos o principal teorema sobre convergência de seqüências, o que também é a principal propriedade dos números reais. Esta propriedade, também chamada de **completamento**, é a que diferencia os reais dos racionais. A grande importância dela no nosso contexto é que sua demonstração é construtiva e sua idéia é elementar, fácil de ser entendida.
TEOREMA: (Existência do Supremo) Toda seqüência de decimais que é crescente e limitada superiormente tem um supremo.
DEMONSTRAÇÃO: De fato, seja dada uma seqüência $\mathbf{\{f_N\}}$ crescente e limitada superiormente por um decimal **h**. Escrevamos $\mathbf{f_N := a(N).a(N)_1a(N)_2...}$ **.**

Como esta seqüência é crescente todo **a(N)** é menor ou igual a **a(N+1)** o qual também, para todo **N**, é menor ou igual a **h=h[0]**. Como estes números são inteiros segue-se que existe um índice **N[0]** tal que **a(N)=a(N+r**) para todo **N≥N[0]** e *r* positivo.

A partir desta ordem **N[0]** todas as partes inteiras são iguais e como a seqüência é crescente teremos que $\mathbf{a(N)_1 \leq a(N+1)_1}$ e aqui todos estes dígitos são no máximo iguais a nove. Logo existe um índice **N[1]** maior ou igual a **N[0]** tal que $\mathbf{a(N)_1 = a(N+r)_1}$ para todo $\mathbf{N \geq N[1]}$ e qualquer **r>0.**
Vamos construir, por indução finita, para cada índice **i>1**, um índice **N[i]** de modo $\mathbf{a(N)_i = a(N+r)_i}$ para todo $\mathbf{N \geq N[i]}$ e **r>0.** Acima fizemos a construção para o índice **i=1**. Suponhamos que a construção já tenha sido feita para **k=i-1**, i.e., existe um índice **N[i-1]** tal que para todo $\mathbf{N \geq N[i-1]}$ e **r>0,**teremos $\mathbf{a(N)_{i-1} = a(N+r)_{i-1}}$. Isto quer dizer que para todo índice $\mathbf{N \geq N[i-1]}$ todos os decimais em $\mathbf{\{f_N\}}$ tem as **i-1** primeiras casas decimais iguais! Como a seqüência é crescente, necessariamente, por definição da relação de ordem, deveremos ter $\mathbf{a(N)_i \leq a(N+r)_i}$, para todo $\mathbf{N \leq N[i-1]}$ e **r>0**. De novo, como estes números estão entre zero e nove, existe um índice **N[i]** a partir do qual $\mathbf{a(N)_i = a(N+r)_i}$ para todo **r>0**. Isto completa nossa construção. Construamos o supremo desta seqüência. Vamos por **a=a(N[0])** e para todo **i>0,** $\mathbf{a_i = a(N[i])_i}$**.** Obteremos assim um decimal **f** bem definido e que para todo **i** tem as **i** primeiras casas decimais iguais a dos $\mathbf{f_N}$, para todo **N>N[i],** i.e., $\mathbf{f[i] = f_N[i]}$, para todos estes N. Também $\mathbf{f > f_N}$ e se **g<f**, para o índice **r** do dígito diferente, teremos $\mathbf{g < f[r] < f[N[r]] < f_{N[r]} < f}$, i.e., $\mathbf{f = Sup f_N}$**.** c.q.d.

Analogamente podemos demonstrar o seguinte teorema:
<u>TEOREMA</u>:(**Existência do ínfimo**) Toda seqüência decrescente e limitada inferiormente possui um ínfimo.
Observemos que os teoremas mencionados acima, ainda permanecem válidos se as seqüências não forem crescentes ou decrescentes no sentido estrito de nossas definições, ; se existirem elementos repetidos na nossa seqüência podemos desprezar as repetições e aí duas coisas podem acontecer: Ou ficamos com uma seqüência crescente (resp. decrescente) e aí o teorema se aplica, ou a seqüência dada fica estacionário e aí só temos um número finito de elementos e seu supremo (resp. ínfimo) é seu máximo (resp. mínimo).
Voltamos a ressaltar que a idéia básica de nossa demonstração é que se pudéssemos escrever todos os decimais da nossa seqüência um abaixo do outro, na **"última linha"** estaria o supremo da seqüência. Isto fica melhor visto na tabela anexa onde exibimos 27 elementos da seqüência { **f(N)**}, onde $\mathbf{f(N) = 3 \cdot 8^{N-1} \cdot Sen[180/(3 \cdot 8^N)]}$**.** A seqüência {**f(N)**} é crescente e tem supremo $\boldsymbol{\pi}$ ao passo que $\mathbf{\{\alpha 01, ... \alpha 27\}}$ tem supremo igual a seu máximo igual que é $\alpha 27$. **f(N)** é o semi-perímetro do polígono de $\mathbf{3 \cdot 8^N}$ lados inscrito na circunferência de raio unitário. Usamos uma seqüência de **36** valores para **N**, obtendo uma aproximação de $\boldsymbol{\pi}$ correta a **63** decimais. Observemos que este número de lados $\mathbf{3 \cdot 8^{63}}$ é maior que $\mathbf{10^{57}}$. Foi demonstrado no fim do século XIX que este decimal não é algébrico, i.e., ele é **<u>transcendente</u>**. Também falando de maneira intuitiva, a *esmagadora maioria* dos decimais são transcendentes.

Tabela de valores a 63 casas decimais de semiperímetros de polígonos regulares de 3.8^n , n=7,...,34, lados inscritos a uma circunferência de raio unitário.

α01=3.141592653589|662682701706171090774719985979379159334657412021

α02=3.141592653589|7911985288787393140192102034265840864587927653888

α03=3.14159265358979|32065886783107175360897801705020854854569705976

α04=3.1415926535897932|379646126790207221515422136434931876067728319

α05=3.14159265358979323|84548616535254594352490714114540719992935207

α06=3.1415926535897932384|625217937520959553073552793723759519717229

α07=3.141592653589793238462|6414834431371509332660537283489422318426

α08=3.14159265358979323846264|33535945596696149209095993699434202330

α09=3.1415926535897932384626433|828156756464693217667223599465938835

α10=3.14159265358979323846264338|327225558360767178011490666668742453

α11=3.14159265358979323846264338327|938964512545849907416520918920201

α12=3.141592653589793238462643383279|50111483667391655790362391579236

α13=3.14159265358979323846264338327950|285655091165745608703664589533

α14=3.1415926535897932384626433832795028|8376519662215762115246980319

α15=3.14159265358979323846264338327950288|419041982473108262302955175

α16=3.141592653589793238462643383279502884 19|706393727129295850704782

α17=3.141592653589793238462643383279502884 197|16775152973374499888370

α18=3.141592653589793238462643383279502884 19716|937362752188228781864

α19=3.141592653589793238462643383279502884 1971693|9897279982193295824

α20=3.141592653589793238462643383279502884 19716939|936881978973991355

α21=3.141592653589793238462643383279502884 1971693993|7500760173689723

α22=3.141592653589793238462643383279502884 197169399375|10428629935010

α23=3.141592653589793238462643383279502884 19716939937510|57969 9563842

α24=3.141592653589793238462643383279502884 197169399375105|8206 0026793

α25=3.141592653589793238462643383279502884 197169399375105820|9 6909026

α26=3.141592653589793238462643383279502884 1971693993751058209| 7485311

α27=3.141592653589793238462643383279502884 1971693993751058209 74|94316

Operações

O teorema anterior nos permite definir as operações de adição e multiplicação para decimais. Vamos tratar primeiramente a adição. Sejam dados dois decimais $\mathbf{f=a.a_1a_2...}$ e $\mathbf{g=b.b_1b_2...}$; se, para todo **i,** $\mathbf{a_i+b_i}$ fosse menor que **10**, não teríamos dificuldade em definir a soma **f+g** que seria $\mathbf{(a+b).(a_1+b_1)(a_2+b_2)....}$ Em geral isto não vale dígito a dígito porém isto é verdade, em blocos, salvo algumas exceções. Observemos que as seqüências **{a[N]}** *e* **{b[N]}** são crescentes como também limitadas superiormente, respectivamente por **a+1** e **b+1**. Logo **{a[N]+b[N]}** é também crescente e limitada superiormente, por **a+b+2**. Vamos definir **f+g := Sup{a[N]+b[N]}**. A seqüência **{a[N]•b[N]}** também é crescente e limitada superiormente, por **(a+1)•(b+1)** e portanto seu supremos será chamado de produto de **f** por **g**, i.e., **f•g := Sup{a[N]•b[N]}**. Das definições acima segue- se imediatamente que estas operações são comutativas, associativas, têm identidade respectivamente **0** e **1**, e a multiplicação é distributiva relativamente a adição.

Números Reais

Vamos estender o conjunto dos decimais a fim de obtermos decimais negativos.

Cada elemento **f** de **D** pode ser escrito como **f=a+m** onde **a** é a parte inteira de **f** , $\mathbf{a \geq 0}$, e **m** sua mantissa. Vamos admitir **a<0** e mostrar como operar com eles. Obtemos um novo conjunto **D***. Vamos estender nossas operações a D*. Se $\mathbf{m=.a_1a_2...}$, definimos a mantissa complementar por $\mathbf{m^*=.b_1b_2}$...com $\mathbf{b_i=(9-a_i)}$. É claro que **m+m*=1**. Vamos por **–m=(-1).m=-1+m*** e como **D** é fechado relativamente a soma e ao produto podemos estender linearmente as operações a **D*** seguindo a regra dos sinais. Assim **–f=-(a+1)+m*.** Quando **a<0** diremos que **f** é um decimal negativo. Assim todo **f** em **D*** é positivo, negativo ou nulo, e tal que ou **f** está em **D** ou **-f** está em **D**.

Diremos que **f** é **<u>menor</u>** que **g** se: ou **1) f** esta em **D** e **g** em -**D**, ou **2) f** e **g** estão ambos em **D** e aí **f<g**, ou ainda **3) f e g** estão ambos em -**D** e aí **f>g**. É fácil de ver que o teorema do supremo (ínfimo) continua valido em **D***.

Vamos agora introduzir o conjunto $\Re$ dos números reais a partir dos decimais. Para tal fim basta fechar os buracos que existem em **D*** identificando primeiramente cada decimal positivo terminado em noves com decimal finito seu associado; esta identificação se estende de maneira natural aos decimais negativos: identifico **f** com **g** se **-f** já estiver identificado com **-g**. Esta identificação não altera a ordem como também não afeta as demonstrações dos teoremas de existência de supremo e ínfimo. Conseqüentemente é compatível com as definições de soma e produto. Em resumo um **<u>número</u> <u>real</u>** nada mais é que uma classe de decimais infinitos de **D***, i.e., um número real é um decimal infinito onde se toma o cuidado de identificar números terminados em noves com os respectivos números terminados em zeros, seus associados.

Caracterização dos Reais

Apresentemos agora as propriedades características dos reais. Um conjunto **K{+,•}** munido de duas operações binárias, bem definidas, chamadas de adição e multiplicação, chama-se um **<u>corpo</u>** se estas operações forem comutativas, associativas, possuem identidades, respectivamente **0** e **1**, e cada elemento de **K** tem inverso aditivo, e se este elemento for diferente de zero, então ele tem um inverso multiplicativo.

Um corpo é **<u>ordenado</u>** se possui um ordem **<** tal que dados dois elementos distintos **f** e **g** de **K** se tem que ou **f<g** ou **g<f**; requeremos também que esta ordem seja compatível com as operações no sentido de que se **f, g** e **h** pertencem a **K** e **f<g**, então **f+h<g+h** e **f•h<g•h** se **h>0** e **f•h>g•h** se **h<0**. Um corpo ordenado chama-se **<u>completo</u>** se nele vale o teorema de existência de supremo e ínfimo. Dois corpos ordenados completos são isomorfos se existir uma aplicação entre eles que preserva as operações, i.e., leva somas em somas, produtos em produtos, preserva a ordem, supremos e ínfimos.

TEOREMA: $\Re$ é um corpo ordenado completo e todo corpo ordenado completo é isomorfo a $\Re$.

Este teorema nos diz que se trabalharmos em outra base que não a base **10**, obteremos essencialmente um conjunto com as mesmas propriedades. Observemos também que os números racionais com as operações de adição e multiplicação e da ordem usuais tem uma estrutura de corpo ordenados que porém não é completo; por exemplo a seguinte seqüência das aproximações de $\sqrt{2}$, **{1, 1.4, 1.41,1.414, 1.4142,...}** não tem supremo no conjunto dos racionais pois seu supremo seria um número cujo quadrado é **2**.

<u>LIMITES</u>:
A generalização imediata da noção de supremo ou ínfimo de uma seqüência é a noção de limite. A propriedade básica da seqüência crescente $\{a_n\}$ é que dado um dígito **i** existe uma ordem **n(i)** tal que para seu supremo **a**, temos que a partir da ordem **m(i),** $a-a_n<10^{i+1}$.
Vamos indicar por $|x|$ o número **x** se **x>0** e **-x** se **x<0**, i.e., $|x|>0$.
A definição de limite é a seguinte:

<u>DEFINIÇÃO</u>: Seja dada uma seqüência de números reais $\{a_n\}$. Diremos que esta seqüência **<u>converge</u>** ou que tem um **<u>limite</u>** se existe um número **L** tal que : dado um dígito **i** existe uma ordem **n(i)** tal que $|L-a_n|<10^{i+1}$ para todo **n>n(i)**. Neste caso escrevemos $L=\lim\{a_n\}$

Esta definição que dizer que se o **i**-ésimo dígito de $a_{n(i)}$ não for **9**, então a partir desta ordem, **<u>L</u>** e todos os a_n terão as primeiras **i-1** casas decimais iguais. Apesar de todas as oscilações dos elementos da seqüência a medida que avançamos nos índices da seqüência, evitando-se possivelmente o caso dos dígitos **9**, o número de casas decimais dos a_n que coincide com as de **L** vai aumentando gradativamente até cobrirmos qualquer casa decimal de **L** previamente fixado. Afim de apelarmos mais para a intuição e evitar a mencionar a exclusão dos casos destes dígitos nove vamos dizer, **<u>por</u> <u>abuso</u> <u>de</u> <u>linguagem</u>** que se $|a-b|<10^{i+1}$, então **a**e **b** tem as **<u>i</u> <u>primeiras</u> <u>casas</u> <u>decimais</u> <u>iguais</u>**. Reciprocamente dada uma seqüência $\{a_n\}$ se para cada índice **i** pudermos encontrar uma ordem a partir da qual todos os elementos tem as **i** primeiras casas decimais iguais; por superposição destas casas decimais obteremos um decimal **L** que será o limite de $\{a_n\}$. Esta é a condição de Cauchy.

<u>CONDIÇÃO</u> <u>DE</u> <u>CONVERGÊNCIA</u> <u>DE</u> <u>CAUCHY</u>: Uma seqüência $\{a_n\}$ é convergente se e somente se dado um índice **i** existe um índice **n(i)** tal que $|f_{n+r}-f_n|<10^i$ para todo **n>n(i)** e qualquer **r>0.**
Resumindo o que foi dito acima $L=\mathrm{Sup}\{a_{n(i)}[i]\}$.

PROPRIEDADES DOS LIMITES
Grande parte da teoria de limites de seqüências é toda baseada nos teoremas de existência do supremo e ínfimo, no critério de Cauchy e no fato de **lim{1/n}=inf{1/n}=0,** e isto implica, em particular que $\lim\{b^n\}=0$ para todo **0<b<1**.

As principais propriedades dos limites encontram-se demonstrada em qualquer livro de cálculo. Também dada uma seqüência $\{a_n\}$ existem três possibilidades: $\lim\{a_n\}$ existe,ou $\{a_n\}$ é crescente porém não limitada superiormente (resp. decrescente e não limitada inferiormente). Neste caso diremos que $\{a_n\}$ tende para mais (menos) **infinito**; em símbolos $\lim\{a_n\}=\infty(-\infty)$. Ou ainda podemos extrair de $\{a_n\}$ duas ou mais outras seqüências que tenham limites distintos; neste caso diremos que $\{a_n\}$ é **oscilante**.

SÉRIES

Afim de completarmos nossa construção vamos rever o conceito de série e mostrar que um decimal infinito pode ser representado por uma série. Uma **série** é um par de seqüências $\{a_n,S_n\}$ onde $S_n=a_1+a_2+...+a_n$ e é chamada de **soma parcial de ordem n** da série dada; os elementos a_n chama-se termo geral da série, ou especificamente termo de ordem **n** . A série acima será indicada por Σa_n ou $a_1+a_2+a_3...$ A série Σa_n **converge** se existe $\lim S_n$, caso contrário ela **diverge**. Quando ela converge $S=\lim S_n$ chama-se **soma** da série e se escreve $\Sigma a_n=S$. Uma série é de termos positivos se $a_n \geq 0$ para todo **n**; neste caso ela converge se e só se $\{S_n\}$ for limitada superiormente e sua soma é o $\operatorname{Sup} S_n$. A teoria de séries está toda ela baseada nos teorema de existência de supremo e ínfimo, no critério de Cauchy; destes seguem-se os critérios de comparação: Se $0 \leq b_n \leq a_n$, então a convergência de Σa_n implica a de Σb_n e a divergência desta última implica na divergência da primeira.

A condição de Cauchy implica que toda série que é absolutamente convergente, i.e., $\Sigma|a_n|$ converge, é também convergente, e daí , a cada α de **D*** podemos associar a série convergente $\alpha=a_{-r}\bullet 10^r+...+a_0+a_1\bullet 10^{-1}+ a_2\bullet 10^{-2}+...$; este processo associa a cada α em D a classe de α. Assim se $a= a_{-r}\bullet 10^r+...+a_0$. Está serie ou decimal se escreve $\alpha=a.a_1a_2a_3...$ Este argumento mostra que a teoria de séries é engloba a noção de decimal.

A série que desempenha um papel importantíssimo na matemática é a série geométrica Σx^n que quando $|x|<1$ converge para $1/(1-x)$.

LIMITE DE FUNÇÕES

Primeiramente vamos chamar de **intervalo** aberto (a,b) de $\Re$, ao conjunto de todos os reais x tais que $a<x<b$. Vamos tratar agora da noção de limite de funções. Seja $y=f(x)$ uma função definida num intervalo aberto (a,b) de $\Re$, a valores reais. Seja **c** um elemento de (a,b) diremos que **f tem limite quando *x* tende a *c*** se existir um número **L** tal que qualquer que seja a seqüência $\{a_n\}$ de elementos de (a,b) convergindo ou tendendo a **c**, tenhamos que $f(a_n)$ tende ou converge para **L** e escrevemos $\lim_{x\to c}f(x)=L$. Nossa definição que dizer em símbolos que dado um índice **i** e uma seqüência $a=\{a_n\}$ que tende a **c**, existe um índice $n(a,i)$ tal que $|f(a_n)-L|<10^{-i}$, para todo $n \geq n(a,i)$. Como $\lim\{a_n\}=c$, sempre existe um maior índice **$j=j(a)$**, tal que **$|a_n-c|<10^{-j}$** para todo **$n \geq n(a,i)$**. Para esta seqüência dado **i** existe um **j** tal que todo os elementos da seqüência que tem os primeiros **j** dígitos iguais, exceto noves, os correspondentes valores de **f** tem seus **i** primeiros dígitos, também exceto noves, iguais aos **i** primeiros dígitos de **L**. O nosso argumento ficaria muito mas claro se pudermos afirmar esta última frase independentemente da seqüência dada, i.e., podemos encontrar um tal **j** independente de **$\{a_n\}$**? A resposta é afirmativa e a demonstração de sua existência que faremos é feita por absurdo:

TEOREMA: Suponhamos que o limite quando **x** tende a **c** de **f(x)** é **L**. Então, para cada **i>0** podemos encontrar um índice **j** dependendo de **i** tal que **x** tiver as **j-1** primeiras casa decimais iguais as **j-1** primeiras casa decimais de **c**, **f(x)** terá as **i-1** primeiras casas decimais iguais as **i-1** primeiras casas decimais de **L**, i.e., dado um índice **i** podemos encontrar um índice **$j=j(i)$** tal que se **$|x-c|<10^{-i}$**, então **$|f(x)-L|<10.$**
DEMONSTRACÃO: De fato, vamos, por supor por absurdo que existe um índice **i**, tal que para este índice não existe um **j** que sirva para todas as seqüências **$\{a_n\}$**.
Vamos construir uma seqüência que tende a **c,** e **f** desta seqüência não tende a **L**. De fato, para casa **j>0** existe uma seqüência **$\{a[j]_n\}$** e um índice **n(j)** tal **que $|a[j]_{n(j)}-c|<10^{-j}$,** porém **$|f(a[j]_{n(j)})-L| \geq 10^{-i}$**. Ponhamos **$b_j=a[j]_{n(j)}$. $\{b_n\}$** converge para ***c*** pois para todo **r>0, $|b_{n+r}-c|<10^{-(n+r)}<10^{-n}$.** Porém por construção, **$|f(b_n)-L|>10^{-n}$,** i.e., a partir da ordem **n(j)**, as **i-1** primeiras casas decimais de **$f(b_n)$** não coincidem com as de **L**, conseqüentemente **$\{f(b_n)\}$** não converge para **L**, o que é absurdo. Logo para cada **i** podemos encontrar um **j=j(i)** tal que nossa afirmativa é verificada.
A condição acima pode ser refraseada em termos onde não aparece a base **10**. Podemos substituir **10^i** por qualquer número **$\varepsilon>0$** pois sempre podemos encontrar um **i** tal que **$10^i<\varepsilon$** e daí segue-se que **$|f(x)-L| <\varepsilon$** toda vez que for menor que **10^i**. Tomando **$\delta=10^j$** ou qualquer número menor que este podemos refrasear nossa condição a qual é fácil de se verificar ser equivalente a nossa definição de limite: o limite de **f(x**) quando **x-->c** é **L,** *i.e.,* **$\lim_{x->c}f[x]=L$,** se dado **$\varepsilon>0$** existir um **$\delta>0$** tal que **$|f(x)-L|<\varepsilon$** toda vez que **$0<|x-c|<\delta$.** O fato de **δ** não ser único pode levar a confusão e convém tomar cuidado com isto. Outro ponto onde chamamos atenção é o fato de termos excluído o valor **c** de nosso estudo; o limite de uma função, a princípio não tem nada a ver com o valor da função no ponto **c**. É bom manter este ponto de vista para mais tarde podermos estender de modo conveniente a valores para os quais ela não está definida, por exemplo no caso de **(Sen x)/x** que não está definida em **c=0** porém pode se provar que ela tem limite **1** quando **x->0.**
Finalmente devemos observar que, matematicamente falando, não existe nada de novo na nossa construção; o que sim apresentamos é um texto conciso e auto suficiente contendo o estritamente essencial ao entendimento dos conceitos e deixamos ao leitor muitas pequenas verificações.
Uma observação final é que do ponto de vista matemático o resultado que usa a representação decimal é a teorema de Cantor que nos diz que o conjunto dos números reais

não pode ser escrito como uma seqüência de decimais. Em outras palavras a cardinalidade do conjunto dos números reais é maior que do conjunto dos números inteiros. A idéia de Cantor é muito simples: suponhamos que os números reais pudessem ser escritos numa seqüência $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\}$; Construímos um decimal que não está nesta seqüência modificando o **n**-ésimo digito do **n**-ésimo decimal. Isto nos leva a um absurdo.

REFERÊNCIAS

[B], C. Boyer, A History of Mathematics, J. Wiley,NY, 1968.
[C], Floriann Cajori- *A History Mathematical Notations*, vol. 1, Open Court, Illl.
[G], C.F. Gauss, *Disquisitiones Aritmeticae*, Springer, NY, 1986.
[S],D. J. Struik- *A Source book in Mathematics 1200/1800*, Princeton, NJ, 1986.

Nelo D. Allan
Universidade Estadual do Mato Grosso - UNEMAT

E-mail: neloallan@yahoo.com